44. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 1994/1995

36. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
6. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

JEDNOTA SLOVENSKÝCH MATEMATIKOV A FYZIKOV

S prispením spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Richard Kollár, Jana Višňovská,
Tomáš Vinař a členovia Úlohovej komisie MO.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

ISBN 80–967454–1–7

O priebehu 44. ročníka matematickej olympiády

Súťaž s názvom Matematická olympiáda pre žiakov stredných a základných škôl usporadúva Ministerstvo školstva a vedy SR v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Súťaž riadi Ústredný komisia matematickej olympiády (ÚK MO) prostredníctvom oblastných a okresných komisií MO.

Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. V školskom roku 1994/1995 sa uskutočnil už jej 44. ročník. Matematická olympiáda na Slovensku je nasledovníkom rovnakej súťaže v bývalom Československu a dodnes má spoločné úlohy s olympiádou v Českej republike.

Ústredný výbor MO pracoval v zložení, v ktorom bol na návrh JSMF menovaný Ministerstvom školstva a vedy SR. Predsedom ÚK MO bol Doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., z MFF UK v Bratislave. Ďalšími členmi Ústrednej komisie matematickej olympiády boli:

RNDr. Juraj Balázs, PF UPJŠ Košice,
RNDr. Andrej Blaho, MFF UK Bratislava,
RNDr. Jaroslava Brincková, UMB FHPV Banská Bystrica,
RNDr. Vladimír Burjan, Bratislava,
RNDr. Milan Cirjak, Metodické centrum Prešov,
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava,
Mgr. Milan Demko, PedF UPJŠ Prešov,
Mgr. Vojtech Filín, Gymnázium Trenčín,
RNDr. Jozef Fulier, CSc., Vysoká škola pedagogická Nitra,
RNDr. Milota Hilková, ZŠ Jilemnického Revúca,
PhDr. Oto Klosterman, MŠaV SR Bratislava,
Richard Kollár, MFF UK Bratislava,
Mgr. Jozef Mészáros, Gymnázium s vyuč. jaz. maď. Galanta,
Vlasta Michálková, IUVENTA Bratislava,
RNDr. Gabriela Monoszová, UMB FHPV Banská Bystrica,
Prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., VŠDS Žilina,
Doc. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc., MFF UK Bratislava,
PhDr. Milan Ščasný, CSc., ZŠ Za kasárňou Bratislava,
RNDr. Juraj Vantuch, CSc., PedF UK Bratislava,
Mgr. Dagmar Vongrejová, ZŠ Moskovská Žilina.

Členmi ÚK MO boli aj predsedovia oblastných výborov MO:

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., Vysoká škola pedagogická Nitra,
Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., StF VŠDS Žilina,
RNDr. Božena Miháliková, CSc., PF UPJŠ Košice,
RNDr. Pavol Mäsiar, Metodické centrum Bratislava.

V priebehu 44. ročníka MO sa konalo jedno plenárne zasadanie ÚK MO a 4 zasadania Predsedníctva ÚK MO. Prejednalo sa hodnotenie priebehu súťaže, organizácia ďalších kôl, zabezpečenie prípravných sústredení pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) a prípravy súťažných úloh a zároveň nové stanovy súťaže. Tie boli na jednom zo zasadaní aj prijaté. S ich prijatím sa zmenil názov Ústredného výboru (ÚV MO) na Ústrednú komisiu MO, rovnako sa zmenili názvy oblastných a okresných organizačných štruktúr. Organizácia súťaže zostala naďalej zachovaná, jedinou zmenou je zavedenie praktickej časti pri počítači v jeden z dní III. kola v kategórii P. Prípravu úloh pre kategórie A, B, C zabezpečovala Úlohová komisia MO, pod vedením Doc. RNDr. Jaromíra Šimšu, CSc. z MÚ ČAV v Brne. Na dvoch zasadaniach, ktoré sa počas roka uskutočnili v Jevíčku a Bílovci v ČR sa zúčastnilo jej 14 členov. Zo Slovenska sa na príprave súťažných úloh podieľali RNDr. Pavol Černek, CSc., Doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc. a Richard Kollár. Garantmi výberu úloh v tomto súťažnom ročníku boli

pre kategóriu A: Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.,

pre kategóriu B: RNDr. Pavel Leischner,

pre kategóriu C: RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

(Za zadaním každej súťažnej úlohy je v zátvorke uvedené meno autora úlohy, príp. meno navrhovateľa.)

Pre žiakov základných škôl bola súťaž rozdelená do piatich kategórií: Z4 – Z8, ktoré boli určené žiakom 4. až 9. ročníkov ZŠ a im odpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách: A,B,C a P. Kategória A bola určená žiakom 3. a 4. ročníkov, kategória B žiakom 2. ročníkov a kategória C bola určená pre žiakov 1. ročníkov stredných škôl. Pre žiakov všetkých ročníkov bola určená kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej vekovej kategórii, ako im prislúchala. Týka sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A,B,C a P. Viacero žiakov takúto možnosť využilo.

V kategóriách A,B,C má prvé kolo dve časti. V prvej časti súťažiaci vypracúvavajú riešenia 6 úloh doma, môžu sa pritom radiť so svojimi učiteľmi, vedúcimi krúžkov a pod. Druhá časť má formu klauzúrnej práce. Žiaci riešia v obmedzenom čase 4 hodiny 3 úlohy. Úspešní riešitelia prvého kola sú pozvaní do druhého (oblastného) kola súťaže, kde riešia 4 úlohy v časovom limite 4 hodiny.

V kategóriách B,C týmto kolom súťaž končí, ale v kategóriách A a P sa koná ešte tretie (celoštátne) kolo. Tento rok doň bolo pozvaných v kategórii A 40 najlepších a v kategórii P 25 najlepších riešiteľov z druhých kôl súťaže príslušnej kategórie podľa poradia zostaveného po koordinácii bodového hodnotenia. Vlastná súťaž je rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite prvý deň 2 teoretické a druhý deň tri praktické úlohy, čo je tohtoročná novinka. V novom školskom roku sa zavádza praktická časť aj do domáceho kola a perspektívne sa uvažuje aj o jej zavedení v kole oblastnom. Táto zmena vedie k lepšej príprave súťažiacich na medzinárodné súťaže, ktoré prebiehajú už niekoľko rokov a vyskytujú sa na nich zväčša úlohy práve tohto typu. Rovnako tak aj vyhodnocovanie súťažných programov prebiehalo automaticky, testovaním na niekoľkých súboroch vstupných dát.

Celoštátne kolo 44. ročníka sa uskutočnilo v Bratislave v dňoch 23. – 26. 4. (kat. A) a 26. – 29. 4. 1995 (kat. P) v zariadení IUVENTY. Na zabezpečení súťaže, vrátane spoločenského programu, sa obetavo podieľali pracovníci usporiadajúceho Centra voľného času IUVENTA a pracovníci a študenti Matamaticko-fyzikálnej fakulty UK v Bratislave. Za všetkých menujme aspoň predsedu ÚK MO Doc. RNDr. Tomáša Hechta, CSc., a Richarda Kollára z MFF UK a Vlastu Michálkovú a Mgr. Branislava Hladkého z IUVENTY.

Dvanásť najúspešnejších riešiteľov III. kola MO bolo pozvaných na výberové sústredenie pred MMO, ktoré sa konalo v dňoch 1. – 6. 5. 1995 v Bratislave. Na rozdiel od minulého ročníka sa ho zúčastnilo všetkých 12 študentov. (V tomto školskom roku termíny medzinárodných olympiád, z matematiky aj fyziky, nekolidovali, a preto bolo možné absolvovať obe. Podarilo sa tak vyhnúť sa problémom z minulého roka, keď boli viacerí študenti nútení rozhodnúť sa len pre jednu z nich.) Na základe výsledkov tohto sústredenia a výsledkov tretieho a druhého kola MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo, ktoré reprezentovalo SR na MMO. Pre toto družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie, a to v dňoch 19. – 23. 6. 1995 v bratislavskej IUVENTE, a zároveň nás toto družstvo reprezentovalo aj na prvom ročníku medzinárodného stretnutia s Českou republikou, ktoré sa konalo v Jevíčku v Českej Republike. Tejto súťaži ako aj medzinárodnej matematickej olympiáde sú venované v tejto ročenke samostatné kapitoly.

Pre desať najlepších riešiteľov kategórie P bolo organizované v dňoch 8. – 13. 5. 1995 výberové sústredenie na MFF UK v Bratislave, po ktorom bolo na základe jeho výsledkov a výsledkov III. a II. kola vybrané štvorčlenné družstvo, ktoré reprezentovalo SR na medzinárodnej olympiáde z informatiky. Zo zvyšných účastníkov sústredenia sa ďalšia štvorica zúčastnila na druhom ročníku Stredoeurópskej olympiády z informatiky. Správy z týchto medzinárodných súťaží nájdete v samostatných kapitolách tejto knihy.

Ďalšou pozitívnou zmenou v tomto ročníku MO bolo obnovenie korešpondenčného seminára ÚV MO určeného pre riešiteľov, ktorí bojovali o miesto v reprezentačnom tíme na MMO. Aj tejto súťaži je venovaná samostatná kapitola.

Výsledky celoštátneho kola 44. ročníka MO kategórie A

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet
1.	Martin Pál	4 J.Hronca Bratislava	7	7	7	7	7	7	42
2.	Ján Bábeľa	4 Poštová Košice	7	7	7	7	1	7	36
3.	Patrik Horník	4 Gröss. Bratislava	7	7	7	0	7	7	35
4.	Michal Kovár	4 Gröss. Bratislava	7	4	6	7	1	7	32
5.-6.	Ivona Bezáková	4 Gröss. Bratislava	7	7	7	1	7	2	31
	Vladimír Marko	2 J.Hronca Bratislava	7	7	7	1	2	7	31
7.-9.	Ivan Cimrák	3 V.Okružná Žilina	7	7	7	1	1	7	30
	Ivana Brudňáková	4 Konštantína Prešov	7	7	7	1	1	7	30
	Peter Macák	4 J.Hronca Bratislava	7	7	7	1	1	7	30
10.	Tamás Varga	3 Komárno maď.	7	5	7	2	1	7	29
11.-12.	Ondrej Lonek	3 Gröss. Bratislava	7	7	7	7	-	-	28
	Radoslav Tausinger	4 J.Hronca Bratislava	7	6	6	2	0	7	28
13.	Ladislav Szabó	4 Šamorín maď.	7	7	7	1	1	4	27
14.	Ján Lipka	3 Gröss. Bratislava	0	6	7	3	1	7	24
15.-17.	Boris Krupa	3 Gröss. Bratislava	0	7	6	1	7	1	22
	Martin Domány	4 Michalovce	0	5	7	7	2	1	22
	Slávka Jendrejová	4 Poštová Košice	7	0	7	0	1	7	22
18.-20.	Dalibor Blažek	4 Poštová Košice	0	7	2	5	6	1	21
	Stacho Mudrák	3 J.G.Taj. B.Bystrica	7	3	3	0	7	1	21
	Štefan Godiš	3 V.Okružná Žilina	0	7	6	6	0	2	21
21.-24.	Andrej Komora	3 Gröss. Bratislava	7	0	7	0	1	5	20
	Gabriela Mišunová	4 Párovská Nitra	7	0	7	1	1	4	20
	Marek Ondík	3 Levice	7	0	6	1	5	1	20
	Marek Škereň	4 V.Okružná Žilina	7	1	2	0	7	3	20
25.	Martin Plesch	3 J.Hronca Bratislava	7	7	3	0	1	1	19
26.-27.	Daniel Pártoš	3 Gröss. Bratislava	0	7	6	0	1	4	18
	Miloslav Krajňák	4 Gröss. Bratislava	0	2	6	1	2	7	18
28.	Zsolt Illés	4 Komárno maď.	7	0	4	1	1	4	17
29.-30.	Ivan Ströhner	3 V.B.Ned. Prievidza	0	6	4	0	6	0	16
	Peter Hasa	4 Gröss. Bratislava	7	0	0	5	0	4	16

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet
31.-32.	Juraj Majerský	3 J.G.Taj. B.Bystrica	1	1	5	0	1	7	15
	Krisztián Sági	3 Komárno maď.	0	1	7	0	3	4	15
33.-34.	Juraj Gottweis	3 Gröss. Bratislava	0	2	7	1	1	3	14
	Marek Švirloch	3 Gröss. Bratislava	0	0	3	7	1	3	14
35.-36.	Peter Satury	4 Gröss. Bratislava	2	0	4	0	0	4	10
	Radovan Jendrál	4 Poštová Košice	0	2	6	0	1	1	10
37.-38.	Martin Minich	4 Gröss. Bratislava	0	0	7	0	1	1	9
	Miklós Mácza	4 Komárno maď.	0	0	7	-	-	2	9
39.	Martin Vojtek	3 Párovská Nitra	0	0	7	0	1	0	8
40.	Štefan Sivák	3 J.G.Taj. B.Bystrica	2	0	1	1	0	0	4

Prvých 10 súťažiacich bolo vyhlásených za víťazov a prvých 20 súťažiacich za úspešných riešiteľov celoštátneho kola MO kategórie A. Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

počet bodov	spolu	číslo úlohy					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	84	22	15	21	6	6	14
6 bodov	14	0	3	8	1	2	0
5 bodov	7	0	2	1	2	1	1
4 body	11	0	1	3	0	0	7
3 body	9	0	1	3	1	1	3
2 body	15	2	3	2	2	3	3
1 bod	46	1	3	1	13	20	8
0 bodov	54	15	12	1	15	7	4
Spolu	240	40	40	40	40	40	40

Výsledky celoštátneho kola 44. ročníka MO kategórie P

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	Súčet
1.	Miroslav Dudík	2 Trebišov	7	10	10	8	8	43
2.	Martin Pál	4 Novohradská, Bratislava	9	8	9	10	4	40
3.	Ján Svoreň	2 D.Tatarku, Poprad	2	9	10	10	6	37
4.	Peter Lalík	4 Novohradská, Bratislava	8	8	6	4	8	34
5.	Dušan Bezák	3 Grösslingová, Bratislava	2	9	7	10	5	33
6.	Martin Hajduch	2 Považská Bystrica	3	4	10	10	4	31
7.	Martin Makúch	4 Novohradská, Bratislava	2	9	10	8	0	29
8.	Peter Macák	4 Novohradská, Bratislava	5	8	6	8	0	27
9.	Martin Irman	3 Grösslingová, Bratislava	5	8	5	5	0	23
10.	Martin Domány	4 P.Horova, Michalovce	5	5	6	6	0	22
11.–12.	Vladimír Marko	2 Novohradská, Bratislava	4	6	10	1	0	21
	Peter Gašpar	4 Bardejov	3	7	9	1	1	21
13.–14.	Boris Krupa	3 Grösslingová, Bratislva	1	8	10	0	0	19
	Eugen Mlynkovič	3 Nové Zámky	0	7	7	4	1	19
15.–16.	Peter Kolenič	3 Konštantínova, Prešov	2	8	8	0	0	18
	Patrik Horník	4 Grösslingová, Bratislava	2	8	5	0	3	18
17.	Zuzana Rjašková	2 Vranov nad Topľov	4	3	10	0	0	17
18.	Peter Helcmanovský	3 Poštová, Košice	1	6	9	0	0	16
19.	Peter Hrонček	3 Novohradská, Bratislava	1	6	8	0	0	15
20.	Jozef Hatala	4 Metodova, Bratislava	1	9	4	0	0	14
21.	František Čajko	4 Jána Hollého, Trnava	3	6	4	0	0	13
22.	Ján Jamrich	1 Novohradská, Bratislava	2	6	3	0	0	11
23.–24.	Ján Košický	4 Trstená	3	0	4	0	0	7
	Peter Dirga	4 Konštantínova, Prešov	2	1	4	0	0	7
25.	Michal Svoboda	1 Novohradská, Bratislava	0	2	4	0	0	6

Prvých 6 súťažiacich bolo vyhlásených za víťazov a prvých 12 súťažiacich za úspešných riešiteľov celoštátneho kola MO kategórie P.

Najúspešnejší riešitelia II.kola MO v kategóriách A, B, C, Z8, P

Z každej oblasti a z každej z kategórií A, B, C a P sú uvedení všetci úspešní riešitelia, príp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategórii Z8 sú uvedení vždy aspoň 8 najlepší riešitelia. V kategóriach B a C ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1. ročníkov. Gymnázia zo zameraním na matematiku, študíjny odbor 01 sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnazium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnazium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Bratislavská oblasť

Kategória A

1. *Ivona Bezáková*, 4, G Grösslingová
2.-3. *Peter Macák*, 4, G Novohradská
Michal Kovár, 4, G Grösslingová
4. *Martin Pál*, 4, G Novohradská
5. *Boris Krupa*, 3, G Grösslingová
6.-7. *Peter Hasa*, 4, G Grösslingová
Patrik Horník, 4, G Grösslingová
8.-9. *Vladimír Marko*, 2, G Novohradská
Martin Minich, 4, G Grösslingová
10.-12. *Martin Plesch*, 3, G Novohradská
Ján Lipka, 3, G Grösslingová
Daniel Pártoš, 3, G Grösslingová

Kategória B

1.-2. *Marián Ivančo*, G Grösslingová
Vladimír Marko, G Novohradská

3. *Ladislav Kovár*, G Grösslingová
4. *Jaroslav Kadubec*, G Grösslingová

5.-7. *Lucia Discantiny*, G Grösslingová
Andrea Mesiarová, G Grösslingová
Martin Pekár, G Grösslingová

8. *Ivan Klimo*, G Novohradská

9.-11. *Michal Bajcsy*, G Grösslingová
Viktor Požgay, G Novohradská
Martin Vašíček, G Novohradská

Kategória C

1. *Zuzana Slosarčíková*, 8, G Grösslingová
2. *Ján Kováčik*, G Grösslingová
3. *Vladimír Zajac*, 7, G Grösslingová
4. *Matúš Kalaš*, G Grösslingová
5. *Barbora Volovárová*, G Grösslingová

6.-9. *Pavol Černý*, G Novohradská
Jana Fraasová, G Novohradská
Dávid Jablonovský, G Novohradská
Miroslav Vlaček, G Grösslingová

10.-13 *Michal Krajčovič*, G Novohradská
Lenka Litváková, G Novohradská
Bohuslav Straka, G Grösslingová
Peter Šefčík, G Grösslingová

Kategória Z8

1.-2. *Juraj Olejník*, ZŠ Košická
Martin Žovic, G Grösslingová

3.-4. *Kristína Černeková*, G Grösslingová
Richard Kraľovič, ZŠ Karloveská

5. *Vladimír Zajac*, 7, G Grösslingová
6. *Elena Szolgayová*, G Grösslingová

7.-8. *Jakub Šalamon*, ZŠ Ostredková
Maroš Krivý, G Grösslingová

Kategória P

1. *Peter Macák*, 4, G Novohradská
2. *Martin Makúch*, 4, G Novohradská
3. *Dušan Bezák*, 3, G Grösslingová

4.-5. *Patrik Horník*, 4, G Grösslingová
Vladimír Marko, 2, G Grösslingová

7.-8. *Martin Plesch*, 3, G Novohradská
Ján Jamrich, 1, G Novohradská

9. *Jozef Hatala*, 4, G Metodova

10.-13. *Michal Svoboda*, 1, G Novohradská
Martin Pál, 4, G Novohradská
Boris Krupa, 3, G Grösslingová
Peter Lalík, 4, G Novohradská

Západoslovenská oblasť

Kategória A

1. *Tamás Varga*, 3, G maď. Komárno

2.-5. *Ladislav Szabó*, 4, G maď. Šamorín
Miklós Mácza, 4, G maď. Komárno
Marek Ondík, 3, G Levice
Martin Vojtek, 3, G Párovská, Nitra

6.-8. *Krisztián Sági*, 3, G maď. Komárno
Zsolt Illés, 4, G maď. Komárno
Gabriela Mišunová, 4, G Párovská, Nitra

Kategória B

1.-2. *Mariana Remešíková*, G Piešťany
István Szabó, G maď. Komárno

3. *Peter Vallo*, G Skalica

4.-6. *Blanka Bögiová*, G maď. Galanta
Zuzana Kalmárová, Obch. akadémia Veľký Meder
Ladislav Majthényi, G maď. Dunajská Streda

7.-9. *Alexandra Gronská*, G Skalica
Tomáš Jalsovszky, SPŠ Komárno
Ľubomír Schmidt, G Levice

Kategória C

1\. *Andrej Zajíček*, G Párovská, Nitra

2.-4. *Róbert Lenčéš*, G Párovská, Nitra
Ján Somorčík, G Párovská, Nitra
Michal Ulický, G Hviezdoslavova, Trnava

5\. *Ján Matuška*, G Párovská, Nitra

6\. *Ignác Esztergályos*, G maď. Komárno

7.-10. *Ján Kořenek*, G Párovská, Nitra
Mónika Kürthyová, G maď. Komárno
Miroslav Švec, G Komárno
Katarína Tiererová, G Partizánske

Kategória P

1.-2. *František Čajko*, 4, G Jána Hollého, Trnava
Pavol Žibrita, 2, G Golianova, Nitra

3\. *Eugen Mlynkovič*, 3, G Nové Zámky

4\. *Viktor Krajčí*, 4, G Hviezdoslavova, Trnava

5\. *Peter Novák*, 2, G Golianova, Nitra

6\. *Roland Bott*, 1, G maď. Dunajská Streda

7\. *Filip Denker*, 3, G Golianova, Nitra

8.-9. *Gabriel Boťanský*, 3, G Nové Zámky
Marián Gallo, 3, G Jána Hollého, Trnava

Kategória Z8

1.-3. *Balázs Keszegh*, 7, G maď. Komárno
Róbert Kutrucz, ZŠ Nábrežná, Nové Zámky
Miroslav Vranka, ZŠ Komenského, Sereď

4\. *Miloš Mrva*, ZŠ Vančurova, Trnava

5.-9. *Attila Kment*, ZŠ maď. Jahodná
András Korpás, ZŠ maď. Strekov
Martina Miššíková, ZŠ Obuvnícka, Partizánske
Simona Sedláková, ZŠ Sídl. Váh, Šaľa
Martin Sliva, ZŠ Novomestkého, Trenčín

Stredoslovenská oblasť

Kategória A

1. *Ivan Cimrák*, 3, G V.Okružná, Žilina
2. *Štefan Godiš*, 3, G V.Okružná, Žilina
3. *Marek Škereň*, 4, G V.Okružná, Žilina
4. *Juraj Majerský*, 3, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

5.-6. *Michal Hlaváč*, 4, G V.P.Tótha, Martin
Ivan Ströhner, 3, G V.B.Nedožerského, Prievidza

7. *Stacho Mudrák*, 3, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória B

1. *Peter Kozák*, 8, ZŠ Zaymusa Žilina
2. *Marek Hyčko*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3. *Ivan Luknár*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

4.-5. *Hana Konečná*, G V.Okružná, Žilina
Michal Zorkovský, G V.Okružná, Žilina

6. *Ondrej Vacek*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
7. *Róbert Macho*, G V.B.Nedožerského, Prievidza
8. *Peter Hariš*, G Púchov
9. *Juraj Húska*, G Liptovský Mikuláš

Kategória C

1. *Pavol Novotný*, G V.Okružná, Žilina
2. *Viera Růžičková*, G V.Okružná, Žilina
3. *Štefan Gašpar*, G Púchov
4. *Vratko Polák*, G Vrútky
5. *Marek Havel*, G Sučany
6. *Peter Lysý*, G V.B.Nedožerského, Prievidza

7.-10. *Stanislav Jurčík*, G V.Okružná, Žilina
Matej Lučenič, G V.Okružná, Žilina
Michal Stratilík, G Dubnica nad Váhom
Peter Varša, G V.Okružná, Žilina

Kategória P

1. *Ján Košický*, 4, G Trstená
2. *Martin Hajduch*, 2, G Považská Bystrica
3. *Rudolf Beták*, 4, G V.B.Nedožerského, Prievidza
4. *Stanislav Funiak*, 2, G Sučany
5. *Róbert Macho*, 2, G V.B.Nedožerského, Prievidza

Kategória Z8

1.-3. *Peter Kozák*, ZŠ Zaymusa, Žilina
Peter Novotný, ZŠ Hliny, Žilina
Martin Staňo, ZŠ Radvaň, Banská Bystrica
4. *Jozef Škorupa*, ZŠ Čsl. brigády, Liptovský Mikuláš
5.-8. *Pavlína Lauková*, ZŠ Haličská, Lúčenec
Michal Lepej, ZŠ Vrútky
Ľuboš Petian, ZŠ Haličská, Lúčenec
Lenka Suchárová, ZŠ Považská Bystrica

Východoslovenská oblasť

Kategória A

1. *Ján Bábeľa*, 4, G Poštová, Košice
2.-3. *Dalibor Blažek*, 4, G Poštová, Košice
Ivana Brudňáková, 4, G Konštantínova, Prešov
4. *Radovan Jendrál*, 4, G Poštová, Košice
5. *Martin Domány*, 4, G P.Horova, Michalovce
6. *Slavka Jendrejová*, 4, G Poštová, Košice

Kategória B

1. *Miroslav Dudík*, G Trebišov
2. *Ján Rusz*, G Trebišovská, Košice
3. *Jana Fuseková*, G D.Tatarku, Poprad
4. *Rastislav Krivoš-Belluš*, G Poštová, Košice

5. *Slavomír Ondko*, G Jiráskova, Bardejov
6. *Ján Svoreň*, G D.Tatarku, Poprad
7. *Zuzana Rjašková*, G Vranov nad Topľov
8. *Martin Jurčák*, G Popradské nábr., Poprad

Kategória C

1. *František Kardoš*, G Alejova, Košice
2. *Peter Tajat*, G Popradské nábr.
3. *Ján Špakula*, G Poštová, Košice
4. *Matúš Medo*, G Poštová, Košice

5.-6. *Daniel Nagaj*, G Jiráskova, Bardejov
Michal Kolcun, G Alejova, Košice
7.-9. *Martin Guzi*, G Konštantínova, Prešov
Marián Klein, G Poštová, Košice
Martin Tamas, G Jiráskova, Bardejov
10. *Peter Chobot*, G Alejova, Košice

Kategória Z8

1.-2. *Martin Hriňák*, G Alejova, Košice
Ján Senko, ZŠ Komenského, Revúca
3.-4. *Jozef Miškuf*, ZŠ Považská, Košice
Eduard Seman, ZŠ VI., Michalovce
5.-6. *Pavol Kovalčík*, ZŠ dr. Fischera, Kežmarok
Vladimír Mihok, ZŠ Bardejov
7.-8. *Peter Gajdoš*, ZŠ Šmeralova, Prešov
Katarína Korkobcová, ZŠ Hviezdoslavova, Snina

Kategória P

1. *Peter Gašpar*, 4, G Jiráskova, Bardejov
2. *Ján Svoreň*, 2, G D.Tatarku, Poprad

3.-4. *Peter Helcmanovský*, 3, G Poštová, Košice
Peter Koleničč, 3, G Konštantínova, Prešov
5.-8. *Peter Dirga*, 4, G Konštantínova, Prešov
Martin Domány, 4, G P.Horova, Michalovce
Miroslav Dudík, 2, G Trebišov
Zuzana Rjašková, 2, G Vranov nad Topľov
9.-10. *Ivana Brudňáková*, 4, G Konštantínova, Prešov
Rastislav Krivoš-Belluš, 2, G Poštová, Košice

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Určte všetky štvormiestne čísla deliteľné 4, pre ktoré platí: Ak v čísle vymeníme prvné dve číslice, dostaneme číslo deliteľné 7. Ak v čísle vymeníme prostredné dve číslice, dostaneme číslo deliteľné 5. Ak v čísle vymeníme posledné dve číslice, dostaneme číslo deliteľné 9.

(P. Černek)

C – I – 2

Daná je polokružnica so stredom S zostrojená nad priemerom AB. Zostrojte takú jej dotyčnicu t s dotykovým bodom T ($A \neq T \neq B$), aby platilo $P_{BCS} = 2P_{DAT}$, kde P_{XYZ} označuje obsah trojuholníka XYZ a kde body D, C sú po rade päty kolmíc spustených z bodov A, B na priamku t.

(J. Švrček)

C – I – 3

Každý bod obvodu štvorca so stranou 10 cm je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že pri ľubovoľnom ofarbení môžeme na obvode štvorca vždy nájsť body rovnakej farby tak, aby trojuholník s týmito vrcholmi mal obsah aspoň $25\,\mathrm{cm}^2$.

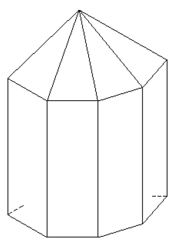
(M. Čadek)

C – I – 4

Je daný štvorsten $ABCD$ taký, že $|AC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 8\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 5\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ a $|AD| = 5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Určte veľkosť výšky prechádzajúcej vrcholom D, ak jeho stena ABC je pravouhlý trojuholník s preponou AB a hrana BD zviera so svojím kolmým priemetom do roviny ABC uhol veľkosti 45°.

(P. Leischner)

C – I – 5



Obr. 1

Mnohosten nakreslený na obr. 1 má $2n + 1$ vrcholov. Každému z nich je priradené prirodzené číslo tak, že súčty čísel vo vrcholoch každej z $2n + 1$ stien sú rovnaké. Určte n, ak viete, že medzi použitými číslami sú 7, 8, 9, 216.

(P. Černek)

C – I – 6

V rovine je narysovaný trujuholník ABC. Popíšte postup, ako sa pomocou kružidla na čo najmenej krokov presvedčit o tom, že $|\sphericalangle BAC| = 40°$ a $|\sphericalangle ABC| = 56°$.

Pritom za krok považujeme každé zapichnutie alebo priloženie kružidla. Napríklad na narysovanie kružnice alebo oblúku stačí jeden krok, na porovnanie dĺžok dvoch úsečiek so spoločným krajným bodom stačí rovnako jeden krok, zatiaľ čo na porovnanie dĺžok dvoch úsečiek bez spoločného krajného bodu sú potrebné dva kroky.

(J. Šimša)

C – S – 1

Určte všetky trojice celých nezáporných čísel a, b, c, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned} a + bc &= 3c, \\ b + ca &= 3a, \\ c + ab &= 3b. \end{aligned}$$

(J. Švrček)

C – S – 2

V rovine je daný štvorec $ABCD$ so stredom S. Vo vnútri úsečiek SA a SC sú zvolené po rade body E a F tak, že $|SE| = |SF|$. Zostrojme priesečník X polpriamky BE so stranou AD a priesečník Y polpriamky DF s predĺžením strany AB. Dokážte, že obsah trojuholníka AXY nezávisí od polohy bodov E a F.

(J. Šimša)

C – S – 3

V rovine sú dané dve úsečky, ktoré sa navzájom nepretínajú. Navrhnite postup, ako zistiť, či sú rovnobežné. K dispozícii máte len kružidlo, ktorého maximálny polomer je menší ako vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov, z ktorých každý patrí inej z oboch úsečiek.

(P. Hliněný)

C – II – 1

Určte počet všetkých štvormiestnych čísel n s vlastnosťou: Ak k číslu n pripočítame štvormiestne číslo n', ktoré má v desiatkovej sústave opačné poradie číslic ako číslo n, dostaneme číslo, ktoré je deliteľné 70.

(J. Švrček)

C – II – 2

Určte všetky reálne čísla a, pre ktoré má sústava rovníc

$$x^2 - 2y = y^2 - 2x = a$$

jediné riešenie. (Riešením rozumieme usporiadanú dvojicu $[x, y]$ reálnych čísel vyhovujúcu sústave rovníc.)

(L. Boček)

C – II – 3

V rovine je daný rovnostranný trojuholník ABC a priamky p_A, p_B, ktoré sú kolmé na AB a prechádzajú po rade bodmi A, B. Zostrojte pravouhlý trojuholník KLC s preponou KL, ktorý má rovnaký obsah ako trojuholník ABC, a pritom jeho vrcholy K, L ležia po rade na priamkach p_A, p_B.

(J. Švrček)

C – II – 4

Každému bodu jednotkovej kocky je priradená jedna zo štyroch farieb. Dokážte, že pri ľubovoľnom takomto ofarbení existujú v kocke dva body rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je aspoň $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

(M. Čadek)

Kategória B

B – I – 1

Určte všetky dvojice reálnych čísel p, q takých, že rovnici

$$x^4 + q^2(x + p) = p^2(x + q)^2$$

vyhovujú práve tri rôzne reálne čísla, pričom súčet týchto troch čísel je rovný nule.

(J. Šimša)

B – I – 2

Každému bodu štvorca so stranou 1 je priradená práve jedna z troch farieb. Dokážte, že pri ľubovoľnom takomto ofarbení môžeme vo štvorci nájsť dva body rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je aspoň 1,007.

(M. Čadek)

B – I – 3

Pre dané kladné čísla $x \neq y$ uvažujme priemery

$$a = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy},\ h = \frac{2xy}{x+y},\ k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Zo všetkých rozdelení štvorice a, g, h, k na dve dvojice r, s a t, u vyberte to rozdelenie, pre ktoré má výraz $V = rs - tu$ najmenšiu kladnú hodnotu.

(J. Šimša)

B – I – 4

V rovine sú dané priamky a, b zvierajúce uhol veľkosti $28°$. Určte všetky n, pre ktoré existuje konvexný n-uholník súmerný ako podľa priamky a, tak podľa priamky b.

(P. Černek)

B – I – 5

Nájdite obor hodnôt funkcie

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 3x - 10}.$$

(P. Černek)

B – I – 6

Uvažujme trojboký ihlan $ABCD$ s hranami $|AC| = |AD| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 4\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 2\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$, ktorého podstavou je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Určte výšku ihlanu, ak hrana BD zviera so svojím kolmým priemetom do roviny podstavy uhol veľkosti $45°$.

(R. Kollár)

B – S – 1

Rovnica

$$2x^3 - 9x^2 + 7x + m = 0$$

má tri rôzne reálne korene. Súčin dvoch z nich je rovný -1. Určte číslo m a korene rovnice.

(P.Černek, P.Leischner)

B – S – 2

V trojuholníku ABC označme M stred strany AB a S stred úsečky CM. Vo vnútri úsečky MS volíme postupne na rôznych miestach bod O a zisťujeme obvod prieniku trojuholníka ABC s jeho obrazom v stredovej súmernosti so stredom O. Aký musí platiť vzťah medzi dĺžkami strán trojuholníka ABC, aby tento obvod nezávisel od voľby bodu O?

(P. Leischner)

B – S – 3

V rovine je daných n bodov. Ak ich navzájom pospájame priamkami, prechádzajú tieto priamky danými bodmi a vytvárajú aj ďalšie priesečníky. Dokážte, že počet týchto nových priesečníkov nie je väčší ako

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

(P. Hliněný)

B – II – 1

Určte všetky reálne čísla a, pre ktoré existuje práve jedna usporiadaná dvojica $[x, y]$ reálnych čísel takých, že

$$x + \frac{1}{y} - \frac{y}{x} = y + \frac{1}{x} - \frac{x}{y} = a$$

(P.Černek)

B – II – 2

Pre dané kladné čísla $x \neq y$ označme

$$a = \frac{1}{2}(x + y), \quad g = \sqrt{xy}, \quad k = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}.$$

Rozhodnite, pri ktorom zo šiestich možných poradí r, s, t čísel a, g, k má výraz $V = \frac{r-s}{t}$ najmenšiu kladnú hodnotu.

(J. Šimša)

B – II – 3

Každému bodu jednotkovej kocky priradíme jednu z dvoch farieb. Dokážte, že pri ľubovoľnom takomto ofarbení existujú v kocke dva body rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je aspoň $d = \frac{3}{2}$. Platí toto tvrdenie aj pre niektoré $d > \frac{3}{2}$?

(M. Čadek)

B – II – 4

Uhlopriečky daného tetivového štvoruholníka $ABCD$ sú navzájom kolmé a pretínajú sa v bode E. Označme M priesečník kolmice z bodu E na stranu AB s protiľahlou stranou CD. Porovnajte obsahy trojuholníkov CME a MDE. *(P. Leischner)*

Kategória A

A – I – 1

Pre dané kladné čísla $x \neq y$ uvažujme priemery

$$a = \frac{x + y}{2}, \ g = \sqrt{xy}, \ h = \frac{2xy}{x + y}, \ k = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

(Ide o aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický priemer čísel x a y.) Zo všetkých rozdelení štvorice a, g, h, k na dve dvojice r, s a t, u vyberte to rozdelenie, pri ktorom má výraz $V = r + s - t - u$ najmenšiu kladnú hodnotu.

(J. Šimša)

A – I – 2

V priestore je daná kocka $ABCDEFGH$. Uvažujme ľubovoľnú rovinu, ktorá prechádza bodom B a dotýka se gule vpísanej danej kocke, a označme P, Q jej priesečníky s hranami EF, GF. Dokážte, že odchýlka rovín BPH a BQH je $60°$.

(P. Leischner)

A – I – 3

Zistite, pre ktoré b je obor hodnôt funkcie $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + bx$ interval $\langle b, \infty)$.

(P. Černek)

A – I – 4

V rovine sú dané kružnice $k_1(S_1, 3\,\mathrm{cm})$ a $k_2(S_2, 4\,\mathrm{cm})$, ktoré majú vnútorný dotyk v bode A. Ďalej je daný bod S vnútri kružnice k_1. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby jeho strana BC bola tetivou kružnice k_2 a zároveň dotyčnicou kružnice k_1 , a aby bod S bol stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC.

(P. Leischner)

A – I – 5

Uvažujme trojuholník ABC s ostrými uhlami α, γ pri vrcholoch A, C a s nasledujúcou vlastnosťou: ťažnica z vrcholu A a výška z vrcholu B sa pretínajú v bode, ktorý leží na osi uhla pri vrchole C. Dokážte, že potom platí $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^2\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

(J. Šimša)

A – I – 6

Určte najväčší možný počet 1 994-ciferných prirodzených čísel, ktoré sa navzájom líšia poradím číslic.

(J. Šimša)

A – S – 1

V rovine sú dané kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, pretínajúce sa v dvoch bodoch A a B, pričom $|S_1S_2| > r_2 \geqq r_1$. Zostrojte body $X \in k_1$ a $Y \in k_2$ tak, aby bod A ležal vnútri úsečky XY a aby trojuholník BXY mal čo najväčší obsah.

(J. Šimša)

A – S – 2

Nájdite všetky funkcie f tvaru $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ s reálnymi koeficientami a, b, c a s nasledujúcou vlastnosťou: definičný obor a obor hodnôt funkcie f sú dve rovnaké neprázdne množiny. (Za definičný obor funkcie f považujeme množinu *všetkých* reálnych čísel x, pre ktoré má výraz $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ zmysel.)

(J. Šimša)

A – S – 3

Určte kladné reálne čísla $x \neq y$ také, že všetky štyri ich priemery

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

ležia v množine $M = \left\{ \frac{45}{2}, 18\sqrt{2}, 30, 25\sqrt{2}, 40, 10\sqrt{23} \right\}$.

(J. Šimša)

A – II – 1

Koľko pätnásťmiestnych čísel zložených len z číslic 3 a 8 je deliteľných jedenástimi?

(P. Černek)

A – II – 2

Daný je trojuholník ABC s uhlom veľkosti 105^o pri vrchole C. Určte veľkosti zostávajúcich dvoch vnútorných uhlov, ak viete, že ťažnica vedená z vrcholu A pretne os uhla pri vrchole B v bode, ktorý leží na osi strany AB.

(J. Šimša)

A – II – 3

Daný je štvorsten $ABCD$, pre ktorý platí

$$|AB| = 2a, \; |CD| = 2b, \; |AC| = |AD| = |BC| = |BD| = c.$$

Určte polomer guľovej plochy vpísanej štvorstenu $ABCD$.

(P. Leischner)

A – II – 4

Nájdite všetky mnohočleny f s reálnymi koeficientami také, že pre každé reálne číslo x platí nerovnosť

$$f(x) \cdot x \cdot f(1-x) + x^3 + 100 \geqq 0\,.$$

(P. Hliněný)

A – III – 1

Daný je štvorsten $ABCD$, pre ktorý platí

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle DBA| = 180°.$$

Dokážte, že $|CD| \geqq |AB|$.

(P. Leischner)

A – III – 2

Určte kladné reálne čísla x a y, ak viete, že priemery

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

sú prirodzené čísla, ktorých súčet sa rovná 66.

(J. Šimša)

A – III – 3

V rovine je daných päť rôznych bodov a päť rôznych priamok. Dokážte, že z nich možno vybrať dva rôzne body a dve rôzne priamky tak, aby žiadny z vybraných bodov neležal na žiadnej z vybraných priamok.

(P. Hliněný)

A – III – 4

Rozhodnite, či existuje 10 000 desaťmiestnych čísel deliteľných siedmimi, ktoré sú zapísané rovnakou skupinou desiatich číslic v rôznych poradiach.

(J. Šimša)

A – III – 5

Na kružnici k so stredom S sú dané body A a B tak, že tetivu AB je z bodu S vidieť pod uhlom 90°. Kružnice k_1, k_2 sa dotýkajú zvnútra kružnice k po rade v bodoch A, B a naviac sa navzájom zvonku dotýkajú v bode Z. Kružnica k_3 ležiaca vnútri uhla ASB sa dotýka (zvnútra) kružnice k v bode C a (zvonku) kružníc k_1, k_2 po rade v bodoch X, Y. Dokážte, že úsečku XY je z bodu C vidieť pod uhlom 45°.

(M. Engliš)

A – III – 6

Pre ktoré reálne čísla p má rovnica $x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x - 3p^3 = 0$ tri rôzne korene, ktoré sú dĺžkami strán nejakého pravouhlého trojuholníka?

(J. Šimša)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Nech $n = \overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ označuje hľadané číslo, a, b, c, d jeho číslice v desiatkovej sústave ($a \neq 0$). Podľa textu úlohy je číslo $m = \overline{bacd}$ deliteľné vzájomne nesúdeliteľnými číslami 4, 5, 7 a 9. Je teda

$$m = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot k = 1\,260\,k,$$

kde k je prirodzené číslo. Ak je m štvormiestnym číslom, je nutne $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$. Jednotlivým hodnotám čísla k prislúchajú nasledujúce hodnoty m:

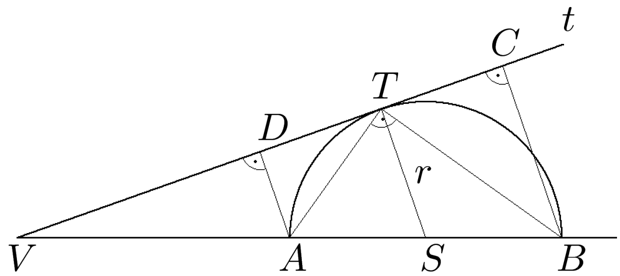
$$m \in \{1\,260, 2\,520, 3\,780, 5\,040, 6\,300, 7\,560, 8\,820\}.$$

Zámenou číslic b, a ($a \neq 0$) zistíme, že hľadané číslo n nadobúda práve šesť hodnôt:

$$n \in \{2\,160, 3\,600, 5\,220, 5\,760, 7\,380, 8\,820\}.$$

C – I – 2

Označme V priesečník hľadanej dotyčnice t s priamkou AB (obr. 2).



Obr. 2

Z obrázku je zrejmé, že ST je strednou priečkou v pravouhlom lichobežníku $ABCD$. Je teda $|CT| = |DT|$, a preto trojuholníky BCS a DAT majú zhodné výšky na strany BC a AD. Z podmienky pre obsahy trojuholníkov BCS a DAT tak dostávame, že $|AD| = \frac{1}{2}|BC|$. Pretože pravouhlé trojuholníky VAD a VBC sú podobné (rovnoľahlé), vyplýva odtiaľ

$$|VA| : |VB| = 1 : 2.$$

Preto bod V môžeme zostrojiť ako bod stredovo súmerný s bodom B podľa stredu A. Odtiaľ už priamo vyplýva konštrukcia bodu T, ktorý je dotykovým bodom priamky t s kruhovým oblúkom k_1, zostrojeným nad priemerom AB: bod T je priesečníkom

Thalesovej kružnice k_2 zostrojenej nad priemerom VS a kruhového oblúku k_1. Úloha má jedno riešenie.

C – I – 3

Vrcholy štvorca označme A, B, C, D. Môžu nastať dva prípady:

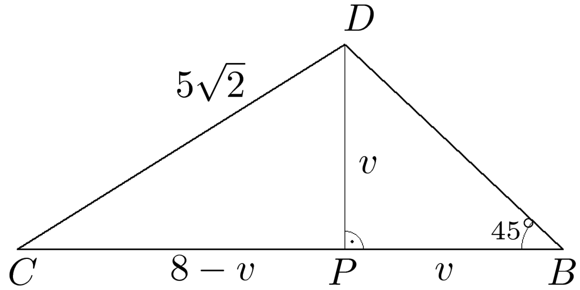
1. Dva vrcholy na jednej strane majú rovnakú farbu (napr. modrú). Nech sú to napr. vrcholy A, B. Ak existuje na strane CD štvorca bod X, ktorý je ofarbený tou istou farbou, dostávame trojuholník ABX, ktorého vrcholy sú ofarbené modrou farbou, a ktorého obsah je $50\,\mathrm{cm}^2 > 25\,\mathrm{cm}^2$. Ak majú však všetky body strany CD farbu inú (napr. červenú), uvažujme stred S strany BC. Ak je ofarbený modrou farbou, má trojuholník ABS všetky vrcholy ofarbené modrou farbou a obsah $25\,\mathrm{cm}^2$. Ak je S červený, potom trojuholník CDS má všetky vrcholy červené a pritom obsah $25\,\mathrm{cm}^2$.

2. Žiadne dva susedné vrcholy štvorca $ABCD$ nie sú ofarbené rovnakou farbou. (Napr. A, C sú modré a B, D sú červené.) Uvažujme opäť bod S, ktorý je stredom strany BC. Ak je ofarbený modrou farbou, potom trojuholník ACS má obsah $25\,\mathrm{cm}^2$, a pritom jeho vrcholy sú ofarbené modrou farbou. Ak je bod S ofarbený červenou farbou, má trojuholník BDS obsah $25\,\mathrm{cm}^2$, a pritom všetky jeho vrcholy majú červenú farbu.

Tým je dôkaz ukončený.

C – I – 4

Najprv si uvedomme, že stena ACD štvorstenu $ABCD$ je pravouhlým trojuholníkom s preponou AD. Vrchol D leží v rovine BCD kolmej na priamku AC, lebo $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Označme P pätu kolmice vedenej vrcholom D na stranu BC. V trojuholníku BCD je $|CD| = 5\sqrt{2}$, $|\sphericalangle CBD| = 45°$. Ak označíme v dĺžku úsečky BP, potom veľkosť výšky štvorstenu $ABCD$ prechádzajúcej vrcholom D je $v = |DP|$ a ďalej $|CP| = 8 - v$ (obr. 3).



Obr. 3

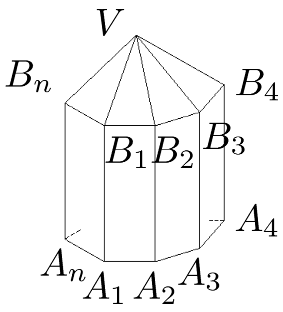
Z Pytagorovej vety pre trojuholník CDP vyplýva:

$$v^2 + (8 - v)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2,$$

odtiaľ po úprave máme

$$v^2 - 8v + 7 = (v - 1)(v - 7) = 0.$$

Skúškou sa presvedčíme, že obidva korene tejto rovnice $v_1 = 1$, $v_2 = 7$ vyhovujú podmienkam úlohy. Veľkosť výšky štvorstenu $ABCD$ prechádzajúcej vrcholom D je teda 1 cm alebo 7 cm. Tým je úloha vyriešená.



Obr. 4

C – I – 5

Označme v, a_i, b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) prirodzené čísla priradené vrcholom V, A_i, B_i daného mnohostenu (obr. 4). Z podmienok úlohy vyplýva:

$$v = a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = \cdots = a_n + a_1.$$

Odtiaľ dostávame

$$a_1 = a_3,\ a_2 = a_4,\ a_3 = a_5,\ \ldots, a_{n-1} = a_1,\ a_n = a_2. \tag{1}$$

Rovnako všeobecne platí

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= a_3 + b_3,\\ a_2 + b_2 &= a_4 + b_4,\\ &\ldots\ldots,\\ a_{n-1} + b_{n-1} &= a_1 + b_1,\\ a_n + b_n &= a_2 + b_2. \end{aligned}$$

Odtiaľ a zo vzťahu (1) ďalej vyplýva, že

$$b_1 = b_3,\ b_2 = b_4,\ b_3 = b_5,\ \ldots,\ b_{n-1} = b_1,\ b_n = b_2. \tag{2}$$

Vzhľadom k rovnostiam (1) a (2) je prirodzené diskutovať dva prípady:
1. Nech n je nepárne. Potom

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n, \qquad b_1 = b_2 = \cdots = b_n.$$

Tu sú použité k očíslovaniu vrcholov najviac tri rôzne čísla, čo je spor.
2. Nech n je párne. Potom

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = \cdots = a_{n-1}, &\qquad b_1 &= b_3 = \cdots = b_{n-1},\\ a_2 &= a_4 = \cdots = a_n, & b_2 &= b_4 = \cdots = b_n. \end{aligned}$$

V tomto prípade je použitých práve 5 čísel k očíslovaniu vrcholov, lebo rovnica

$$a_1 + a_2 = v$$

nemá riešenie pre $a_1, a_2, v \in \{7, 8, 9, 216\}$. Z podmienky pre rovnaký súčet čísel priradených vrcholom podstavy $A_1A_2\ldots A_n$ dostávame

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_2) = a_1 + a_2 + b_1 + b_2.$$

Odtiaľ po ľahkej úprave (použitím vzťahu $a_1 + a_2 = v$) dostávame

$$2v \leqq (n-2)v = 2(b_1 + b_2) \Longrightarrow v \leqq b_1 + b_2.$$

Vzhľadom k poslednej nerovnosti nemôže byť $v = 216$, pretože potom by bolo niektoré z čísel a_1, a_2 väčšie alebo rovné 207 ($a_1 + a_2 = v$) a $b_1 + b_2 \leqq 17 < v$. Z rovnakých dôvodov nemôže byť ani jedno z čísel a_1, a_2 rovné 216, lebo potom by bolo $v > 216$. Je teda napríklad $b_1 = 216$. Odpovedajúce možnosti sú uvedené v tabuľke:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
a_1	7	7	8	1	1	2
a_2	8	9	9	7	8	7
b_1	216	216	216	216	216	216
b_2	9	8	7	9	7	8
v	15	16	17	8	9	9
n	32	30	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$

Symbol $\oplus$ v tabuľke značí, že odpovedajúce n nie je prirodzené číslo. Skúškou sa presvedčíme, že riešením úlohy sú čísla $n = 30$ a $n = 32$.

C – I – 6

Uhly $\alpha = 40°$, $\beta = 56°$, $\gamma = 84°$ v uvažovanom trojuholníku vyhovujú napríklad trojici podmienok

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°, \qquad 3\alpha = 120°, \qquad 3\beta = 2\gamma,$$

alebo poslednú z podmienok možno nahradiť podmienkou

$$2\alpha + 5\beta = 360°.$$

Na overenie veľkosti uhlu $\alpha = 40°$, možno tiež použiť vzťah

$$\tfrac{3}{2}\alpha = \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha = 40° + 20° = 60°.$$

O tom, či sú jednotlivé podmienky pre veľkosti uhlov trojuholníka splnené, sa ľahko presvedčíme opakovaním konštrukcie súčtu a porovnaním veľkosti dvoch daných uhlov. Na druhej strane jednoduchý výpočet ukazuje, že vypísaná sústava troch rovníc s neznámymi α, β a γ má jediné riešenie, a to $\alpha = 40°$, $\beta = 56°$ a $\gamma = 84°$.
K tejto úlohe vyhlásila ÚK MO súťaž o riešenie s čo najmenším počtom krokov. Vyhodnotenie tejto súťaže a najlepšie riešenia sa nachádzajú za riešeniami kategórie A.

C – S – 1

Ľahko vidíme, že trojica $[a, b, c] = [0, 0, 0]$ je riešením danej sústavy; pritom pokiaľ je niektorá z hodnôt a, b, c rovná 0, sú rovné 0 aj zvyšné dve.

Predpokladajme preto, že $abc \neq 0$. Danú sústavu rovníc prevedieme na tvar

$$\begin{aligned} a &= c(3-b), \\ b &= a(3-c), \\ c &= b(3-a). \end{aligned}$$

Vzhľadom k tomu, že a, b, c sú prirodzené čísla, vyplýva z jednotlivých rovníc sústavy $(c|a) \wedge (a|b) \wedge (b|c)$, teda $a = b = c$. Dosadením tejto podmienky do ktorejkoľvek rovnice sústavy dostávame riešenie $[a, b, c] = [2, 2, 2]$.
Riešením danej sústavy sú teda trojice $[0, 0, 0]$ a $[2, 2, 2]$.

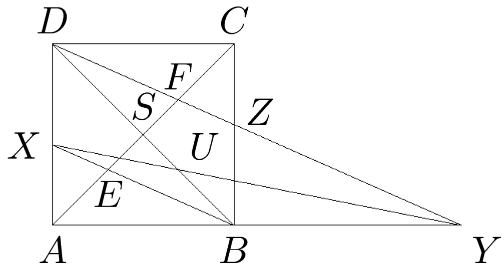
Poznámka: K riešeniu možno dospieť aj iným postupom. Zo súčinu všetkých troch rovníc upravenej sústavy dostaneme

$$(3-a)(3-b)(3-c) = 1.$$

Každý z činiteľov na ľavej strane môže nadobúdať hodnoty ± 1. Vyskúšaním všetkých štyroch možností dôjdeme k rovnakému výsledku.

C – S – 2

Označme Z priesečník úsečiek BC a DY, podobne označme U priesečník úsečiek BD a XY (obr. 5).



Obr. 5

1. spôsob riešenia: Z dvojíc podobných trojuholníkov $AYF \sim CDF$ a $AFD \sim CFZ$ vyplýva

$$\frac{|AY|}{|CD|} = \frac{|AF|}{|CF|} = \frac{|AD|}{|CZ|}.$$

Odtiaľ dostávame $|AY| \cdot |CZ| = |AD| \cdot |CD| = a^2$, kde a je dĺžka strany daného štvorca $ABCD$. Vďaka svojej konštrukcii sú body X a Z stredovo súmerné podľa stredu S, preto je $|CZ| = |AX|$, takže pre obsah trojuholníka AXY platí $\frac{1}{2}|AY|\,|AX| = \frac{1}{2}|AY|\,|CZ| = \frac{1}{2}a^2$, t. j. obsah nezávisí od voľby bodov E a F.

2. spôsob riešenia: Pretože body X a Z sú stredovo súmerné podľa stredu S, je $YDXB$ lichobežník (pozri obr. 5), pričom bod U je priesečníkom jeho uhlopriečok BD a XY. Obsah trojuholníka DXU je preto rovný obsahu trojuholníka BYU. Vzhľadom k tomu, že obsah trojuholníka AXY je súčtom obsahov štvoruholníka $AXUB$ a trojuholníka BYU, je jeho obsah rovný obsahu trojuholníka ABD, čo je $\frac{1}{2}a^2$.

C – S – 3

Označme maximálny polomer daného kružidla R. Uvažujme kratšiu z oboch úsečiek, ktorú označme AB. Nech A_1B_1 je úsečka obsiahnutá v AB ($\overline{A_1B_1} \subset \overline{AB}$). Zostrojme nad úsečkou A_1B_1 v polrovine obsahujúcej druhú z úsečiek (CD) sieť zloženú z pravidelných šesťuholníkov so stranou dĺžky $|A_1B_1| \leqq R$. To možno len pomocou daného kružidla, bez toho aby sme menili jeho polomer. Vzhľadom k tomu, že protiľahlé strany uvažovaných šesťuholníkov sú rovnobežné, ľahko vyberieme dvojicu susedných vrcholov P a Q tejto siete, ktorá tvorí úsečku $PQ \parallel AB$, pritom pre použitie kružidla „dostatočne blízku" úsečke CD. Ďalej už ľahko overíme, či $PQ \parallel CD$, napr. tak, že zistíme, či úsečka CD obsahuje úsečku C_1D_1 ($\overline{C_1D_1} \subset \overline{CD}$), ktorá je rovnobežná s úsečkou PQ, t. j. overíme, či PQC_1D_1 je rovnobežníkom — to opäť možno len pomocou kružidla porovnaním príslušných dĺžok.

C – II – 1

Nech $n = 1\,000a+100b+10c+d$, potom $n' = 1\,000d+100c+10b+a$, kde $a, d \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Pre ich súčet máme

$$n + n' = 1\,001(a + d) + 110(b + c).$$

Pritom vidíme, že 7 delí 1 001, ale nedelí 110 a 10 delí 110, ale nedelí 1 001. Aby bol súčet $n + n'$ deliteľný sedemdesiatimi, musí byť číslo $a + d$ deliteľné desiatimi a podobne číslo $b + c$ musí byť deliteľné siedmimi. Hľadáme preto všetky usporiadané dvojice $[a, d]$ také, že $10|(a + d)$, kde $a, d \in \{1, 2, \dots, 9\}$, a všetky usporiadané dvojice $[b, c]$, pre ktoré $7|(b + c)$, kde $b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
Ľahko zistíme, že ide práve o tieto usporiadané dvojice:

$$\begin{aligned} [a, d] &= [1, 9], [2, 8], [3, 7], [4, 6], [5, 5], [6, 4], [7, 3], [8, 2], [9, 1] \text{ — 9 dvojíc,} \\ [b, c] &= [0, 0], [0, 7], [1, 6], [2, 5], [3, 4], [4, 3], [5, 2], [6, 1], [7, 0], \\ &\qquad [5, 9], [6, 8], [7, 7], [8, 6], [9, 5] \text{ — 14 dvojíc.} \end{aligned}$$

Spolu teda existuje $9 \times 14 = 126$ štvormiestnych čísel n s danou vlastnosťou.

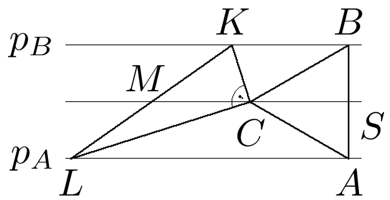
C – II – 2

Z danej sústavy po jednoduchej úprave dostaneme $(x - y)(x + y + 2) = 0$. Uvažujme ďalej dva prípady:
1. $x - y = 0$.
Dosadením tejto podmienky do jednej z rovníc sústavy dostávame $x^2 - 2x - a = 0$. Aby táto kvadratická rovnica mala práve jeden reálny koreň, musí pre jej diskriminant $D_1 = 4 + 4a$ platiť $D_1 = 0$, teda $a = -1$. Riešme teraz sústavu $x^2 - 2y = y^2 - 2x = -1$. Po dosadení $y = x$ do sústavy rovníc (i) dostaneme kvadratickú rovnicu $x^2 - 2x + 1 = 0$, ktorá má práve jeden reálny koreň $x = 1$. Tomu zodpovedá jediné reálne riešenie danej sústavy pre $a = -1$, a to $[x, y] = [1, 1]$.
2. $x + y + 2 = 0$.

Dosadením tejto podmienky do jednej z rovníc sústavy dostávame kvadratickú rovnicu $x^2 + 2x + (4 - a) = 0$ s diskriminantom $D_2 = 4 - 4(4 - a) = 4a - 12$, takže podobne ako v prvom prípade z podmienky $D_2 = 0$ dostaneme $a = 3$. Riešme teraz sústavu rovníc $x^2 - 2y = y^2 - 2x = 3$. Táto sústava má však už pre $x = y$ hneď dve rôzne riešenia: $[-1, -1]$ a $[3, 3]$. Preto $a = 3$ zadanej úlohe nevyhovuje.
Jediným reálnym číslom vyhovujúcim úlohe je $a = -1$.

C – II – 3

Označme S stred strany AB daného rovnostranného trojuholníka (obr. 6). Ukážeme, že pre stred M prepony KL hľadaného pravouhlého trojuholníka KLC platí $|CM| = |CS|$. Pretože ťažnica delí trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom, rovnajú sa obsahy trojuholníkov ABC a KLC, práve keď sa rovnajú obsahy trojuholníkov BCS a CKM. Pretože obidva trojuholníky majú rovnakú výšku, musí byť $|CM| = |CS|$. Bod M je teda totožný buď s bodom S, alebo s bodom S', ktorý je stredovo súmerný s bodom S podľa stredu C.



Obr. 6

V prvom prípade nájdeme body K resp. L ako priesečníky (Thalesovej) kružnice $k(S; |SC|)$ s priamkami p_A resp. p_B. V druhom prípade sú body K resp. L priesečníky kružnice $k'(S'; |S'C|)$ s priamkami p_A resp. p_B.
Pretože $|SC| = |S'C| > |SA|$, má úloha vždy štyri riešenia.

C – II – 4

Označme P, Q, R po rade stredy hrán CD, BF, EH danej jednotkovej kocky $ABCDEFGH$ a uvažujme body A, G, P, Q, R. Vzdialenosť každých dvoch z uvažovaných piatich bodov je aspoň $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, lebo platí:

$$|AP| = |AQ| = |AR| = |GP| = |GQ| = |GR| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5},$$
$$|PQ| = |QR| = |RP| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2}\sqrt{5},$$
$$|AG| = \sqrt{3} > \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Vzhľadom na to, že každý bod z množiny $\{A, G, P, Q, R\}$ je ofarbený jednou zo štyroch použitých farieb, existujú medzi nimi dva, ktoré majú rovnakú farbu, a pritom ich vzdialenosť je, ako sme ukázali, aspoň $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

B – I – 1

Spomínané korene a, b, c sú koreňmi polynómu

$$F(x) = x^4 - p^2x^2 + q(q-2p^2)x + pq^2(1-p). \tag{1}$$

Preto má F rozklad $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)G(x)$, kde G je polynóm prvého stupňa s koeficientom 1 pri mocnine x^1, tj. $G(x) = x + d$. Číslo $-d$ je ale reálny koreň polynómu F, rovná sa teda jednému z čísel a, b, c, napr. a. To znamená, že $F(x) = (x-a)^2(x-b)(x-c)$. Výraz roznásobíme a porovnáme s koeficientami pri odpovedajúcich mocninách v (1). Pre mocninu x^3 máme $2a+b+c=0$ a podľa zadania $a+b+c=0$, takže spolu $a=0$ a $c=-b$. Vzťahy pri zostávajúcich mocninách x potom dostávajú tvar

$$p^2 = b^2, \quad q(q-2p^2) = 0, \quad pq^2(1-p) = 0.$$

Odtiaľ vidíme, že $p \neq 0$ (pretože $b \neq a = 0$). V prípade $q = 0$ je také p ľubovoľné, v prípade $q \neq 0$ vychádza $p = 1$ a $q = 2$.
Hľadanými dvojicami $[p,q]$ sú všetky dvojice tvaru $[p,0]$, kde $p \neq 0$, spolu s dvojicou $[1,2]$.

B – I – 2

Nech $ABCD$ je daný štvorec, K, L sú body úsečky BC, pre ktoré platí $|BK| = |CL| = \frac{1}{8}$ a M, N sú obrazy bodov K, L v súmernosti podľa stredu štvorca. Platí:

$$|AL| = |CN| > |DL| = |BN| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{8}\sqrt{65} > 1{,}007.$$

Predpokladajme, že pri nejakom ofarbení tvrdenie neplatí. Ukážme najprv, že niektoré tri vrcholy majú rôznu farbu. Keby nemali, museli by byť dva susedné vrcholy (napríklad A, B) označené farbou I a zostávajúce vrcholy (C, D) farbou II. Body L, N by potom museli mať farbu III, a to je spor, lebo $|LN| = \sqrt{1 + (\frac{6}{8})^2} = \frac{5}{4} > 1{,}007$.
Nech teda bez ujmy na všeobecnosti majú body A, B farbu I, C farbu II a D farbu III (body tej istej farby nemôžu ležať na uhlopriečke štvorca). Potom bod K nemôže mať farbu III ani I (lebo $|AK| = \sqrt{\frac{65}{8}} > 1{,}007$. Má teda farbu II a analogicky N má farbu III. Potom ale stred J strany CD nemôže mať farbu I, ani žiadnu z farieb II, III (platí totiž $|JK| = |JN| = \frac{1}{8}\sqrt{65} > 1{,}007$). To je spor s predpokladom, že každý bod je ofarbený; tvrdenie úlohy je tým dokázané.

B – I – 3

Ide o známe priemery, ktoré (pri $x \neq y$) spĺňajú nerovnosti

$$0 < h < g < a < k \tag{2}$$

(pozri ŠMM 39). Výraz V nadobúda hodnoty

$$V_1 = ka - hg,\ V_2 = kg - ah,\ V_3 = ag - kh \ \text{ a } \ -V_1,\ -V_2,\ -V_3.$$

Ak dokážeme, že

$$V_1 > V_2 > V_3 > 0, \tag{3}$$

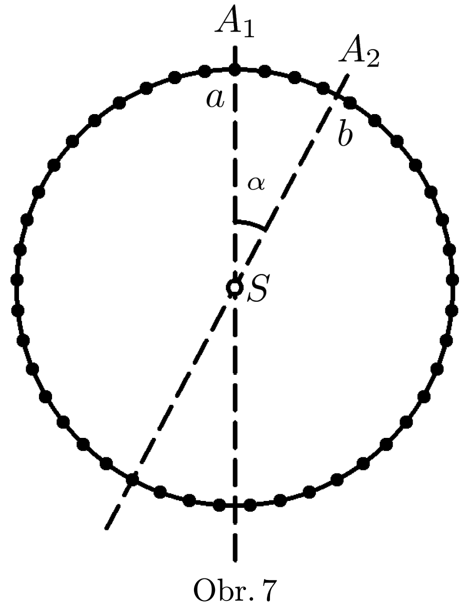
bude to znamenať, že V_3 je najmenšia kladná hodnota výrazu V , a že rovnosť $V = 0$ nie je možná. Dve ľavé nerovnosti v (3) plynú okamžite z (2), lebo $V_1 - V_2 = (k + h)(a - g)$ a $V_2 - V_3 = (g + h)(k - a)$. Zostáva teda dokázať, že $V > 0$, alebo $ag > kh$. Dôkaz je výhodné previesť sporom: Nech existujú také rôzne $x, y \in \mathbb{R}^+$, že $ag \leqq kh$, t.j.

$$\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{2}(x + y) \leqq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \cdot \frac{2xy}{x + y}.$$

Obidve strany tejto nerovnosti sú kladné. Po umocnení na druhú a ľahkej úprave dostaneme $(x + y)^4 \leqq 8(x^2 + y^2)xy$; odtiaľ $(x - y)^4 \leqq 0$, a to je spor.

B – I – 4

V osovej súmernosti sa vrchol n-uholníka súmerného podľa danej osi zobrazí opäť na vrchol tohto n-uholníka. Uvažujme situáciu na obr. 7. Označme S priesečník týchto priamok, $\alpha = 28°$. Zložením súmerností podľa priamok a, b v danom poradí je otočenie $R = R(S, 2\alpha)$, ktoré zobrazuje vrcholy n-uholníka na seba navzájom. Nech A_1 je ľubovoľne zvolený vrchol n-uholníka, $A_2 = R(A_1)$, $A_3 = R(A_2)$, atď., až nakoniec postupným zobrazovaním dospejeme k bodu $A_k = A_1$, pritom k je najmenšie prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako 1 a spĺňa danú rovnosť bodov.



Obr. 7

Uvažovaný n-uholník má minimálne k vrcholov a platí $k \cdot 2\alpha = l \cdot 360° = N(56°, 360°) = 2\,520°$, kde symbolom N označujeme najmenší spoločný násobok. Je teda $k = 45$. Ak má n-uholník viac než k vrcholov, môžeme pre jeho vrchol $B \notin \{A_1, A_2, \ldots, A_{45}\}$ konštrukciu zopakovať. Analogicky možno postupovať pre vrchol $C \notin \{A_1, A_2, \ldots, A_{45}, B_1, B_2, \ldots, B_{45}\}$ atď. Hľadané čísla n sú teda prirodzené násobky čísla 45: $n = 45r$, kde $r \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Je však ešte potrebné dokázať, že n-uholníky požadovaných vlastností pre jednotlivé n existujú. Obr. 7 znázorňuje situáciu pre $r = 1$, tj. pre $n = 45$. Pre $r = 2$ pridáme ďalšie vrcholy do stredov oblúkov na obr. 7, pre $r = 3$ rozdelíme oblúky na obr. 7 ďalšími vrcholmi na tretiny atď.

B – I – 5

Z podmienky $x^2 - 3x - 10 \geqq 0$ stanovíme, pre ktoré x je funkcia definovaná; $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 5, \infty\rangle$.
Na zápis $y = x - \sqrt{x^2 - 3x - 10}$ sa teraz môžeme pozerať ako na rovnicu s neznámou x a parametrom y. Budeme zisťovať, pre ktoré hodnoty parametra y má táto rovnica riešenie. Platí $x - y = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$. Túto rovnicu umocníme na druhú a vyjadríme odtiaľ x (zrejme bude $y \neq \frac{3}{2}$):

$$x = \frac{y^2 + 10}{2y - 3}.$$

Tento výraz dosadíme za x do podmienky $x - y \geqq 0 \wedge (x \geqq 5 \vee x \leqq -2)$ a získané nerovnice upravíme na podielový tvar:

$$\frac{(y-5)(y+2)}{2y-3} \leqq 0 \quad \wedge \quad \left(\frac{(y-5)^2}{2y-3} \geqq 0 \quad \vee \quad \frac{(y+2)^2}{2y-3} \leqq 0\right)$$

Množina koreňov tejto sústavy nerovníc určuje hľadaný obor hodnôt $H(f) = (-\infty, -2\rangle \cup \left(\frac{3}{2}, 5\right\rangle$.

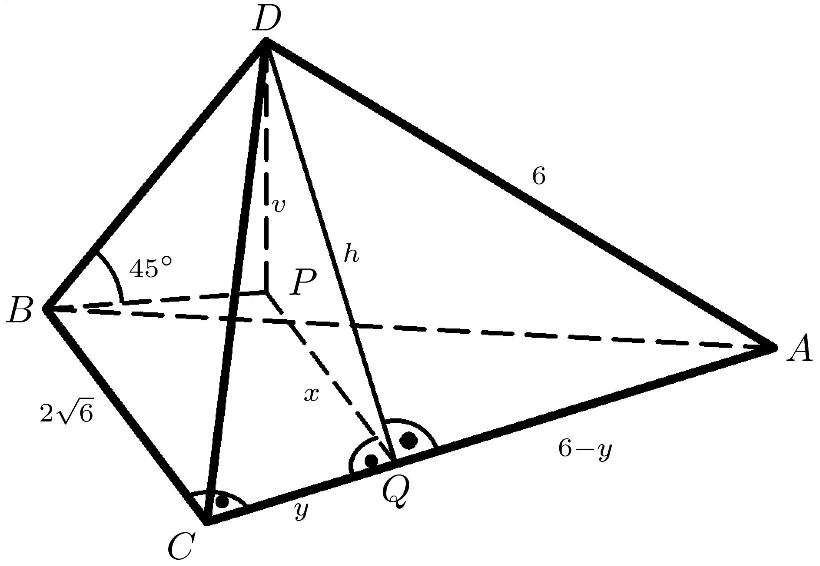
B – I – 6

Nech Q je päta výšky h z vrcholu D v stene ACD a nech $|CQ| = y$, $|AQ| = 6 - y$ (obr. 8). Potom podľa Pytagorovej vety platí:

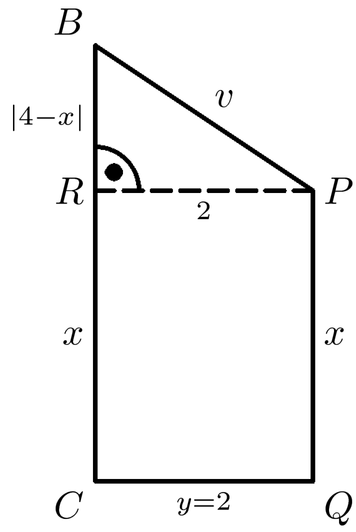
$$h^2 + (6 - y)^2 = 36 \quad \text{a} \quad h^2 + y^2 = 24.$$

Vyriešením tejto sústavy rovníc dostávame $y = 2\,\text{cm}$ a $h = \sqrt{20}\,\text{cm}$.
Vrchol D leží aj na kružnici $k(Q, h)$, ktorej rovina je kolmá na hranu AC, aj na kužeľovej ploche, ktorá má vrchol v B , a ktorej os o je kolmá na rovinu ABC. Vrcholový uhol tejto kužeľovej plochy má veľkosť $180° - 2 \cdot 45°$. Označme P pätu telesovej výšky ihlanu, $|PQ| = x$, $|DP| = |BP| = v$ (pozri obr. 8 a obr. 9). Pretože obe priamky DQ a DP sú kolmé na priamku AC, je na ňu kolmá aj priamka PQ. Z pravouhlých trojuholníkov DQP, BPR máme $x^2 + v^2 = 20$ a zároveň $(4 - x)^2 + 4 = v^2$. Vyriešením tejto sústavy zistíme, že

existujú dve riešenia: buď je $x = 0$, potom má ihlan výšku $v = \sqrt{20}\,\text{cm}$, alebo je $x = 4\,\text{cm}$ a $v = 2\,\text{cm}$.



Obr. 8



Obr. 9

B – S – 1

Viètove vzťahy a podmienka pre súčin koreňov vedú na sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{9}{2}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{7}{2}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{m}{2}, \\ x_1x_2 &= -1, \end{aligned}$$

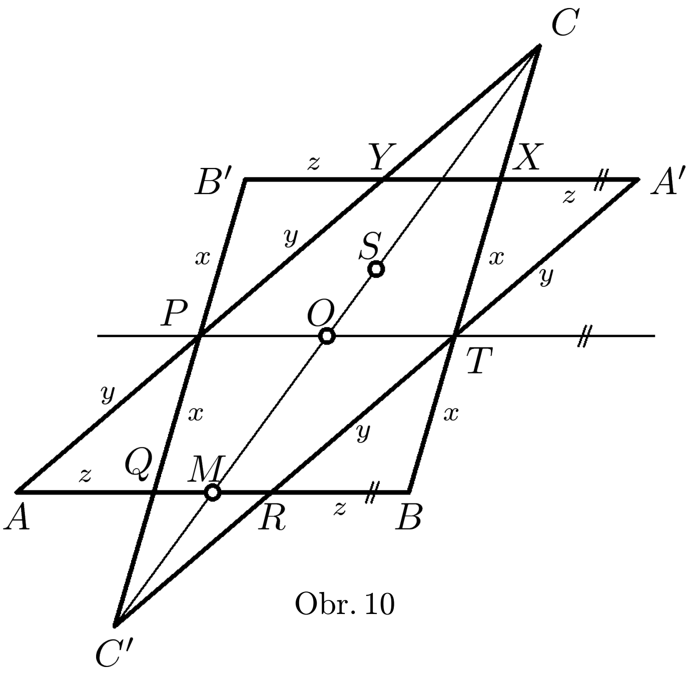
kde x_1, x_2, x_3 sú tri rôzne reálne korene danej rovnice. Pomocou prvej a štvrtej rovnice upravujeme ľavú stranu druhej rovnice

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 + x_3(x_1 + x_2) = -1 + x_3\left(\frac{9}{2} - x_3\right),$$

takže dostaneme rovnicu $2x_3^2 - 9x_3 + 9 = 0$ s koreňmi 3 a $\frac{3}{2}$. Pre $x_3 = 3$ z rovností $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1x_2 = -1$ vyplýva $\{x_1, x_2\} = \{-\frac{1}{2}, 2\}$, pre $x_3 = \frac{3}{2}$ podobne dostávame $\{x_1, x_2\} = \{\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13})\}$. V prvom prípade je $m = 6$, v druhom $m = 3$. V oboch prípadoch sú potom všetky štyri rovnice sústavy splnené.

B – S – 2

Nech $A'B'C'$ je obraz trojuholníka ABC v súmernosti podľa O a $PQRTXY$ je šesťuholník, ktorý vznikne ako prienik oboch trojuholníkov (obr. 10).



Obr. 10

Trojuholníky AQP, $A'XT$ sú stredovo súmerné podľa O a trojuholníky $A'XT$, RBT sú stredovo súmerné podľa T. Preto sú trojuholníky AQP, RBT zhodné a naviac sú podobné trojuholníku ABC. Označme a, b, c dĺžky strán trojuholníka ABC a x, y, z dĺžky úsečiek PQ, AP, AQ. Číslo $k = x/a = y/b = z/c$ sa zrejme zmení, ak zmeníme polohu bodu O vo vnútri úsečky MS. Obvod o prieniku $PQRTXY$ je daný vzťahom $o = 2x + 2y + 2(c - - 2z) = 2k(a + b - 2c) + 2c$ a nezávisí od polohy bodu O (vo vnútri úsečky MS), práve keď je výraz vo vnútri zátvorky posledného výrazu rovný nule, t. j. keď $a + b = 2c$.

B – S – 3

Pripomeňme si najprv túto úvahu: Ak máme k bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke, potom každý z nich môžeme spojiť s ostatnými spolu $k - 1$ priamkami. Keď to prevedieme postupne pre všetky body, zostrojíme každú priamku dvakrát. Preto je počet všetkých spojníc $\frac{1}{2}k(k - 1)$.

Pristúpme teraz k riešeniu danej úlohy. Uvažujme ľubovoľnú priamku p určenú niektorými dvoma z daných n bodov. Zostávajúcich $n - 2$ bodov vytvára nanajvýš $\frac{1}{2}(n - 2)(n - 3)$ priamok, s ktorými má priamka p nanajvýš $r = \frac{1}{2}(n - 2)(n - 3)$ priesečníkov. Priamku p môžeme vybrať nanajvýš $s = \frac{1}{2}n(n - 1)$ spôsobmi. V súčine rs je však každý priesečník započítaný aspoň dvakrát. Preto počet nových priesečníkov neprevyšuje číslo $\frac{1}{8}n(n-1)(n- - 2)(n - 3)$.

B – II – 1

Sústavu možno napísať v tvare

$$x + \frac{1}{y} - \frac{y}{x} - y - \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = 0, \tag{1}$$

$$y + \frac{1}{x} - \frac{x}{y} = a. \tag{2}$$

Prvú rovnicu vynásobíme súčinom xy a postupným vynímaním dostaneme

$$(x-y)(x+1)(y+1) = 0, \tag{3}$$

pričom $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Riešeniami tejto rovnice sú práve všetky dvojice $[t,t]$, $[-1,t]$, $[t,-1]$, kde $t \in R \setminus \{0\}$, a dosadením do (2) zistíme, že je potom vždy $a = t + \frac{1}{t} - 1$. Odtiaľ vidíme, že sústava má jediné riešenie, práve keď je $t = -1$, t.j. $x = y = -1$. Dosadením týchto hodnôt do (2) dostaneme $a = -3$.

Iné riešenie: Ak má sústave vyhovovať jediná usporiadaná dvojica $[x,y]$, musí vzhľadom k symetrii oboch rovníc v neznámych x, y byť $y = x$. Položme preto v (2) $y = x$ a upravme ju na tvar

$$x^2 - (a+1)x + 1 = 0.$$

Táto rovnica má jediné riešenie, práve keď je jej diskriminant

$$D = (a+1)^2 - 4 = (a+3)(a-1)$$

rovný nule.
Poľahky sa však presvedčíme, že pre $a = 1$ sú riešeniami napríklad usporiadané dvojice $[1,1]$ aj $[1,-1]$. Na druhej strane pre $a = -3$ dostaneme sústavu (2),(3), ktorá má jediné riešenie $x = y = -1$.

B – II – 2

Z domáceho kola vieme, že $0 < g < a < k$. Kladné hodnoty výrazu V môžu byť $V_1 = (a-g)/k$, $V_2 = (k-a)/g$, $V_3 = (k-g)/a$. Zrejme je $V_1 < V_3$, lebo $k > a$ (zároveň $a - g < k - g$). Dokážeme ešte, že je $V_1 < V_2$. Predpokladajme naopak, že pre nejaké x, y platí $V_1 \geqq V_2$. Pretože

$$k^2 + g^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy = 2\Big(\frac{1}{2}(x+y)\Big)^2 = 2a^2, \tag{4}$$

z nerovnosti $V_1 \geqq V_2$ postupne dostávame nasledujúce nerovnosti:

$$\begin{gathered} g(a-g) \geqq k(k-a), \\ ag + ka \geqq k^2 + g^2 = 2a^2, \\ g + k \geqq 2a. \end{gathered}$$

Umocnením poslednej z nich dostaneme

$$g^2 + 2gk + k^2 \geqq 4a^2, \quad \text{alebo (vďaka rovnosti (4))} \quad gk \geqq a^2.$$

Zároveň ale vieme, že

$$gk \leqq \frac{1}{4}\left(g^2 + k^2\right) = \frac{1}{2}\,a^2,$$

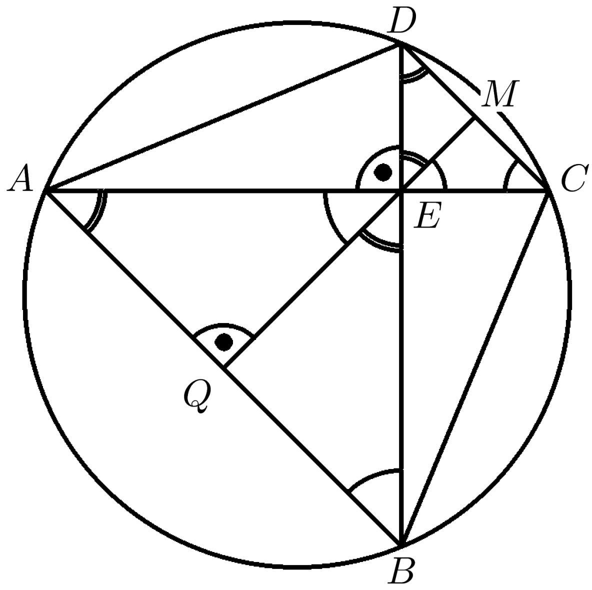
takže vychádza $a^2 \leqq gk \leqq \frac{1}{2}a^2$, alebo $a^2 \leqq 0$, čo odporuje predpokladu $a > 0$. Výraz V má teda najmenšiu kladnú hodnotu pre $[r, s, t] = [a, g, k]$.

B – II – 3

Vrcholy kocky ležiace na tej istej telesovej uhlopriečke nazveme protiľahlé vrcholy. Ak majú niektoré dva protiľahlé vrcholy tú istú farbu, tvrdenie platí. Ak majú každé dva protiľahlé vrcholy rôzne farby, potom pri ľubovoľnej ceste po hranách z jedného vrcholu do protiľahlého narazíme na hranu, ktorej krajné body sú vrcholy rôznych farieb. Jeden z vrcholov tejto hrany so stredom najvzdialenejšej rovnobežnej hrany potom tvorí dvojicu bodov, ktoré majú rovnakú farbu a vzdialenosť $d = \frac{3}{2}$.
Ukážeme ešte, že existuje ofarbenie, pri ktorom nemôže byť $d > \frac{3}{2}$. Také ofarbenie dostaneme, keď napr. kocku rozdelíme rovinou, ktorá prechádza stredom kocky a je kolmá na niektorú jej hranu, na dva zhodné hranoly a každý z týchto hranolov ofarbíme inou farbou (s výnimkou spoločnej hranice kvádrov, na ktorej volíme len jednu z oboch farieb).

B – II – 4

V pravouhlom trojuholníku ABE označme Q pätu kolmice EM na preponu AB (obr. 11).



Obr. 11

Potom platí $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle BEQ| = |\sphericalangle DEM| = |\sphericalangle CDB|$, pričom posledná rovnosť vyplýva z vlastností obvodových uhlov. Trojuholník DEM je teda rovnoramenný a platí $|DM| = |EM|$. Analogicky zistíme, že je $|EM| = |MC|$. Trojuholníky MDE a CME majú teda zhodné strany MD, MC a spoločnú výšku na tieto strany. Obsahy týchto trojuholníkov sa preto rovnajú.

Riešenia súťažných úloh

Kategória A

A – I – 1

Uvedené kladné priemery spĺňajú známe nerovnosti $h < g < a < k$. Tie plynú napr. z vyjadrenia

$$k^2 - a^2 = \frac{(x-y)^2}{4}, \quad a^2 - g^2 = \frac{(x-y)^2}{4}, \quad g^2 - h^2 = \frac{xy(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

a z podmienky $x \neq y$. (Je to trochu umelé zdôvodnenie, riešiteľov vyzveme dokazovať každú z troch nerovností metódou ekvivalentných úprav.)
Označme $V_1 = k + a - g - h$, $V_2 = k + g - a - h$ a $V_3 = k + h - a - g$. Ostatné tri hodnoty výrazu V sú $-V_1$, $-V_2$ a $-V_3$. Pretože

$$V_1 - V_2 = 2(a - g) > 0 \quad \text{a} \quad V_2 - V_3 = 2(g - h) > 0,$$

platí $V_1 > V_2 > V_3$. Ak dokážeme, že $V_3 > 0$, bude V_3 hľadaná najmenšia kladná hodnota výrazu V. Nerovnosť $V_3 > 0$ je ekvivalentná s nerovnosťou $k - g > a - h$, ktorej obidve strany sú kladné. Môžeme ju preto ekvivalentne umocniť na druhú a potom prepísať do tvaru

$$2kg < k^2 + g^2 - a^2 + 2ah - h^2.$$

Pred ďalším umocnením vyjadríme pravú stranu tejto nerovnosti pomocou čísel x a y (a tak zístíme, že je skutočne kladná). Vyjde nám

$$k^2 + g^2 - a^2 = \frac{(x+y)^2}{4} \quad \text{a} \quad 2ah - h^2 = \frac{2xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2}.$$

Preto môžeme poslednú nerovnosť ekvivalentne umocniť na druhú:

$$4k^2g^2 = 2xy(x^2+y^2) < \frac{(x+y)^4}{16} + xy(x^2+y^2) + \frac{4x^2y^2(x^2+y^2)^2}{(x+y)^4}.$$

Túto nerovnosť možno ekvivalentne upraviť na tvar

$$0 < \left\{ \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{2xy(x^2+y^2)}{(x+y)^2} \right\}^2.$$

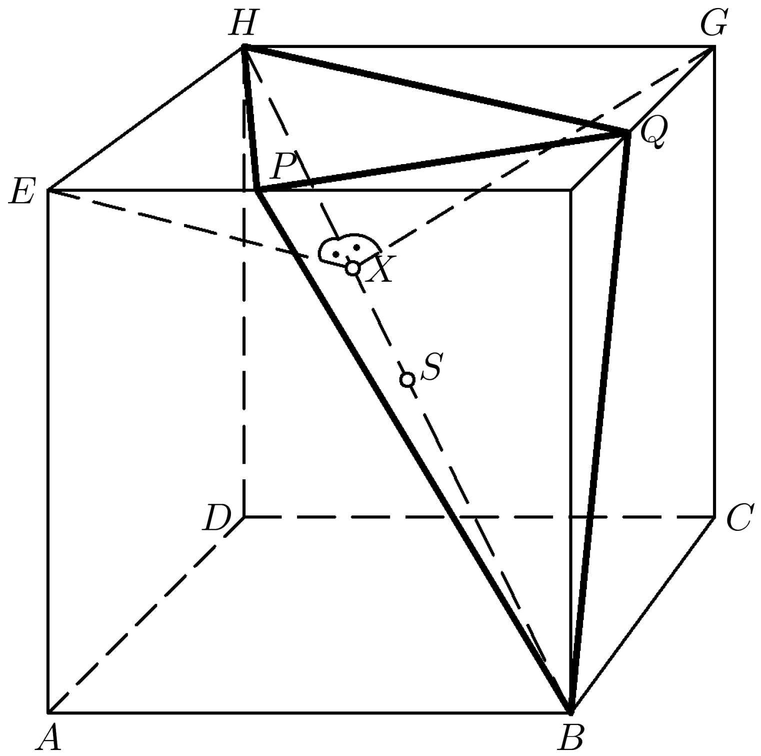
Výraz v zloženej zátvorke je kladný, lebo je rovný

$$\frac{(x+y)^4 - 8xy(x^2+y^2)}{4(x+y)^2} = \frac{(x-y)^4}{4(x+y)^2}$$

a $x \neq y$. Tým je dôkaz ukončený. Odpoveď: Hľadané rozdelenie je $\{r, s\} = \{k, h\}$ a $\{t, u\} = \{a, g\}$, lebo nejmenšia kladná hodnota výrazu V je rovná $k + h - a - g$.

A – I – 2

Pri riešení úlohy využijeme nasledujúce tvrdenie: *Ak sa roviny KLM a KLN dotýkajú gule $\mathcal{K}$ so stredom S, potom KLS je rovina súmernosti týchto dvoch dotykových rovín.* (Tvrdenie dokážeme, ak si predstavíme, ako sa určia roviny dotykové ku guli $\mathcal{K}$, ktoré obsahujú danú priamku KL: Nech S' je kolmý priemet S na KL, ϱ je rovina prechádzajúca bodom S' kolmo na KL a kružnica k je rez povrchu gule $\mathcal{K}$ rovinou ϱ. Označme T_1 a T_2 body dotyku dotyčníc vedených z bodu S' na kružnicu k. Potom dotykové roviny KLM a KLN sú roviny KLT_1 a KLT_2 a SS' je osou priamok $S'T_1$ a $S'T_2$.)
V našej úlohe sa roviny BEP, BGQ a BPQ dotýkajú gule, ktorej stred S leží na priamke BH (obr. 12).



Obr. 12

Preto podľa vyššie uvedeného tvrdenia platí:

(1) BPH je rovina súmernosti rovín BEP a BPQ,

(2) BQH je rovina súmernosti rovín BGQ a BPQ.

Zložením rovinných súmerností podľa rovín BPH a BQH (v tomto poradí) vznikne otočenie $\mathcal{R}$ okolo ich priesečnice BH o uhol 2α, kde α je odchýlka týchto rovín. (Dôkaz: Táto vlastnosť sa v rovine kolmej na BH prevedie na známe tvrdenie o zložení dvoch osových súmerností podľa priamok zvierajúcich uhol α.) Našou úlohou je dokázať, že $\alpha = 60°$. Najprv vysvetlíme, prečo pri otočení $\mathcal{R}$ prejde bod E do bodu G. Z (1) a (2) plynie, že rovina BEP prejde pri otočení $\mathcal{R}$ do roviny BGQ. Pretože bod H leží na osi otočenia $\mathcal{R}$, jeho kolmý priemet do roviny BEP (čo je bod E) prejde v otočení $\mathcal{R}$ do kolmého priemetu bodu H do roviny BGQ (čo je bod G). Bod G je skutočne obrazom bodu E pri otočení $\mathcal{R}$.

Vieme už, že $\alpha = \frac{1}{2}|\sphericalangle EXG|$, kde X je spoločný kolmý priemet bodov E a G na priamku BH, alebo päta výšky na stranu BH trojuholníka BEH. Označme a dĺžku hrany kocky. Zo vzťahov $|EB| = a\sqrt{2}$, $|EH| = a$, $|BH| = a\sqrt{3}$, $|\sphericalangle BEH| = 90°$ a z dvoch vyjadrení obsahu trojuholníka BEH (tj. $\frac{1}{2}|EB|\cdot|EH| = \frac{1}{2}|BH|\cdot|EX|$) plynie $|EX| = a\sqrt{2/3}$. Preto z rovnoramenného trojuholníka EXG dostávame

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}\cdot|EG|}{|EX|} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ takže } \alpha = 60°.$$

Dodajme, že výpočet z posledného odstavca možno obísť nasledujúcou úvahou: Pri otočení $\mathcal{R}$ prejde bod E do bodu G, takže bod G prejde do bodu D a bod D do bodu E. Preto z roviny EGD usúdime, že $2\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 360°$, odkiaľ $\alpha = 60°$.

A – I – 3

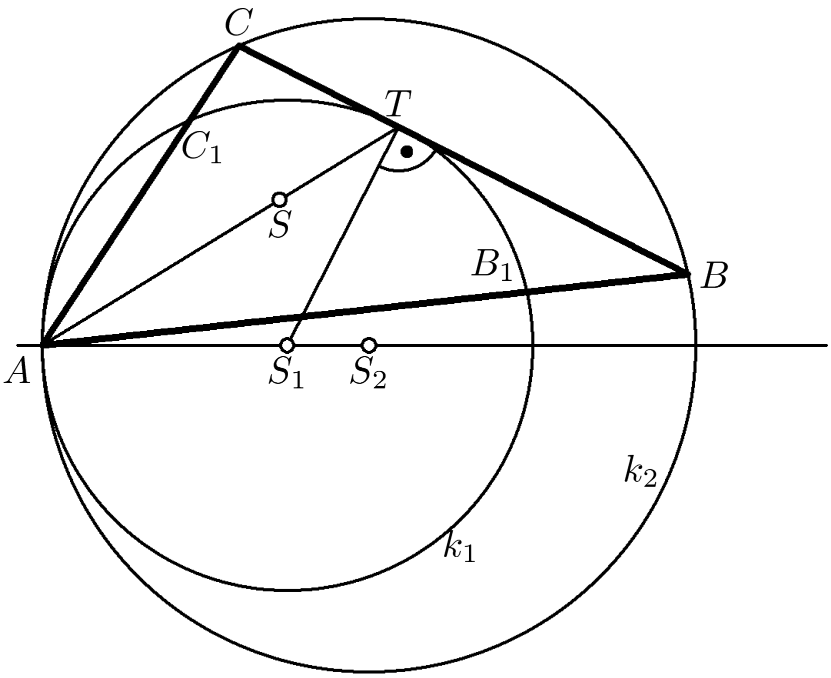
Vzhľadom na spojitosť polynomyckej funkcie f a k jej chovaniu pre $|x| \to \infty$ je vlastnosť popísaná v úlohe ekvivalentná s požiadavkou, aby nerovnosť $f(x) \geqq b$ platila pre každé reálne číslo x, a pritom pre niektoré x_0 v nej nastala rovnosť. (Bude vhodné túto ekvivalenciu riešiteľom poriadne zdôvodniť, aj keď sú pojmy analýzy na SŠ vykladané značne intuitívne.) Všimneme si, že $f(1) = b$, takže druhá časť požiadavky je zaručená hodnotou $x_0 = 1$. Naviac môžeme previesť rozklad

$$\begin{aligned} f(x) - b &= x^4 + x^3 - 2x^2 + bx - b = \\ &= (x-1)x^2(x+2) + b(x-1) = (x-1)(x^3 + 2x^2 + b). \end{aligned}$$

Pre mnohočlen $g(x) := x^3 + 2x^2 + b$ musí platiť $g(x) \leqq 0$ pre každé $x < 1$ a $g(x) \geqq 0$ pre každé $x > 1$. Odtiaľ $g(1) = 0$, čo nastane jedine pre $b = -3$. Potom ale $g(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 3)$. Pretože trojčlen v poslednej zátvorke má záporný diskriminant, v prípade $b = -3$ platí $f(x) + 3 = (x-1)^2(x^2 + 3x + 3) > 0$ pre každé $x \neq 1$ (a samozrejme $f(1) = -3$). Preto je $b = -3$ jediná hľadaná hodnota. Dodajme ešte, že číslo x_0 z prvej vety riešenia musí byť *násobným* koreňom rovnice $f(x) = b$. Ak si nevšimneme hodnotu $x_0 = 1$, môžeme postupovať inak: porovnať koeficienty v rovnosti mnohočlenov $f(x) - b = (x - x_0)^2 \cdot (x^2 + px + q)$ a získať tak sústavu rovníc s neznámymi číslami b, x_0, p a q. Potom je ale nutné vylúčiť tie jej riešenia, pre ktoré $p^2 - 4q > 0$.

A – I – 4

Označme T bod dotyku kružnice k_1 so stranou BC hľadaného trojuholníka ABC (obr. 13).



Obr. 13

Nech B_1 a C_1 označujú po rade priesečníky kružnice k_1 so stranami AB a AC. Kružnica k_1 je obrazom kružnice k_2 v rovnoľahlosti so stredom v bode A a koeficientom $\frac{3}{4}$. Platí teda $|BB_1| = \frac{1}{4}|AB|$ a $|CC_1| = \frac{1}{4}|AC|$. Preto sú mocnosti bodov B a C ku kružnici k_1 rovné

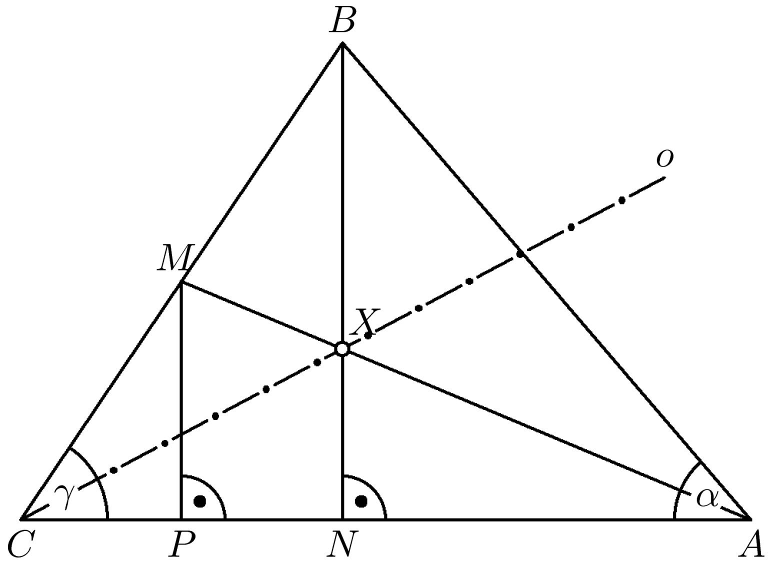
$$|BT|^2 = |BB_1| \cdot |BA| = \frac{1}{4}|AB|^2 \quad \text{resp.} \quad |CT|^2 = |CC_1| \cdot |CA| = \frac{1}{4}|AC|^2.$$

Odtiaľ plynie $|BT| : |CT| = |AB| : |AC|$. Táto rovnosť ale znamená (viď návodnú úlohu), že bod T leží na osi uhla BAC, teda na polpriamke AS. Preto je jasná konštrukcia: Bod T zostrojíme ako priesečník polpriamky AS s kružnicou k_1, potom určíme body B, C ako priesečníky kružnice k_2 s dotykovou kružnicou k_1 v bode T.

Teraz preskúmame, či zostrojený trojuholník ABC (vždy jediný, až na možnú zámenu vrcholov B a C) má požadované vlastnosti. Ide o to, či bod S je skutočne stredom vpísanej kružnice. Našou konštrukciou je zaručená rovnosť pomerov $|BT| : |CT|$ a $|AB| : |AC|$ (viď vyššie). Preto bod S leží na osi uhla BAC. Viac pre bod S všeobecne neplatí. (Uvedomte si, že ak necháte prebiehať bod S po pevnej úsečke AT, bude výsledkom konštrukcie stále ten istý $\triangle ABC$. Len jediný bod úsečky AT je stredom vpísanej kružnice.) Zistíme preto, kedy bod S tiež leží na osi uhla ABC (a je teda stredom vpísanej kružnice). Z trojuholníka ABT vidíme, že to nastane, práve keď $|AS| : |TS| = |AB| : |BT|$. Pretože $|AB| : |BT| = 2$ (viď vyššie), dostávame nutnú aj postačujúcu podmienku $|AS| = 2|TS|$, alebo aj $|AS| = \frac{2}{3}|AT|$. Pretože bod T môže byť ľubovoľný bod k_1 rôzny od A, dochádzame k záveru: Zadaná konštrukčná úloha má riešenie (a to jediné až na označenie bodov B a C), práve keď bod S leží na kružnici, ktorá je obrazom kružnice k_1 v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom rovným $\frac{2}{3}$. (Podmienka $S \neq A$ je zaručená zadaním.)

A – I – 5

Nech AM je ťažnica, BN je výška, bod X ich priesečník a bod P stred úsečky CN v skúmanom trojuholníku (obr. 14).



Obr. 14

Ak má pre jednoduchosť úsečka CN dĺžku 1, potom $|BN| = \operatorname{tg}\gamma$, $|NA| = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}$, $|XN| = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $|MP| = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma$ (stredná priečka v trojuholníku CBN) a $|PA| = |PN| + |NA| = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}$. Z podobnosti trojuholníkov MPA a XNA plynie pomer

$$\frac{|MP|}{|PA|} = \frac{|XN|}{|NA|}, \text{ alebo } \quad \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma}{\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}},$$

odkiaľ

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma\left(\operatorname{tg}\gamma - 2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Porovnaním s textom úlohy vidíme, že stačí dokázať identitu

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma - 2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}, \text{ zrejme ekvivalentnú s } \operatorname{tg}\gamma = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}.$$

To je ale známy vzorec pre tangens dvojnásobného uhla.

A – I – 6

Dokážeme najprv, že počet všetkých N-ciferných čísel, ktoré možno zostaviť z p_0 núl, p_1 jedničiek, …, p_9 deviatok, kde $\sum_{i=0}^{9} p_i = N$, je rovný hodnote

$$\frac{(N-1)!\,(N-p_0)}{p_0!\,p_1!\cdots p_9!}. \qquad (*)$$

Skutočne, ak je $p_0 = 0$, je spomínaný počet rovný počtu všetkých poradí uvedených cifier, ktorý je podľa vzorca pre počet *poradí s opakovaním* rovný hodnote $\frac{N!}{p_1!\cdots p_9!}$. To je ale (∗) pre $p_0 = 0$ (pripomíname, že $0! = 1$). Ak je $p_0 > 0$, je nutné od celkového počtu poradí daných cifier (včítane p_0 núl) odčítať počet tých z nich, ktoré začínajú cifrou nula, tj. odčítať počet všetkých poradí $p_0 - 1$ núl, p_1 jedničiek, ..., p_9 deviatok. Úpravou rozdielu $\frac{N!}{p_0!p_1!\cdots p_9!} - \frac{(N-1)!}{(p_0-1)!p_1!\cdots p_9!}$ dostaneme (∗).

Teraz vysvetlíme, že pri pevnom prirodzenom N je hodnota (∗) najväčšia, keď sa počty p_i navzájom „čo najmenej líšia“, tj. sú rovné podielu $\frac{N}{10}$ (zaokrúhlenému nahor alebo dole, ak nejde o celé číslo). Zapíšme preto delenie $N : 10$ so zvyškom: $N = 10q + r$, kde q a r sú celé nezáporné čísla, pričom $r < 10$. Až do konca budú tieto čísla N, q a r pevné. (V zadaní úlohy $N = 1\,994$, takže $q = 199$ a $r = 4$. Dáme však prednosť všeobecnému popisu.)

Najprv si všimneme menovateľa zlomku (∗). Dokážeme, že *najmenšia hodnota menovateľa je rovná* $((q+1)!)^r(q!)^{10-r}$. Skutočne, v súčine

$$(1\cdot 2\cdots p_0)\cdot(1\cdot 2\cdots p_1)\cdots(1\cdot 2\cdots p_9)$$

je práve $\sum\limits_{i=0}^{9} p_i = N$ činiteľov, z toho najviac 10 čísel 1, najviac 10 čísel 2, atď. až najviac 10 čísel q. Je tam preto tiež aspoň $N - 10q = r$ čísel, ktoré nie sú menšie ako $q + 1$. Ak teda zoradíme týchto N činiteľov od najmenšieho po najväčší, bude prvých desať $\geqq 1$, druhých desať $\geqq 2$, ..., q-tých desať $\geqq q$ a zostávajúcich r bude $\geqq q + 1$. Celý súčin teda nie je menší ako

$$1^{10}\cdot 2^{10}\cdots q^{10}\cdot(q+1)^r = ((q+1)!)^r(q!)^{10-r}.$$

Pritom toto minimum sa dosiahne, práve keď je medzi číslami p_i práve r hodnôt $q + 1$ a práve $10 - r$ hodnôt q.

S ohľadom na práve dokázané tvrdenie o minime menovateľa (∗) teraz ukážeme, že zlomok (∗) nemôže byť maximálny na žiadnej desatici $p_0, \ldots, p_9$, v ktorej $p_0 < q$. Vezmime teda ľubovoľnú deseticu $p_0, \ldots, p_9$, v ktorej $p_0 < q$. Pretože $\sum\limits_{i=0}^{9} p_i = 10q + r > p_0 + 9q$, môžeme vybrať index $i > 0$ tak, aby $p_i \geqq q + 1$. Ukážeme, že hodnota (∗) sa zväčší, ak zameníme v našej desatici čísla p_0 a p_i po rade číslami $p_0 + 1$ a $p_i - 1$, zatiaľ čo ostatné čísla p_j nezmeníme (to odpovedá zmene, keď v pôvodnej zostave cifier jednu cifru „i“ nahradíme cifrou „0“). Ak porovnáme zápis (∗) pre pôvodnú a pozmenenú desaticu, nahliadneme, že hodnota (∗) sa našou zmenou zväčší, práve keď

$$\frac{N-p_0}{p_i} < \frac{N-p_0-1}{p_0+1} \quad \text{alebo} \quad p_i > \frac{(N-p_0)(p_0+1)}{N-p_0-1}.$$

pretože $p_i \geqq p_0 + 2$, stačí len dokázať, že platí

$$p_0 + 2 > \frac{(N-p_0)(p_0+1)}{N-p_0-1}.$$

Ekvivalentnou úpravou dostaneme nerovnosť $p_0 < \frac{N}{2} - 1$. Tá sa v našej situácii už ľahko zdôvodní: pretože $N \geqq 10q \geqq 10$ ($q \neq 0$, lebo $p_0 < q$) a pretože nerovnosť $\frac{x}{10} < \frac{x}{2} - 1$ je zrejme splnená pre každé $x > 10$, platí $p_0 < q \leqq \frac{N}{10} < \frac{N}{2} - 1$.
Zhrňme predchádzajúcu úvahu: Pri hľadaní najväčšej hodnoty ($*$) sa môžeme obmedziť len na tie desatice $p_0, \dots, p_9$, v ktorých $p_0 \geqq q$. pre ne však podľa tvrdenia o najmenšej hodnote menovateľa ($*$) platí

$$\frac{(N-1)!(N-p_0)}{p_0!\,p_1!\cdots p_9!} \leqq \frac{(N-1)!(N-q)}{p_0!\,p_1!\cdots p_9!} \leqq \frac{(N-1)!(N-q)}{((q+1)!)^r(q!)^{10-r}}.$$

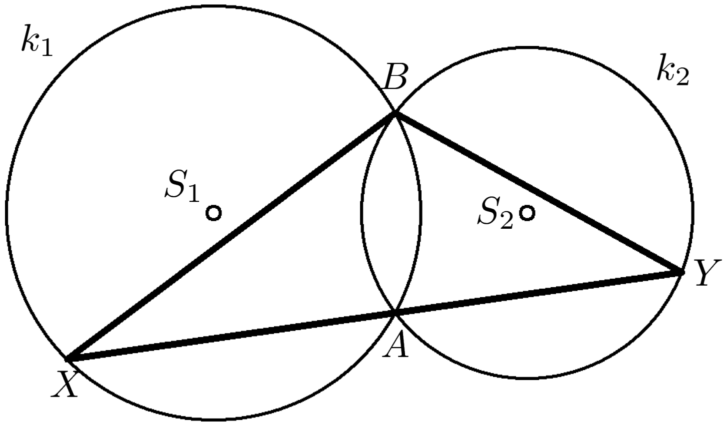
Ak si uvedomíme, kedy v posledných dvoch nerovnostiach nastáva rovnosť, dostávame konečný výsledok: *Najväčšia hodnota* ($*$) *je rovná*

$$\frac{(N-1)!(N-q)}{((q+1)!)^r(q!)^{10-r}} \quad \left(= \frac{1993! \cdot 1795}{(200!)^4(199!)^6} \text{ v zadanom prípade}\right)$$

a dosiahne sa vtedy a len vtedy, keď je medzi číslami p_i práve r hodnôt $q+1$, práve $10-r$ hodnôt q a pritom $p_0 = q$.

A – S – 1

Všetky uvažované trojuholníky BXY sú navzájom podobné, lebo majú rovnaký uhol pri vrchole X (obvodový uhol na kružnici k_1 príslušný tetive AB) aj rovnaký uhol pri vrchole Y (obvodový uhol na kružnici k_2 príslušný tetive AB). To znamená, že najväčší obsah má ten trojuholník BXY (obr. 15), ktorý má napr. stranu BX čo najväčšiu, tj. rovnú priemeru kružnice k_1. Podľa Thalesovej vety je vtedy $AB \perp XY$ (takže aj BY je priemerom kružnice k_2). Konštrukcia bodov X a Y je tým jasná.

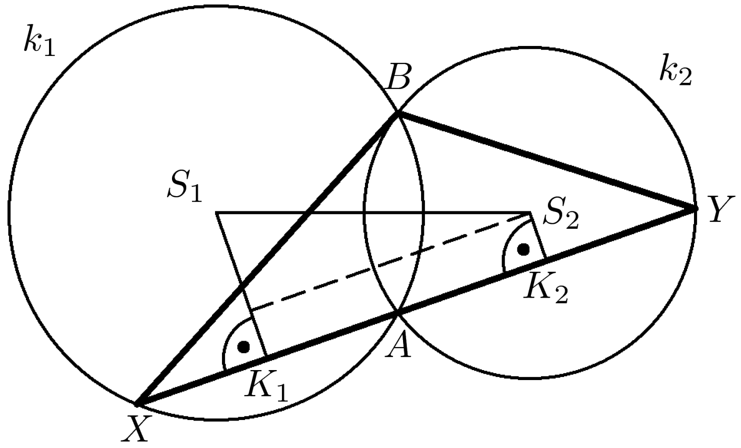


Obr. 15

Iné riešenie: Označme K_1 a K_2 kolmé priemety stredov S_1 a S_2 na priamku XY (obr. 16). Potom $|XY| = 2|K_1K_2| \leqq 2|S_1S_2|$, pričom rovnosť $|XY| = 2|S_1S_2|$ nastane, práve keď $S_1S_2 \parallel K_1K_2$, alebo $AB \perp XY$. Preto pre obsah P trojuholníka BXY platí odhad

$$P \leqq \tfrac{1}{2} \cdot |XY| \cdot |AB| \leqq |S_1S_2| \cdot |AB|,$$

pričom rovnosť $P = |S_1S_2| \cdot |AB|$ nastane, práve keď $AB \perp XY$.



Obr. 16

A – S – 2

Označme písmenami D a H definičný obor, resp. obor hodnôt ľubovoľnej funkcie f uvedeného tvaru. V prípade $a > 0$ by množina D obsahovala niektorý interval $(-\infty, x_0\rangle$, zatiaľčo všetky prvky H sú nezáporné čísla. Preto musí platiť $a \leqq 0$. Z rovnakého dôvodu v prípade $a = 0$ nemôže byť číslo b záporné, a zrejme v tomto prípade nemôže byť ani $b = 0$ (potom by totiž bolo $f(x) = \sqrt{c}$, čo nevyhovuje). Preto v prípade $a = 0$ musí platiť $b > 0$, tj. $f(x) = \sqrt{bx + c}$. Potom však $H = \langle 0, \infty)$ a z rovnosti $D = \langle 0, \infty)$ plynie $c = 0$. Dostávame prvé riešenie $f(x) = \sqrt{bx}$, $b > 0$.
V prípade $a < 0$ je grafom funkcie $y = ax^2 + bx + c$ parabola „obrátená“ dole, tj. v zápornom smere osi y. Odtiaľ plynie, že neprázdná množina H musí byť tvaru $H = \langle 0, M\rangle$ pre niektoré $M \geqq 0$. Z rovnosti $D = \langle 0, M\rangle$ plynie, že čísla 0 a M sú koreňmi rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, takže $c = 0$, $b = -aM$ a $f(x) = \sqrt{ax(x - M)}$ (platí to aj v prípade $M = 0$, keď je koreň 0 násobný). Obor hodnôt takejto funkcie je ale interval $\langle 0, f(\frac{M}{2})\rangle$ (vieme, že $x = \frac{M}{2}$ je súradnica vrcholu, tj. „najvyššieho“ bodu paraboly), preto dostávame podmienku $f(\frac{M}{2}) = M$:

$$\sqrt{a \cdot \frac{M}{2} \cdot \Big(\frac{M}{2} - M\Big)} = M, \quad \text{alebo} \quad M \cdot \sqrt{-\frac{a}{4}} = M.$$

Posledná rovnosť platí, práve keď $M = 0$ alebo $a = -4$. Našli sme zostávajúce riešenie $f(x) = \sqrt{ax^2}$ $(a < 0)$ a $f(x) = \sqrt{-4x^2 + bx}$ $(b > 0)$.
Odpoveď: Hľadané funkcie sú troch druhov: $f(x) = \sqrt{bx}$ $(b > 0)$, $f(x) = \sqrt{ax^2}$ $(a < 0)$ a $f(x) = \sqrt{-4x^2 + bx}$ $(b > 0)$.

A – S – 3

Vieme, že $h < g < a < k$. Pretože prvky M sú vypísané v poradí od najmenšieho po najväčší, musí nastať niektorý z týchto prípadov:

(i) $g = 18\sqrt{2}$, (ii) $a = 40$, (iii) $g = 30$ a $a = 25\sqrt{2}$.
V každom z nich je už ďalší postup ľahký:
(i) Z $g = 18\sqrt{2}$ vyplýva $h = \frac{45}{2}$. Pretože $xy = g^2 = 648$, dostávame

$$x + y = \frac{2g^2}{h} = \frac{4 \cdot 648}{45}.$$

Poslední číslo nepatrí do M, takže prípad (i) nemôže nastať.
(ii) Z $a = 40$ vyplýva $k = 10\sqrt{23}$, takže

$$x + y = 2a = 80$$

a

$$x^2 + y^2 = 2k^2 = 4\,600.$$

Odtiaľ $2xy = 80^2 - 4\,600 = 1\,800$, čiže $xy = 900$ a $g = \sqrt{900} = 30 \in M$. Konečne $h = \frac{2 \cdot 900}{80} = \frac{45}{2} \in M$. Čísla x a y sú korene rovnice $t^2 - 80t + 900 = 0$, teda $\{x, y\} = \{40 \pm \pm 10\sqrt{7}\}$.
(iii) Platí

$$xy = g^2 = 900$$

a

$$x + y = 2a = 50\sqrt{2},$$

odkiaľ $h = \frac{2 \cdot 900}{50\sqrt{2}} = 18\sqrt{2} \in M$. Ďalej

$$x^2 + y^2 = \left(50\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 900 = 3\,200,$$

takže $k = \sqrt{1\,600} = 40 \in M$. Čísla x a y sú korene rovnice $t^2 - 50\sqrt{2}\,t + 900 = 0$, teda $\{x, y\} = \{25\sqrt{2} \pm 5\sqrt{14}\}$.
Odpoveď: $\{x, y\} = \{40 \pm 10\sqrt{7}\}$, $\{x, y\} = \{25\sqrt{2} \pm 5\sqrt{14}\}$.

A – II – 1

Ak má pätnásťmiestne číslo vo svojom zápise x trojek a $8 - x$ osmičiek na mieste párnych rádov a zároveň y trojek a $7 - y$ osmičiek na mieste nepárnych rádov, je podľa známeho kritéria toto číslo násobkom jedenástich, práve keď je 11-timi deliteľný ciferný súčet

$$x \cdot 3 + (8 - x) \cdot 8 - y \cdot 3 - (7 - y) \cdot 8 = 5(y - x) + 8.$$

Pretože $0 \leqq x \leqq 8$ a $0 \leqq y \leqq 7$, platí $-8 \leqq y - x \leqq 7$. Prebratím všetkých možných hodnôt $y - x$ (alebo úpravou $5(y-x)+8 = 5(y-x+6)-22$) zistíme, že podmienka $11|5(y-x)+8$ platí, práve keď $y - x = -6$ alebo $y - x = 5$, takže $y = x - 6$ alebo $y = x + 5$. Pretože x trojek rozmiestníme na niektoré z ôsmich pozícií $\binom{8}{x}$ spôsobmi a podobne y trojek na niektoré zo siedmych pozícií $\binom{7}{y}$ spôsobmi, je hľadaný počet rovný

$$\sum_{x=6}^{8} \binom{8}{x}\binom{7}{x-6} + \sum_{x=0}^{2} \binom{8}{x}\binom{7}{x+5} = 28 + 56 + 21 + 21 + 56 + 28 = 210.$$

Iné riešenie: Pätnásťmiestne číslo so zápisom $c_1c_2\dots c_{15}$ dáva po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako súčet

$$S = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + c_5 - \dots - c_{14} + c_{15}. \tag{1}$$

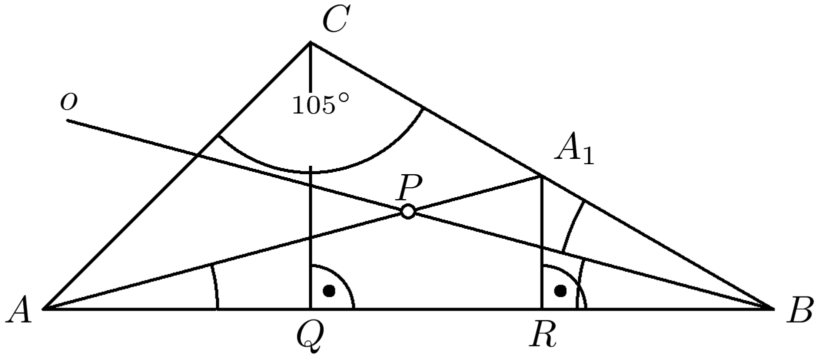
Ak je $c_i \in \{3, 8\}$ pre každé i, potom vzhľadom k tomu, že $8 \equiv -3 \pmod{11}$, dáva súčet S po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako súčet S' s 15-timi členmi

$$S' = \pm 3 \pm 3 \pm 3 \pm \dots \pm 3, \tag{2}$$

v ktorom pred i-tu trojkou (pre každé i) je rovnaké znamienko ako v kongruencii $(-1)^{i+1}c_i \equiv \pm 3 \pmod{11}$. Naopak ku každému súčtu S' tvaru (2) možno podľa posledných kongruencií priradiť jediný súčet S tvaru (1) s ciframi $c_i \in \{3, 8\}$. Hľadaný počet pätnásťmiestnych čísel je preto rovný počtu všetkých tých výberov znamienok v (2), pri ktorých $S' \equiv 0 \pmod{11}$. Pretože každý súčet S' je nepárny násobok troch, ktorý v absolutnej hodnote neprevyšuje číslo 45, zaujímame sa o tie výbery znamienok, pri ktorých $S' = 33$ alebo $S' = -33$. To nastane, práve keď je vybrané 13-krát plus a 2-krát mínus, alebo naopak 13-krát mínus a 2-krát plus. Hľadaný počet je preto rovný $2 \cdot \binom{15}{2} = 210$.

A – II – 2

Označme P priesečník ťažnice AA_1 s osou o uhla ABC uvažovaného trojuholníka (obr. 17). Podľa zadania platí



Obr. 17

$|AP| = |BP|$, takže $|\sphericalangle A_1AB| = \frac{\beta}{2}$, kde $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Označme R a Q kolmé priemety bodov A_1 a C na stranu AB a zvoľme jednotku dĺžky $|BR| = 1$. Pretože A_1R je stredná priečka trojuholníka CQB, platí $|QR| = 1$, $|A_1R| = \operatorname{tg}\beta$, $|CQ| = 2\operatorname{tg}\beta$, takže z trojuholníka ARA_1 plynie

$$|AR| = \frac{|A_1R|}{\operatorname{tg}|\sphericalangle A_1AB|} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

Preto môžeme určiť dĺžku

$$|AQ| = |AR| - |QR| = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} - 1 = \frac{1}{\cos\beta},$$

takže z trojuholníka AQC pre uhol $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ dostávame

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|CQ|}{|AQ|} = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{\dfrac{1}{\cos\beta}} = 2\sin\beta.$$

Pretože $\alpha + \beta = 75^\circ$, vychádza $\operatorname{tg}(75^\circ - \beta) = 2\sin\beta$. Táto rovnosť platí pre $\beta = 30^\circ$, neplatí však pre žiadne iné β z intervalu $I = (0^\circ, 75^\circ)$, lebo jej ľavá strana je na I klesajúca funkcia, zatiaľčo pravá strana funkcia rastúca.
Odpoveď: Uhol pri vrchole A je 45°, pri vrchole B 30°.

Iné riešenie: Zachovajme označenie A_1, P, α a β z prvého riešenia. Znovu si všimnime, že $|\sphericalangle A_1AB| = \frac{\beta}{2}$, a potom napíšme sínusové vety pre trojuholníky AA_1C a AA_1B:

$$\frac{|CA_1|}{|AA_1|} = \frac{\sin(\alpha - \frac{\beta}{2})}{\sin 105^\circ} \quad \text{a} \quad \frac{|BA_1|}{|AA_1|} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\beta} = \frac{1}{2\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Pretože však $|CA_1| = |BA_1|$, plynie odtiaľ rovnosť

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{\beta}{2})}{\sin 105^\circ} = \frac{1}{2\cos\frac{\beta}{2}} \qquad \text{alebo} \qquad \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\cos 15^\circ}{2}.$$

Po dosadení $\alpha = 75^\circ - \beta$ do poslednej rovnosti zistíme podobne ako v prvom riešenie, že $\beta = 30^\circ$ je jediná možná hodnota.

A – II – 3

Označme P a Q stredy hrán AB a CD skúmaného štvorstenu (obr. 18). Z rovnoramenných trojuholníkov ABC a ABD plynie $CP \perp AB$ a $DP \perp AB$, takže steny ACD a BCD sú súmerne združené podľa roviny DPC. Podobne steny CAB a DAB sú súmerne združené podľa roviny ABQ. Preto stred S vpísanej guľovej plochy leží na priesečnici rovín DPC a ABQ, teda na úsečke PQ. Naviac body dotyku tejto guľovej plochy so stenami štvorstenu ležia na úsečkách AQ, BQ, CP a DP. Označme x veľkosť úsečky $|SP|$ a znázornime obidva rovnoramenné trojuholníky ABQ a CDP s hlavnou kružnicou vpísanej guľovej plochy v tej istej rovine (obr. 19). Platí

$$|AQ| = |BQ| = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad |CP| = |DP| = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad |PQ| = \sqrt{c^2 - a^2 - b^2}.$$

Z dvojíc podobných pravouhlých trojuholníkov dostaneme dve vyjadrenia pre polomer ϱ spomínanej kružnice (a vpísanej guľovej plochy):

$$\varrho = \frac{|CQ|\cdot|SP|}{|CP|} = \frac{b\cdot x}{\sqrt{c^2 - a^2}} \quad \text{a} \quad \varrho = \frac{|BP|\cdot|SQ|}{|BQ|} = \frac{a\cdot\left(\sqrt{c^2 - a^2 - b^2} - x\right)}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

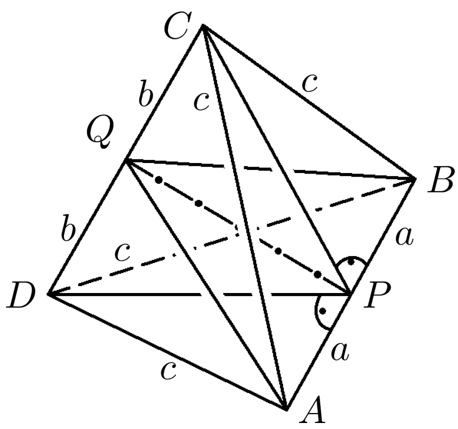
Porovnaním obidvoch vyjadrení dostaneme lineárnu rovnicu pre neznámu x s riešením

$$x = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{a\sqrt{c^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - b^2}}. \tag{$*$}$$

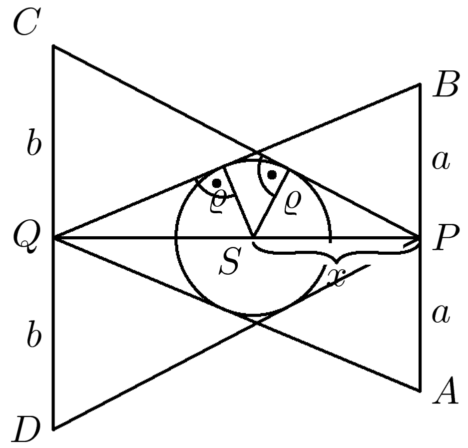
a dosadením do prvej z predchádzajúcich rovností výjde

$$\varrho = \frac{ab\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{a\sqrt{c^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - b^2}}, \tag{$*$}$$

čo je hľadaný polomer guľovej plochy vpísanej danému štvorstenu $ABCD$.



Obr. 18



Obr. 19

Iné riešenie. Využime to, že pre objem V_{ABCD}, povrch S_{ABCD} a polomer ϱ vpísanej guľovej plochy štvorstenu $ABCD$ platí

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\varrho S_{ABCD}, \tag{1}$$

pričom v danom prípade je

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= 2S_{ABC} + 2S_{CDA} = \\ &= 2\bigl(a\sqrt{c^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - b^2}\bigr). \end{aligned}$$

Podobne ako v prvom riešení z vlastností daného štvorstenu zistíme, že hrana AB je kolmá na rovinu CDP, takže objem V_{ABCD} spočítame ako dvojnásobný objem ihlanu $CDPB$ (obr. 18) s podstavou CDP a výškou veľkosti a. Je teda

$$V_{ABCD} = \frac{2}{3}ab|PQ| = \frac{2}{3}ab\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}.$$

Dosadením do vzťahu (1) výjde

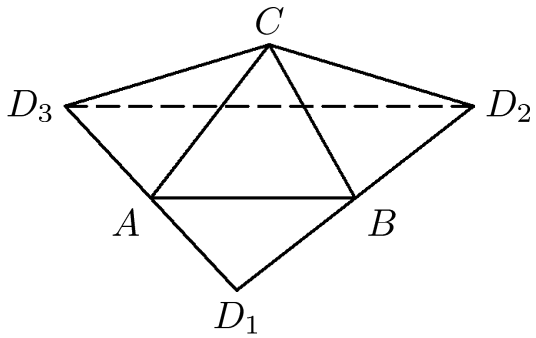
$$\varrho = \frac{ab\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}{a\sqrt{c^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

A – II – 4

Nech n je stupeň hľadaného mnohočlena f (zrejme $f \not\equiv 0$) a nech ax^n je jeho vedúci člen (tj. $f(x) = ax^n + g(x)$, kde g je mnohočlen stupňa $\leqq n-1$, príp. $g \equiv 0$). Veducí člen mnohočlena $f(x)\cdot x\cdot f(1-x)$ je potom rovný $(-1)^n a^2 x^{2n+1}$. Podľa zadania však ľavá strana danej rovnice nemôže byť mnohočlenem nepárneho stupňa. Preto nutne platí $2n+1=3$ a zároveň $(-1)^n a^2 = -1$, takže $n = 1$ a $a = \pm 1$. Mnohočlen f je preto tvaru $f(x) = x + b$ alebo $f(x) = -x + b$, kde b je vhodná konštanta. Pre $f(x) = x + b$ je ľavá strana danej rovnice rovná trojčlenu $x^2 + (b^2 + b)x + 100$, ktorý je nezáporný pre každé x, práve keď $|b^2 + b| \leqq 20$, tj. $b \in \langle -5, 4\rangle$. Pre $f(x) = -x + b$ vychádza trojčlen $x^2 + (b^2 - b)x + 100$ a podmienka $|b^2 - b| \leqq 20$, t.j. $b \in \langle -4, 5\rangle$.
Odpoveď: Hľadané mnohočleny sú $f(x) = x+b$, kde b je ľubovoľné číslo z intervalu $\langle -5, 4\rangle$, a $f(x) = -x + b$, kde b je ľubovoľné číslo z intervalu $\langle -4, 5\rangle$.

A – III – 1

Na obr. 20 je sieť daného štvorstena, ktorá vznikla otočením stien ABD, BCD a CAD



Obr. 20

okolo hrán steny ABC do jej roviny. Rovnosti zo zadania úlohy znamenajú, že ako body D_1, A a D_3, tak aj body D_1, B a D_2 ležia na priamke. Preto je úsečka AB strednou priečkou trojuholníka $D_1D_2D_3$, čo spolu s trojuholníkovou nerovnosťou pre trojicu bodov D_2, C a D_3 vedie k odhadu

$$2|AB| = |D_2D_3| \leqq |D_2C| + |CD_3| = 2|CD|.$$

Tým je nerovnosť $|CD| \geqq |AB|$ dokázaná.

A – III – 2

Pretože číslo 66 nie je deliteľné štyrmi, nemôže platiť $a = g = h = k$, takže ako dobre vieme, platí $h < g < a < k$. Označme c najväčší spoločný deliteľ čísel a, g. Potom $a = ca_1$ a $g = cg_1$, pričom $g_1 < a_1$ sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Pretože $h = \dfrac{g^2}{a} = \dfrac{cg_1^2}{a_1}$, je číslo c deliteľné číslom a_1, teda $c = da_1$ pre vhodné prirodzené číslo d. Dostávame tak vyjadrenie priemerov pomocou čísel d, a_1, g_1:

$$h = dg_1^2,\ g = da_1g_1,\ a = da_1^2,\ k = \sqrt{2a^2 - g^2} = da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}.$$

Pretože druhá odmocnina z prirodzeného čísla je buď prirodzené, alebo iracionálne číslo, musí byť číslo $\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}$ prirodzené (a to väčšie ako a_1, lebo $g_1 < a_1$). Preto je ľavá strana rovnosti

$$dg_1^2 + da_1g_1 + da_1^2 + da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2} = 66 \tag{$*$}$$

väčšia ako $2a_1^2$ (vzhľadom k nerovnosti $d \geqq 1$ stačí uvažovať len tretí a štvrtý sčítanec). Odtiaľ platí $2a_1^2 < 66$, alebo $a_1 \leqq 5$. Ľahko sa zistí, ktorá z desiatich odmocnín

$$\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}, \qquad \text{kde} \quad 1 \leqq g_1 < a_1 \leqq 5,$$

je rovná prirodzenému číslu: taká je len odmocnina $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1^2}$ pre $a_1 = 5$ a $g_1 = 1$. Dosadením do $(*)$ zistíme, že $d = 1$. Priemery $(h, g, a, k) = (1, 5, 25, 35)$ má dvojica koreňov rovnice $t^2 - 50t + 25 = 0$, teda dvojica čísel $\{x, y\} = \{25 + 10\sqrt{6}, 25 - 10\sqrt{6}\}$.

A – III – 3

Označme dané body A_1, A_2, …, A_5, dané priamky p_1, p_2, …, p_5 a rozlíšme dva prípady:

(I) *Na každej danej priamke ležia nanajvýš dva dané body.* Keby $A_i \in p_j \cap p_k$ pre niektoré indexy i a $j \neq k$, platilo by $A_x \in p_j \cup p_k$ pre nanajvýš tri hodnoty x (včítane $x = i$), takže by zostávajúce dva dané body spolu s priamkami p_j, p_k tvorili vhodný výber. V opačnom prípade by každým bodom A_i prechádzala nanajvýš jedna priamka p_j; potom by dokonca niektoré *tri* priamky p_j neprechádzali ani bodom A_1, ani bodom A_2.

(II) *Na niektorej danej priamke ležia aspoň tri dané body.* Nech napríklad body A_1, A_2 a A_3 ležia na priamke p_1. Pretože každá priamka p_j $(j > 1)$ prechádza nanajvýš jedným z bodov A_1, A_2, A_3 (inak by bolo $p_j = p_1$), môžeme jej priradiť dvojprvkovú množinu $M_j \subset \{A_1, A_2, A_3\}$ takú, že $p_j \cap M_j = \emptyset$. Avšak trojprvková množina má len tri rôzne dvojprvkové podmnožiny, takže niektoré dve zo štyroch množín M_2, M_3, M_4 a M_5 sú rovnaké. Pri vhodnom očíslovaní bodov a priamok teda platí $M_2 = M_3 = \{A_1, A_2\}$. To znamená, že je možné vybrať body A_1, A_2 a priamky p_2, p_3.

A – III – 4

Všetky desaťmiestne čísla rozdeľme do skupín tak, aby dve čísla padli do tej istej skupiny, práve keď sú zapísané rovnakým súborom desiatich cifier. Podľa vzorca pre počet kombinácií s opakovaním existuje práve $\binom{19}{9}$ rôznych neusporiadaných súborov desiatich číslic. Pretože je medzi nimi aj súbor desiatich núl, je počet zmienených skupín, do ktorých sme rozdelili všetky desaťmiestne čísla, rovný číslu

$$\binom{19}{9} - 1 = \frac{19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9} - 1 = 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 2 - 1 = 92\,377 < 10^5.$$

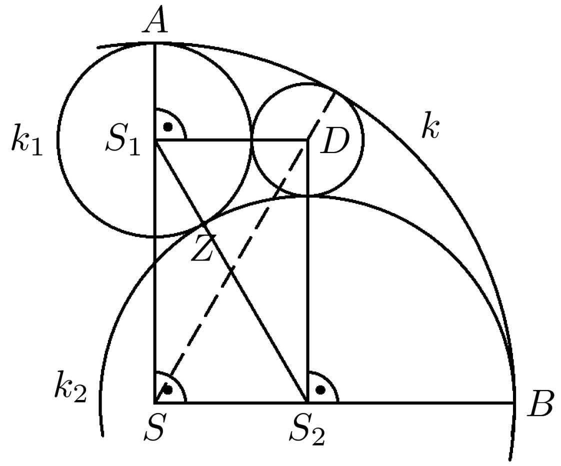
Počet desaťmiestnych násobkov siedmich je však zrejme väčší ako 10^9. Preto sa v niektorej zo zmienených skupín vyskytuje viac ako $10^{9-5} = 10^4$ čísel deliteľných siedmimi. Tvrdenie zo zadania úlohy teda platí.

A – III – 5

Nech $k(S, r)$ a $k_i(S_i, r_i)$ sú uvažované kružnice. Trojuholník SS_1S_2 so stranami dĺžok

$$|SS_1| = r - r_1, \quad |SS_2| = r - r_2, \quad |S_1S_2| = r_1 + r_2 \tag{1}$$

má podľa zadania pravý uhol pri vrchole S. Na obr. 21 je tento trojuholník doplnený na pravouholník SS_1DS_2.



Obr. 21

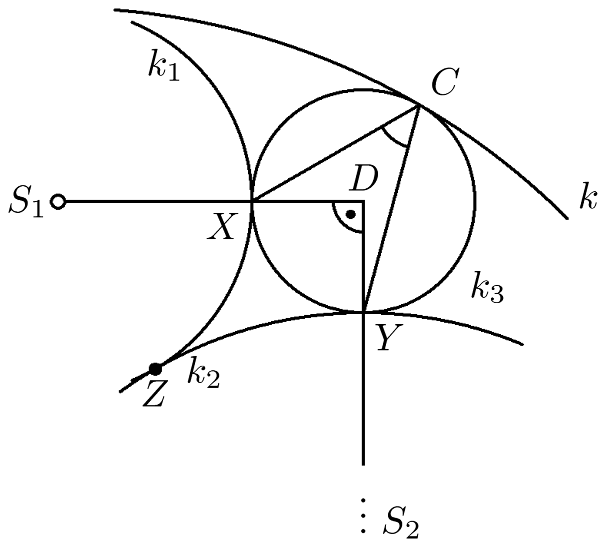
Nový bod D má podľa (1) od bodov S_1, S_2, S vzdialenosti

$$|DS_1| = r - r_2, \quad |DS_2| = r - r_1, \quad |DS| = r_1 + r_2. \tag{2}$$

Z trojuholníkovej nerovnosti $|S_1S_2| < |SS_1| + |SS_2|$ vzhľadom na (1) okamžite dostávame $r_1 + r_2 < r$. Preto je možné uvažovať kružnicu so stredom D a polomerom rovným $r - - r_1 - r_2$ (neoznačená kružnica na obr. 2, ležiaca v uhle ASB). Táto kružnica má podľa (2) všetky vlastnosti kružnice k_3 z textu úlohy: dotýka sa zvnútra kružnice k a zvonku kružníc k_1, k_2. Pretože kružnica k_3 je pre dané kružnice k, k_1 a k_2 jediná, platí $S_3 = D$ a $r_3 = r - r_1 - r_2$. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle to znamená (obr. 22), že

$$|\sphericalangle XCY| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle S_1DS_2| = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°.$$

Tým je dôkaz ukončený.



Obr. 22

A – III – 6

Pre kladné korene a, b, c, $0 < a < b < c$, rovnice (1) musí platiť Pytagorova veta $a^2 + b^2 = c^2$ a Viètove vzťahy

$$a + b + c = 2p(p + 1), \quad ab + bc + ac = p^4 + 4p^3 - 1, \quad abc = 3p^3. \tag{2}$$

Dostávame tak

$$\begin{aligned} 2c^2 &= a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = \\ &= 4p^2(p + 1)^2 - 2(p^4 + 4p^3 - 1) = 2(p^2 + 1)^2, \end{aligned}$$

t.j. $c = p^2 + 1$. Preto zo vzorcov (2) ďalej vyplýva

$$\begin{aligned} a + b &= 2p(p + 1) - c = p^2 + 2p - 1, \\ ab &= p^4 + 4p^3 - 1 - c(a + b) = 2p^3 - 2p. \end{aligned}$$

Čísla a, b sú teda korene kvadratickej rovnice

$$u^2 - (p^2 + 2p - 1)u + 2p^3 - 2p = 0,$$

čo sú (po jednoduchom výpočte) čísla $2p$ a $p^2 - 1$. Odtiaľ vyplýva nutná podmienka $p > 1$. Čísla $2p$, $p^2 - 1$, $p^2 + 1$ sú korene (1), práve keď spĺňajú tretí Viètov vzťah

$$2p(p^2 - 1)(p^2 + 1) = 3p^3, \quad \text{alebo} \quad p(2p^2 + 1)(p^2 - 2) = 0.$$

S prihliadnutím na $p > 1$ tak dostávame jediné riešenie $p = \sqrt{2}$. Koreňmi (1) sú v tomto prípade tri čísla 1, $2\sqrt{2}$ a 3.

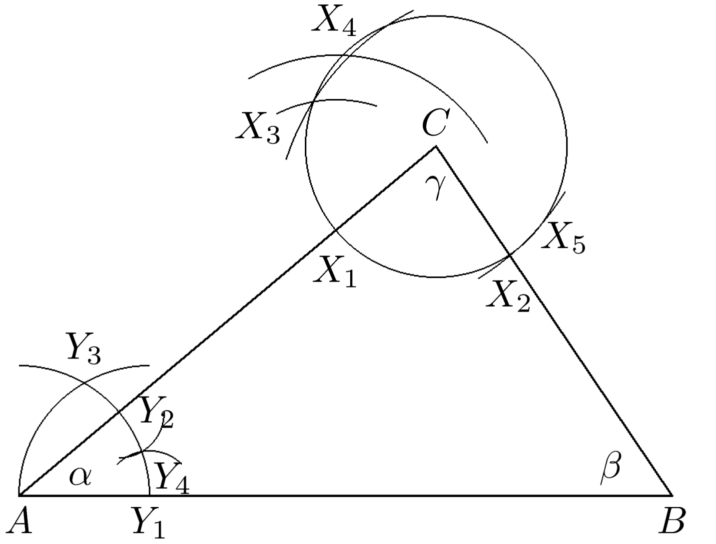
Vyhodnotenie súťaže v kategórii C

V tomto ročníku matematickej olympiády vyhlásila ÚK MO súťaž pre riešiteľov kategórie C. V letáku so zadaniami domáceho kola bolo zadanie úlohy č.6 (pozri úloha C – I – 6) rozšírené a najlepšie riešenia mali žiaci zasielať na adresu ÚK MO. Do súťaže sa zapojilo 19 študentov, z toho 13 úlohu vyriešilo správne. Najčastejším riešením bolo overenie veľkostí uhlov na 10 krokov (8 riešiteľov). Na druhej strane všetci neúspešní riešitelia dokázali iba vzťah $\beta\colon\gamma = 2\colon 3$ resp. nejaký iný vzťah medzi uhlami α, β, γ (napr. $\gamma = 2\alpha + 60 - \beta$, $\gamma + \beta = 140^\circ$), čo spolu so vzťahom $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ nestačí na vyriešenie úlohy. Našli sa riešitelia, ktorí zabudli svoju úvahu obrátiť. Ukázali iba, že ak v trojuholníku ABC sú uhly danej veľkosti, potom je „dobrá“ ich konštrukcia.

Výsledky súťaže: (riešitelia, ktorí našli správny postup na 10 a menej krokov)
9 krokov:
Ján Troják, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,
Peter Novotný, 8, ZŠ Hliny V, Žilina.
10 krokov:
Anita Baranová, Gymnázium Svidník,
Peter Bodík, Gymnázium Poštová, Košice,
František Király, Gymnázium Trebišovská, Košice,
Matúš Medo, Gymnazium Poštová, Košice,
Ivan Moravčík, Gymnázium Pezinok,
Martin Ševčík, Gymnázium Trenčín,
Ján Špakula, Gymnázium Poštová, Košice,
Vladimír Zajac, 7, Gymnázium Grösslingová, Bratislava.
Ešte spomeňme *Petru Polovkovú z Gymnázia v Spišskej Novej Vsi*, ktorá našla konštrukciu na 8 krokov, ale jej overenie správnosti riešenia bolo neúplné. Všetkým úspešným riešiteľov tatko gratulujeme. Tu uvedieme dve z Vašich riešení (trocha upravené).

Riešenie 1 (*Ján Troják, Gymnázium, Veľká Okružná, Žilina; 9 krokov)*
Najprv overíme, že $\alpha = 40^\circ$. Zostrojme kružnice $\ell_1(A, r)$, $\ell_2(Y_1, r)$, kde $Y_1 \in \ell_1 \cap AB$ a r je ľubovoľný vhodný polomer. Označme $Y_2 \in \ell_1 \cap AC$, $Y_3 \in \ell_2 \cap \ell_1$ (obr. 23). Ďalej zostrojme kružnice $\ell_3(Y_2, |Y_2Y_3|)$, $\ell_4(Y_1, |Y_2Y_3|)$. Vieme, že $|\sphericalangle Y_1AY_2| = 60^\circ$. Pokiaľ sa kružnice ℓ_3, ℓ_4 pretnú v bode Y_4 ležiacom na kružnici ℓ_1 bude $|\sphericalangle Y_2AY_3| = |\sphericalangle Y_4AY_2| = |\sphericalangle Y_1AY_4| = \frac{1}{3}60^\circ = 20^\circ$ a $\alpha = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$. Uvedenú úvahu môžeme obrátiť (pokiaľ $\alpha = 40^\circ$ pretnú sa kružnice ℓ_3, ℓ_4 na kružnici ℓ_1) a veľkosť uhla α je overená.
Namiesto $\beta = 56^\circ$ budeme overovať rovnosť $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 84^\circ$. Pre ľubovoľný vhodný polomer r_1 zostrojme kružnice $k_1(C, r_1)$, $k_2(X_1, r_1)$, kde $X_1 \in k_1 \cap AC$. Označme $X_2 \in k_1 \cap BC$, $X_3 \in k_1 \cap k_2$ tak, aby body X_2, X_1, X_3 boli usporiadané na kružnici k_1 v smere pohybu hodinových ručičiek. Zostrojme uhol 5γ s vrcholom v bode C. To sa dá napr. takto: zostrojme kružnice $k_3(X_1, |X_1X_2|)$, $k_4(X_4, |X_2X_4|)$, $k_5(X_5, |X_2X_4|)$, kde $X_4 \in k_1 \cap k_3$, $X_5 \in k_1 \cap k_4$, pričom berieme tie priesečníky kružníc $k_1 \cap k_3$, $k_1 \cap k_4$, aby body X_5, X_2, X_1, X_4 boli na kružnici k_1 usporiadané v smere pohybu hodinových ručičiek.

Pokiaľ sa kružnice k_5, k_1 pretnú v bode X_3 z konštrukcie vyplýva, že $\gamma + 2\gamma + 2\gamma = 360° + 60°$ t.j. $\gamma = 84°$. Uvedenú úvahu je možné obrátiť (pokiaľ $\gamma = 84°$ kružnice sa pretnú v bode X_3) a máme veľkosť uhla γ overenú.



Obr. 23

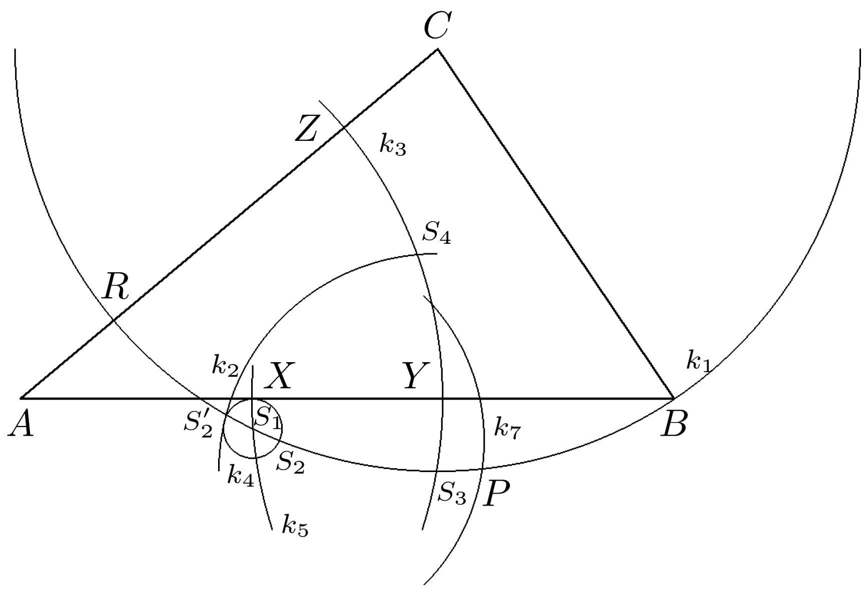
Ak zvolíme vhodne polomery kružníc, ktorých stredy sú vo vrcholoch trojuholníka ABC je možné overiť veľkosť uhlov na 8 krokov. Autorom myšlienky je *Petra Polovková z Gymnázia v Spišskej Novej Vsi* (škoda, že jej riešenie nie je úplné). Zobrala v úvahu, že kružnicovým oblúkom rovnakej dĺžky, ktoré ležia na kružniciach s rovnakým polomerom odpovedajú rovnako veľké stredové uhly.

Riešenie 2

Zostrojme kružnice $k_1(C, |BC|)$, $k_2(B, |BC|)$, $k_3(A, |BC|)$ a označme $R \in k_1 \cap AC$, $S_1 \in k_2 \cap k_1$, $X \in k_2 \cap AB$, $S_3 \in k_3 \cap k_1$, $Z \in k_3 \cap AC$, $Y \in k_3 \cap AB$ (obr. 24). Vieme, že $|\sphericalangle S_1BC| = 60°$, a tak $|\sphericalangle XBS_1| = 60° - \beta$. Veľkosť oblúka $\overset{\frown}{XS_1}$ prenesme na kružnicu k_1, t.j. zostrojme kružnicu $k_4(S_1, |S_1X|)$ a označme $\{S_2', S_2\} = k_1 \cap k_4$. Dostali sme, že

$$
\begin{aligned}
|\sphericalangle S_1CS_2| = |\sphericalangle S_1CS_2'| = |\sphericalangle XBS_1| = 60° - \beta \ , \\
|\sphericalangle RCS_2| = (\gamma - 60°) + (60° - \beta) = \gamma - \beta \ , \\
|\sphericalangle RCS_2'| = (\gamma - 60°) - (60° - \beta) = \gamma - 120° + \beta \ .
\end{aligned}
$$

Prenesme veľkosť oblúka $\overset{\frown}{RS_2}$ na kružnicu k_3 to znamená zostrojme kružnicu $k_5(S_3, |S_3S_2'|)$ a označme $S_4 \in k_5 \cap k_3$. Platí potom $|\sphericalangle ZAS_4| = |\sphericalangle RCS_2'| = \gamma + \beta - 120°$. Zostrojme kružnicu $k_6(S_4, |S_4Z|)$. Ak kružnica k_6 prechádza bodom Y, potom $\alpha = 2(\gamma + \beta - 120°)$. Ďalej zostrojme kružnice $k_7(S_2, |S_2R|)$, $k_8(B, |S_2R|)$. Ak sa kružnice k_7, k_8 pretnú na kružnici k_1, potom platí $|\sphericalangle RCB| = 3|\sphericalangle RCS_2|$ t.j. $\gamma = 3(\gamma - \beta)$.



Obr. 24

Získali sme tri rovnice:

$$\gamma = 3(\gamma - \beta) \ ,$$
$$\alpha = 2(\gamma + \beta - 120^\circ) \ ,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \ ,$$

ktorých riešením sú $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 56^\circ$, $\gamma = 84^\circ$.
Úvahu je možné obrátiť (ak $\alpha = 40^\circ$ kružnica k_6 prechádza bodmi Y, Z, ak $\gamma = 84^\circ = 3 \cdot 28^\circ$ kružnice k_7, k_8 sa pretnú na kružnici k_1) a máme overenú veľkosť uhlov.
Rovnaká súťaž ako na Slovensku prebiehala v tom istom čase aj v Českej republike. Výsledok súťaže bol podobný. Avšak vyskytlo sa tam jedno úplne výnimočné riešenie, ktoré poslal ešte len 13–ročný žiak, ktoré potrebovalo len 5 krokov. V tomto riešení boli využité oveľa hlbšie vzťahy ako v predchádzajúcich dvoch.

Riešenie 3 (*Martin Viščor, Gymnázium tř. kpt. Jaroše, Brno; 5 krokov)*
Zostrojme najprv kružnicu k_1 so stredom A a polomerom $|AC|$, jej druhý priesečník so stranou BC označme D. Ďalej zostrojme kružnicu k_2 so stredom D a polomerom $|DB|$, jej druhý priesečník s AB označme E; potom kružnicu k_3 so stredom E a polomerom $|ED|$ a jej druhý priesečník s $|BC|$ označme F, priesečník s AB označme G a priesečník s k_2 označme H. Zostrojme ešte kružnicu k_4 so stredom F a polomerom $|FH|$ a označme I jej druhý priesečník s k_3. Napokon zostrojme kružnicu k_5 so stredom I a polomerom $|ID|$. Ďalšie úvahy využívajú predovšetkým mnoho rovnoramenných trojuholníkov a to, že uhly pri zákaldni rovnoramenného trojuholníka sú zhodné. Z toho odvodíme:$\delta = 180^\circ -$ $- 2\beta, \beta_2 = 180^\circ - 2\delta = 4\beta - 180^\circ, \beta_1 = \beta - be_2 = 180^\circ - 3\beta$. Keďže body I, F a H ležia spolu na kružnici k_4, platí tiež $|\sphericalangle IEF| = |\sphericalangle FEH|$, teda $\beta_3 = |\sphericalangle IEF| = |\sphericalangle GEH| + \beta_1$. Potom ale z rovnostranného trojuholníka EHD dostávame $|\sphericalangle GEH| = 60^\circ - \beta$, čiže spolu

$|\sphericalangle IEG| = \beta_1 + \beta_3 = 180° - 3\beta + 60° - \beta + 180° - 3\beta = 420° - 7\beta$. Testo správnosti veľkosti uhlu β bude teraz to, či kružnice k_5 prechádza bodom G. V tom prípade platí $|\sphericalangle DEI| = |\sphericalangle IEG|$. Keďže však $|\sphericalangle DEI| + |\sphericalangle IEG| = |\sphericalangle DEG| = \beta$, znamená to, že $\frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle IEG| = 420° - 7\beta$, teda $\beta = \frac{1}{15}840° = 56°$.
Zostáva ešte overiť veľkosť uhlu α. Opäť pomocou rovnoramenných trojuholníkov overíme vzťahy $\gamma = 180° - \delta - \omega = 2\beta - \omega, \alpha_1 = 180° + 2\omega - 4\beta, \alpha_2 = \beta - \omega$. Testom správnosti veľkosti uhlu α bude to, či kružnica k_3 prechádza bodom A. Pokiaľ áno, platí $\alpha_2 = \omega$, čiže $\alpha_2 = \omega = \frac{1}{2}\beta$. Potom už možno sčítať $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 180° + 2\omega - 4\beta + \frac{1}{2}\beta = 180° - 140° = 40°$. Tým sme overenie skončili.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Niektoré spoločnosti sú čiastočnými vlastníkmi iných spoločností, lebo vlastnia časť ich akcií. Napríklad podnik môže vlastniť povedzme 12% iného podniku. Budeme hovoriť, že spoločnosť A ovláda spoločnosť B, ak je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:
– $A = B$,
– A vlastní viac než 50% B,
– A ovláda k ($k \geqq 1$) spoločností $C(1), \ldots, C(k)$ takých, že $C(i)$ vlastní $x(i)$% spoločnosti B pre $1 \leqq i \leqq k$ a platí $x(1) + \ldots + x(k) > 50$.

Napíšte program, ktorý v čo najkratšom čase vyrieši nasledujúcu úlohu. Daný je zoznam trojíc (i, j, p), ktoré označujú, že spoločnosť i vlastní p% spoločnosti j. Určte všetky dvojice (h, s) také, že spoločnosť h ovláda spoločnosť s. Výsledkom je zoznam dvojíc (h, s) vzostupne usporiadaný podľa h.

P – I – 2

Učebný text.
Typizované kocky v trojrozmernom priestore sú pre účely uchovania informácií v počítači kódované nezápornými prirodzenými číslami, ktoré sú zložené z číslic $1, \ldots, 8$. Súradnicová sústava, v ktorej je umiestnená základná typizovaná kocka, má začiatok v ťažisku a súradnicové osi sú kolmé na steny kocky. Nech $A[x, y, z]$ je niektorý vnútorný bod typizovanej kocky. Potom 8 vzniknutých typizovaných kociek má kódy $1, \ldots, 8$ podľa nasledujúcej tabuľky:

kód kocky	1	2	3	4	5	6	7	8
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

Každú z ôsmich takto vzniknutých typizovaných kociek možno rozdeliť podobným spôsobom na 8 typizovaných kociek, ktorých kódy sú teraz $11, \ldots, 88$ atď. Kód takto vzniknutých menších typizovaných kociek dostaneme pridaním zodpovedajúcej jednej cifry (pozri tabuľka) na pravý koniec kódu bezprostredne nadradenej typizovanej kocky. Týmto spôsobom sa dajú typizované kocky deliť bez obmedzenia.
Súťažná úloha:
Daný je kód typizovanej kocky a postupnosť jej pohybov o jednu dĺžku jej hrany ako konečný reťazec písmen z množiny { R,L,U,D,F,B } tak, že
– R a L sú posun v kladnom a zápornom smere osi x,
– U a D sú posun v kladnom a zápornom smere osi y,

– F a B sú posun v kladnom a zápornom smere osi z.
Napíšte program, ktorý prečíta kód jednej typizovanej kocky a postupnosť jej pohybov a na výstupe vypíše kódy všetkých typizovaných kociek, ktorými bude daná kocka prechádzať. Ak pri svojom pohybe prekročí hranicu základnej kocky, potom program o tom podá vhodnú správu.

P – I – 3

Na biely list papiera (šírka a cm, dĺžka b cm) položíme N obdĺžnikov rôznych farieb. Ich strany sú rovnobežné s okrajmi papiera. Teraz vidíme obrazce rôznych farieb. Dve oblasti rovnakej farby považujeme za časti toho istého obrazca, ak majú spoločný aspoň jeden bod, ináč ich považujeme za rôzne obrazce. Určte plochu obdĺžnikov, ktorá je mimo papiera (t.j. musela byť odrezaná).
Predpokladaný súradnicový systém má začiatok v ľavom dolnom rohu a osi rovnobežné s okrajmi papiera. Šírka je na osi y. Údaje pre úlohu sú celé nezáporné čísla a majú tvar:
– a, b, N sú v prvom riadku,
– súradnice ľavého dolného rohu, dĺžka, šírka, farba obdĺžnika sú v ďalších N riadkoch
Obdĺžniky sú na vstupe v tom poradí, ako sú uložené na papieri. Biela farba má kód 1, ostatné farby majú kódy 2 až 64.
Napíšte program, ktorý určí farbu a plochu všetkých obrazcov a vypíše ich v poradí podľa rastúceho čísla farby. Na poslednom riadku uvedie súčet veľkostí všetkých zvyškov, ktoré presahovali cez okraj papiera.

P – I – 4

Učebný text.
T-stroj je tvorený *riadiacou jednotkou*, ktorá má konečnú pamäť (t.j. môže sa nachádzať v konečne veľa *stavoch*) a *nekonečnú pásku*, rozdelenú na políčka. V každom políčku môže byť zapísaný jeden znak *abecedy*, alebo je políčko prázdne, t.j. obsahuje špeciálny symbol @. *Čítacia/zapisovacia hlava* T-stroja je umiestnená vždy nad určitým políčkom pásky a môže sa pohybovať vľavo alebo vpravo vždy o jedno políčko.
Výpočet T-stroja prebieha po *taktoch.* Na začiatku výpočtu je T-stroj v *počiatočnom stave* a na páske je zapísaná postupnosť znakov vstupnej abecedy (*vstupné slovo*) a je určená počiatočná poloha čítacej hlavy nad páskou. V každom takte výpočtu T-stroj prečíta znak z políčka, nad ktorým je čítacia hlava. Na základe tohoto znaku a stavu riadiacej jednotky (*konfigurácia T-stroja*) sa zapíše nejaký znak do toho istého políčka, riadiaca jednotka môže zmeniť svoj stav a čítacia hlava sa môže posunúť o jedno políčko doľava, doprava, alebo môže zostať nad tým istým políčkom. V priebehu činnosti T-stroja môžu byť na pásku zapisované okrem znakov vstupnej abecedy aj znaky z *pracovnej abecedy.* Činnosť T-stroja končí v okamihu, keď prejde do stavu, v ktorom je vykonaný príkaz STOP, alebo, keď už nie je určené, ako má jeho činnosť pokračovať pri kombinácii niektorého stavu a prečítaného znaku. Ak sa T-stroj *zastaví*, povieme, že prepísal vstupné slovo na *výstupné slovo.*
T-stroj môže *rozhodovať* niektoré problémy, na ktoré sú možné odpovede *áno/nie.* Ak sa T-stroj rozhodne odpovedať áno, skončí svoju činnosť v určitom pevne stanovenom stave, povedzme Sk. Ak sa T-stroj rozhodne odpovedať nie, skončí svoju činnosť v stave

rozdielnom od Sk.

Činnosť T-stroja sa dá popísať riadiacimi štruktúrami Pascalovského typu, menovite sa dajú použiť podmienené príkazy a cykly typu *repeat* a *while.* Návestie pred príkazom označuje stav T-stroja. Stav S0 je spravidla počiatočným stavom T-stroja. Jediná premenná s menom *znak* obsahuje znak políčka, nad ktorým je čítacia hlava, slová *right* a *left* označujú smer pohybu čítacej hlavy po páske. Príkaz STOP označuje ukončenie výpočtu T-stroja. Ak v popise T-stroja nie je uvedená reakcia na určitú konfiguráciu (t.j. čítaný znak a stav riadiacej jednotky), činnosť T-stroja tiež končí.

Príklad: Zistite, či kladné číslo, zapísané na páske v binárnej číselnej sústave, je nepárne. Čítacia hlava je nad číslicou najvyššieho rádu.

Riešenie: Párnosť alebo nepárnosť čísla v binárnej sústave určuje číslica najnižšieho rádu. Pokiaľ je 1, je číslo nepárne. Na riešenie našej úlohy presunieme čítaciu hlavu bez akéhokoľvek zápisu nad poslednú cifru tak, že čítaciu hlavu presunieme nad prvé voľné políčko za číslom, vrátime sa na poslednú číslicu a túto otestujeme. Ak je 1, T-stroj sa zastaví v stave S2 a odpoveď je áno, v opačnom prípade sa T-stroj zastaví v stave S1 a odpoveď je nie.

```
S0: while znak<>@ do begin right end;
    begin left; S1 end;
S1: if znak = 1 then begin S2 end;
S2: STOP  slo je neprne ;
```

Príklad: Na páske je nezáporné celé číslo n, zapísané v binárnej číselnej sústave a čítacia hlava je nad číslicou najvyššieho rádu. T-stroj zapíše na pásku číslo $n+1$.

Riešenie: T-stroj otestuje číslicu najnižšieho rádu, pripočíta k nej jednotku a urobí všetky nutné prenosy do vyšších rádov.

```
S0: while znak<>@ do begin right end;
    begin left; S1 end;
S1: if znak = 0 then begin znak:=1; S3 end;
                else S2;
S2: while znak = 1 do begin znak:=0; left end;
    begin znak:=1 S3; end;
S3: STOP  n+1 ;
```

Poznámka: Z uvedených príkladov vyplýva, že priraďovací príkaz znamená zápis do políčka pásky, nad ktorým je čítacia hlava a príkaz Sk znamená zmenu stavu T-stroja na stav Sk. Reakciu T-stroja na konfiguráciu v danom takte zapisujeme do zátvoriek *begin* a *end.*

Súťažné úlohy:

a) Popíšte činnosť T-stroja, ktorý rozhodne, či celé nezáporné dekadické číslo je deliteľné tromi.

b) Na páske T-stroja je vstupné slovo, zložené z písmen a, b. Prepíšte toto vstupné slovo na rovnaké miesto pásky tak, aby výstupné slovo malo rovnaký počet písmen a, b ako vstupné slovo a všetky písmená a vo výstupnom slove predchádzali všetkým písmenám b.

P – II – 1

Predpokladajte, že istá banka vlastní základný kapitál v m $(1 \leqq m \leqq 10)$ rôznych menách vo výške $z[1], \ldots, z[m]$, ktoré sa nedajú navzájom zamieňať. Do banky prichádzajú klienti, aby si požičiavali peniaze, ktoré chcú investovať. Počet klientov je n ($n \leqq 1000$). Pri prvom príchode udá klient bankovému úradníkovi svoje celkové požiadavky na výšku pôžičky v jednotlivých menách. Pokiaľ jeho požiadavky na jednotlivé meny neprevýšia základný kapitál banky, je s klientom uzatvorená zmluva o pôžičke, ktorú môže klient postupne čerpať a po dokončení svojich obchodov (po uspokojení všetkých jeho požiadaviek) pôžičku zase vráti.

Napíšte algoritmus, ktorým sa riadi lojálny bankový úradník pri každej návšteve klienta v banke, ktorý chce čerpať ďalšiu časť svojej pôžičky. Snahou tohto úradníka je nepripustiť bankrot banky. Bankrot banky nastane, keď táto banka nie je schopná plniť svoje zmluvné záväzky, t.j. nebude schopná vyhovieť klientom v ich požiadavkách podľa ich zmluvy. Napríklad, ak banka vlastní 10 jednotiek jednej meny, požiadavky dvoch klientov boli 7 jednotiek a úradník každému z nich poskytol pôžičku 4 jednotky - banke ostali 2 a to nestačí ani pre jedného na zmluvný záväzok 7 - banka zbankrotovala. Bankový úradník teda musí preveriť, či poskytnutím ďalšej pôžičky klientovi nepríde v budúcnosti k bankrotu banky. Pokiaľ by takáto situácia mohla nastať, odkáže úradník klienta na neskoršiu dobu.

Príklad: Nech banka vlastní 10 jednotiek istej jednej meny ($m = 1$) a prijala 3 klientov s celkovými požiadavkami 8, 3 a 9 jednotiek a títo klienti už majú požičaných 4, 2 a 2 jednotky. V danej situácii požiadavka druhého klienta na jednu jednotku je akceptovaná, ale tretí zákazník je so svojou požiadavkou na jednu jednotku odkázaný na neskoršiu dobu.

číslo klienta	*maximálna požiadavka*	*požičané*	*požaduje A*	*požaduje B*
1	8	4	—	—
2	3	2	1	—
3	9	2	—	1

A - Poiadavka klienta akceptovan *B - Klient odkzan na neskoriu dobu*

Poznámka: Predpokladajte, že klient svoj dlh vráti, ale až potom, ako mu je poskytnutá pôžička v maximálnej výške.

Váš program prečíta číslo klienta, jeho požiadavky na niektoré z m rôznych mien, ktoré boli uvedené v zmluve a to všeobecne v situácii, keď už klienti majú požičané isté čiastky a vypíše správu buď `POIADAVKA KLIENTA AKCEPTOVAN` (t.j. dostal všetky čiastky, o ktoré momentálne požiadal) alebo `KLIENT ODKZAN NA NESKORIU DOBU` (t.j. nedostal nič, musí prísť požiadať znovu).

P – II – 2

Učebný text pozri úloha P – I – 2, strana 54.

Množinu typizovaných kociek K nazveme súvislou ak spĺňa nasledujúcu induktívnu definíciu:

- jednoprvková množina je súvislá,
- nech L je súvislá množina typizovaných kociek, a je typizovaná kocka, ktorá stenou susedí s aspoň jednou typizovanou kockou z množiny L a neleží v žiadnej kocke z L. Potom $K = L \cup \{a\}$ je tiež súvislá množina.

Zistite pre zadanú vstupnú množinu typizovaných kociek, či ide o súvislú množinu. Uvážte, že kocky nemusia byť rovnako veľké.

P – II – 3

Biely list papiera so šírkou a cm a dĺžkou b cm ($a < b$) je stočený nasledovne. Protiľahlé okraje tohto listu s väčším rozmerom sú zlepené, vznikne teda rotačný valec. Na tento valec je poukladaných cez seba N obdĺžnikov rôznych farieb. Strany poukladaných obdĺžnikov sú rovnobežné s okrajmi papiera. Po položení všetkých obdĺžnikov vidíme obrazce rôznych farieb. Dve oblasti rovnakej farby považujeme za časti toho istého obrazca, ak majú aspoň jeden spoločný bod. Inak sú považované za rôzne obrazce.

Predpokladaný súradnicový systém má začiatok v ľavom dolnom rohu a osi sú rovnobežné s okrajmi listu. Celočíselné nezáporné údaje pre zadanie úlohy sú uvedené v nasledujúcom tvare:

– V prvom riadku sú uvedené hodnoty a, b, N.
– V každom z nasledujúcich N riadkov sú uvedené údaje o jednom ukladanom obdĺžniku a to v tom poradí, v ktorom budú ukladané na list papiera. Na každom riadku sú uvedené súradnice bodu, do ktorého bude položený ľavý dolný vrchol obdĺžnika, jeho šírka a dĺžka a kód farby obdĺžnika. Biela farba má kód 1 a ostatné farby sú kódované číslami 2 až 64.

Napíšte program, ktorý určí farbu a plochu každého obrazca (v centimetroch štvorcových) a vypíše ich v poradí, ktoré je dané rastúcim číslom farby. V poslednom riadku uvedie súčet veľkostí (v centimetroch štvorcových) všetkých zvyškov, ktoré presahovali cez okraj valca (t.j. museli byť odrezané).

P – II – 4

Učebný text pozri úloha P – I – 4, strana 55.

a) Na páske T-stroja je vstupné slovo, zložené zo znakov a, b. Zistite, či táto postupnosť obsahuje rovnaký počet znakov a aj b. Po skončení činnosti musí byť na páske pôvodné vstupné slovo, pokiaľ obsahuje rovnaký počet znakov a aj b.

b) Na páske T-stroja je vstupné slovo, zložené zo znakov a, b a c. T-stroj zdvojí túto postupnosť tak, že za pôvodnú postupnosť pripíše postupnosť, ktorej znaky sú uvedené v opačnom poradí, t.j. výstupné slovo má rovnaké poradie znakov, ak by sme tieto znaky čítali zľava i sprava.

Poznámka: Výstupné slovo, ktoré vznikne riešením úlohy b), sa nazýva palindrom.

P – III – 1

Učebný text pozri úloha P – I – 2, strana 54.

Daná je množina typizovaných kociek K. Priemety typizovanej kocky do súradnicových rovín xy, yz a xz (typizované štvorce) sú kódované iba kódmi príslušnej súradnicovej roviny. Napríklad priemety typizovaných kociek sú v rovine xy kódované číslami 1, 2, 3, 4 (predstavte si teda, že sa na zadané typizované kocky pozeráte kolmo na rovinu xy

z kladného smeru osi z). Analogicky možno postupovať v prípade priemetov do ostatných rovín.

Nech M a M_{min} sú dve množiny takých typizovaných štvorcov, že M je priemet množiny typizovaných kociek z K do niektorej súradnicovej roviny. Množinu M_{min} nazveme minimálnou k M, pokiaľ platia súčasne podmienky:

1. M a M_{min} pokrývajú tú istú oblasť v danej súradnicovej rovine, t.j. keď sa pozrieme na priemet množiny K do danej súradnicovej roviny a porovnáme obrazec s M_{min}, vidíme zhodné obrazce.
2. Počet typizovaných štvorcov v M_{min} je minimálny.

Určte pre zadanú vstupnú množinu K typizovaných kociek jej minimálne priemety do všetkých troch súradnicových rovín.

P – III – 2

Biely list v tvare obdĺžnika vytvorený z nekonečne tenkého a absolútne pružného materiálu šírky a cm a dĺžky b cm ($a < b$) má začiatok súradnicovej sústavy v ľavom hornom rohu a osi sú rovnobežné s okrajmi listu. Tento list je zdeformovaný tak, že jeho protiľahlé dlhšie okraje sú zlepené, čím vznikne rotačný valec. Ďalej zlepíme obe základne takto vzniknutého valca. Vznikne priestorové teleso, ktoré pripomína pneumatiku (v matematike sa takéto teleso zvykne nazývať toroid). Umiestnenie súradnicových osí vzhľadom k pôvodnému listu pritom zostáva zachované.

Na toto teleso je poukladaných cez seba N obdĺžnikov vytvorených z nekonečne pružného materiálu rôznych farieb. Strany obdĺžnikov sú rovnobežné so súradnicovými osami. Po položení všetkých obdĺžnikov sú vidieť rôzne obrazce rôznych farieb. Dve oblasti rovnakej farby považujeme za súčasť toho istého obrazca, ak majú aspoň jeden spoločný bod. Inak sú považované za rôzne obrazce.

Celočíselné nezáporné údaje pre zadanie úlohy sú uvedené v nasledujúcom tvare:

– V prvom riadku sú uvedené hodnoty a, b, N.
– V každom z nasledujúcich N riadkov sú uvedené údaje o jednom ukladanom obdĺžniku a to v tom poradí, v ktorom sú ukladané na list papiera. V každom riadku sú uvedené súradnice bodu, do ktorého bude položený ľavý dolný vrchol obdĺžnika, jeho šírka, dĺžka a kód farby obdĺžnika. Biela farba má kód 1, ostatné farby majú kódy 2 až 64.

Napíšte program, ktorý určí farbu a plochu každého obrazca (v centimetroch štvorcových) a vypíše ich v poradí, ktoré je dané rastúcim číslom farby.

P – III – 3

Učebný text pozri úloha P – I – 4, strana 55.

Unárna číselná sústava.

Celé nezáporné čísla možno na páske T-stroja zapísať v unárnej číselnej sústave ako postupnosti znakov „|“. Dĺžka takejto postupnosti je o jedna väčšia ako hodnota zapisovaného čísla. Napríklad číslo 5 je zapísané na páske ako „||||||“, číslo 2 ako „|||“, atď. Nula je zapísaná ako „|“.

Súťažné úlohy:

Čísla sú na páske zapisované v unárnej sústave. Čítacia hlava T-stroja je v oboch prípadoch nad najľavejším znakom vstupného slova.

a) Vstupným slovom T-stroja je dvojica celých nezáporných čísel, ktoré sú oddelené znakom „$*$“. T-stroj na pásku zapíše v unárnej sústave hodnotu ich súčinu.
Príklad: T-stroj prepíše vstupné slovo „$|||| * |||$“ na výstupné slovo „$||||||||$“.

b) Vstupným slovom T-stroja je dvojica celých kladných čísel, ktoré sú oddelené znakom „$*$“. T-stroj na pásku zapíše v unárnej sústave hodnotu ich najväčšieho spoločného deliteľa.
Príklad: T-stroj prepíše vstupné slovo „$|||||| * |||||$“ na výstupné slovo „$|||$“.

P – III – 4

Ekonomická situácia spôsobila, že sa mnoho spoločností zadĺžilo. Každá spoločnosť môže byť aj veriteľom (predáva svoje výrobky) aj dlžníkom (kupuje suroviny a polotovary). Aby bolo možné minimalizovať celkovú zadĺženosť, bolo dohodnuté, že je možné, aby sa spoločnosti oddĺžili tým, že svoje dlhy budú splácať dlhmi, ktoré u nich majú iné spoločnosti.
Ak napríklad spoločnosť 1 dlží 100$ spoločnosti 2, spoločnosť 2 dlží 50$ spoločnosti 3 a spoločnosť 3 dlží 75$ spoločnosti 1, je celkový dlh 225$, ale po započítaní vzájomných pohľadávok dlží spoločnosť 1 spoločnosti 2 sumu 25$ a spoločnosť 3 dlží 25$ spoločnosti 2, takže celkový dlh je teraz iba 50$.
Spoločnosti sú označené celými číslami. Môžete predpokladať, že ich nie je viac ako 1000. Dlh je uvedený v celých jednotkách meny.
Napíšte program, ktorý vysporiada vzájomné pohľadávky spoločností tak, aby celkový dlh bol minimálny.

P – III – 5

V meste vedú všetky cesty buď zo západu na východ alebo zo severu na juh. Cesty sú očíslované celými číslami. Na západnom a južnom okraji mesta existujú dve navzájom kolmé cesty s číslami 0. Pre každú ďalšiu cestu platí, že jej číslo predstavuje vzdialenosť od s ňou rovnobežnej cesty 0. Každú križovatku ciest označíme dvojicou čísiel (i, j), kde i je číslo cesty vedúcej zo západu na východ a j je číslo cesty vedúcej zo severu na juh cez túto križovatku (križovatka $(0, 0)$ teda leží na juhozápadnom okraji mesta).
Dopravné predpisy v meste zakazujú na všetkých križovatkách odbočovať vľavo a tiež otočiť sa kdekoľvek na ceste (jediná možnosť zmeny smeru je teda na križovatke odbočením doprava).
Daný je zoznam križovatiek, ktoré musíme navštíviť. Určte, v akom poradí môžeme prejsť zadanými križovatkami tak, aby sme dodržali dopravné predpisy, nikde nepreťali svoju dráhu a aby sme navštívili všetky zadané križovatky. Súradnice križovatiek sú celé čísla od 0 po 10000, počet križovatiek nie je väčší ako 1000.

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Majme v poli $P[i,j]$ máme uložené, koľko percent spoločnosti j patrí spoločnosti i. Definujeme $P[i,i] = 100$ pre všetky spoločnosti i, čím zahrnieme prvé dve podmienky do tretej. Riešenie budeme hľadať postupne pre každý podnik h nasledujúcim spôsobom:

V poli $B[i]$ bude pre podnik h uložené, či ovláda podnik i. V poli $D[i]$ bude uložené, koľko percent podniku i vlastní podnik h aj cez iné podniky, ktoré sú v poli B označené ako ovládané podnikom h. Na začiatku inicializujeme polia tak, aby $B[j] := (j = h)$ a $D[j] := P[h,i]$. V prípade, že existuje taký podnik j, že $D[j] > 50$ a $B[j] = \mathit{false}$ nastavíme $B[j] = \mathit{true}$, pre všetky podniky i, ktoré h nevlastní zväčšíme $D[i]$ o $P[j,i]$ (vidíme, že zachovávame vzťah polí B a P) a znovu zisťujeme, či existuje podnik j, pre ktorý $D[j] > 50$ a $B[j] = \mathit{false}$.

Tento cyklus určite skončí po počte krokov menšom ako počet podnikov, pretože v každom kroku ubudne jeden podnik, pre ktorý $B[j] = \mathit{false}$. Ak neexistuje podnik j, pre ktorý $D[j] > 50$ a $B[j] = \mathit{false}$, znamená to, že riešenie, pre ktoré h kontroluje podnik j práve vtedy, keď $B[j] = \mathit{true}$, vyhovuje daným podmienkam, lebo $B[j] = (D[j] > 50)$.

Zložitosť tohto algoritmu je $O(n^3)$.

P – I – 2

Ak typizovaná kocka pri posune zostane v bezprostredne nadradenej kocke, zmení sa len jej posledná cifra. Ak sa však posunie opačným smerom, prekročí hranice jednej, prípadne aj viacerých kociek. To, ako sa pri jednotlivých posunoch mení posledná cifra a či dochádza k prenosu (t.j. či sa mení aj predchádzajúca cifra), je vhodné zapísať do tabuľky:

smer	1	2	3	4	5	6	7	8
L	2p	1	4	3p	6p	5	8	7p
R	2	1p	4p	3	6	5p	8p	7
U	4p	3p	2	1	8p	7p	6	5
D	4	3	2p	1p	8	7	6p	5p
F	5p	6p	7p	8p	1	2	3	4
B	5	6	7	8	1p	2p	3p	4p

Ak dôjde k prenosu, zvyšok kódu kocky sa mení rovnakým spôsobom, ako keby sme v danom smere posúvali kocku s takýmto kódom.

Algoritmus je teda jednoduchý: začneme od poslednej cifry a kým dochádza k prenosu, meníme cifry podľa tabuľky. Keď nastane prenos z prvej cifry, vyšli sme zo základnej kocky. Uvedený algoritmus má lineárnu časovú zložitosť.

P – I – 3

List papiera reprezentujme ako maticu M veľkosti $a \times b$. Algoritmus sa skladá z dvoch častí:

1. *Načítanie obdĺžnikov a ich spracovanie do matice.* V tejto časti postupne čítame jednotlivé obdĺžniky, pričom každý z nich *položíme* na náš list papiera — t.j. príslušné políčka v matici M označíme príslušnou farbou. V prípade, že obdĺžnik presahuje okraj papiera, treba si zapamätať veľkosť zvyšku.

2. *Určenie veľkosti jednotlivých obrazcov.* Budeme prechádzať list po jednotlivých štvorčekoch, prejdené štvorčeky označíme vynulovaním farby.
Ak narazíme na políčko farby $h \neq 0$, zaradíme ho do zásobníka (pozn. zásobník je štruktúra, do ktorej ukladáme prvky na vrch a z vrchu prvky vyberáme. Takúto štruktúru nie je ťažké implementovať pomocou poľa) a jeho obsah vynulujeme. Veľkosť útvaru položíme rovnú $s := 1$. Potom začneme prehľadávať celý útvar nasledujúcim spôsobom:
V každom kroku vyberieme zo zásobníka jedno políčko a prirátame k s jednotku. Všetky políčka farby h, susediace s vybraným políčkom, vložíme do zásobníka a ich obsah vynulujeme. V prípade, že je zásobník prázdny, všetky políčka útvaru sú vynulované a v s máme veľkosť útvaru.
Veľkosť útvaru vhodným spôsobom uložíme (výhodné je mať 64 prvkové pole zreťazených zoznamov, každý pre jednu farbu).
Takýmto spôsobom prejdeme celú maticu M a zistíme veľkosť všetkých útvarov v matici. Po prejdení celého poľa vypíšeme zoznam všetkých útvarov.

   Zložitosť algoritmu je $O(S + ab)$, kde S je súčet plôch všetkých obdĺžnikov zo vstupu.

P – I – 4

a) Číslo v desiatkovej sústave je deliteľné tromi práve vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný tromi. Stačí teda raz prejsť cez zápis daného čísla a počítať jeho ciferný súčet modulo 3. Na to nám stačí stroj, ktorý vyhľadá napr. ľavý koniec zápisu a prepne do stavu zodpovedajúcemu 0 (mod 3). V stave zodpovedajúcom 0 sa hlava posunie napravo a podľa prečítanej cifry sa zmení stav na 0,1, alebo 2 (mod 3). V stavoch 1 a 2 (mod 3) sa stroj správa analogicky. Ak prečítaný znak nie je cifra, skončili sme. Ak sme v stave 0 (mod 3), vieme, že dané číslo je deliteľné tromi, inak dáva nenulový zvyšok mod 3.

```
S0: while znak<>0 do left;
    right; S3;
S1: if znak in ['0','3','6','9'] then begin right; S1 end;
    if znak in ['1','4','7'] then begin right; S2 end;
    if znak in ['2','5','8'] then begin right; S3 end;
    STOP; Nie
S2: if znak in ['0','3','6','9'] then begin right; S2 end;
    if znak in ['1','4','7'] then begin right; S3 end;
    if znak in ['2','5','8'] then begin right; S1 end;
```

```
    STOP; Nie;
S3: if znak in ['0','3','6','9'] then begin right; S3 end;
    if znak in ['1','4','7'] then begin right; S1 end;
    if znak in ['2','5','8'] then begin right; S2 end;
    STOP; Ano;
```

b) Stroj môže byť založený napr. na algoritme BubbleSort. Prechádzame slovo zľava doprava, a ak nájdeme vedľa seba písmená *ba*, vymeníme ich (zmeníme na *ab*), nastavíme sa na *b* a pokračujeme v prezeraní. Ak sme prišli na koniec a spravili sme pri poslednom prechode aspoň jednu výmenu, celý algoritmus zopakujeme. Ak nie, skončíme. Po skončení tohto algoritmu nebude existovať za sebou dvojica *ba* a písmená budú dobre usporiadané.
Vystačíme so štyrmi stavmi :
V stave 0 prejdeme na začiatok slova. Ak je prvým písmenom a, prepneme do stavu A, inak do stavu B.
V stave A postupujeme doprava dovtedy, kým nenarazíme na písmeno b. Potom prepneme do stavu B (ak narazíme na koniec slova – znak @– skončíme, lebo slovo sa skladá len z písmen a).
V stave B postupujeme ďalej doprava a hľadáme prvý výskyt a. Ak ho nenájdeme, skončíme (slovo je tvaru *aa..abb..b*). Ak ho nájdeme, vieme, že pred ním bolo b. Vymeníme ich (*ba* prepíšeme na *ab*), hlavu presunieme nad b a prepneme do B1
Stav B1 je analogický stavu B až na to, že ak prídeme na koniec slova, vieme, že sme spravili aspoň jednu výmenu, a teda musím zopakovať celú procedúru od začiatku – skok do stavu 0 (stav A1 je analogický A).

P – II – 1

Riešením tohto príkladu je tzv. bankárov algoritmus známy z teórie operačných systémov. Nech základný kapitál banky v mene i je uložený v poli $Z[i]$, požiadavky klienta j na menu i v poli $P[j][i]$ a pre klienta j už požičaná čiastka v mene i v poli $U[j][i]$. Potom $O[i]$ môžeme označiť čiastku, ktorá ešte banke v mene i ostala, pričom $O[i] = Z[i] - \sum_j U[j][i]$.
Označme počet klientov banky N a počet rôznych mien M. Banka sa nenachádza v stave bankrotu práve vtedy, ak existuje permutácia F čísel $1, \dots, N$ taká, že pre ľubovoľné $j \in \{1, \dots, N\}$ platí, že pre všetky meny i platí:

$$O[i] + \sum_{l<j} U[F[l]][i] \geqq P[j][i] - U[j][i],$$

lebo iba v tomto prípade existuje postupnosť pôžičiek, ktorou môže banka splniť zmluvné záväzky voči všetkým klientom. Zistiť, či takáto permutácia existuje, môžeme v čase $O(MN^2)$ tak, že budeme opakovať nasledujúcu činnosť:

– nájdeme klienta, ktorému môžeme poskytnúť plnú pôžičku, s tým, že nám potom vráti celú čiastku (týmto sa zásoby v banke zväčšia). Ak takého nenájdeme a ešte sme nesplnili všetky záväzky banka zbankrotovala, lebo klienti, ktorí ostali majú väčšie požiadavky ako dosiahnuteľné zásoby v banke. Ak splníme všetky záväzky, potom sme našli vyhovujúcu permutáciu a banka nezbankrotovala.

– Keď príde klient s požiadavkou na pôžičku, zistíme, či sa požičaním daného obnosu dostane banka do stavu bankrotu a podľa toho požiadavku odmietneme, alebo akceptujeme.

P – II – 2

Aby sme mohli zistiť, či je množina typizovaných kociek súvislá, potrebujeme vedieť pre dané dve kocky rozhodnúť, či sa dotýkajú aspoň jednou stenou. Môžu nastať dva prípady:

– Ak jedna kocka je podmnožinou druhej, potom kód väčšej kocky musí tvoriť začiatok kódu menšej. Aby sa kocky dotýkali aspoň jednou stenou, musí o zvyšku kódu menšej kocky platiť, že aspoň v jednej z osí x, y, z nemení znamienko. Potom sa kocky dotýkajú stenou kolmou na túto os.

– Ani jedna z kociek nie je podmnožinou druhej. Nech kocky majú kódy $a_1, a_2, \dots, a_k$; $b_1, b_2, \dots, b_l$, $k \leqq l$ a nech i je najmenšie také, že $a_i \neq b_i$. Potom aby sa dotýkali stenou, a_i a b_i sa musia líšiť len v jednej z osí. Nech táto os je napr. x (pre ostatné osi je situácia analogická). Potom sa môžu dotýkať v rovine kolmej na x. Vo všetkých cifrách $a_{i+1} \dots a_k$ musí byť znamienko na osi x opačné ako v cifre a_i a podobne vo všetkých cifrách $b_{i+1} \dots b_l$ opačné ako v b_i. Navyše musí platiť, že na ostatných osiach majú cifry $b_{i+1} \dots b_k$ rovnaké znamienka ako cifry $a_{i+1} \dots a_k$.

Na základe týchto poznatkov sa dá už jednoducho zostaviť algoritmus, ktorý prechádza cez jednotlivé cifry kódov dvoch kociek a zistí, či sa dotýkajú stenou. Tento algoritmus má časovú zložitosť $O(m)$, kde m je dĺžka kódu kocky.

Zostáva popísať samotný algoritmus na zistenie súvislosti množiny kociek. Budeme postupne vytvárať súvislú množinu kociek K_1, v ktorej sa nachádza kocka č. 1. Na začiatku výpočtu bude v tejto množine len kocka č. 1. V každom kroku sa vezme jedna kocka $k \in K_1$ a pre každú kocku, ktorá ešte nie je zaradená do K_1 sa zistí, či nesusedí s k. Ak susedí, zaradí sa do K_1. Je vhodné uchovávať zoznam kociek, ktoré už boli zaradené do K_1, ale ešte neboli spracované (t.j. ešte sa nezisťovalo, či sa nedotýkajú kociek, ktoré nie sú z K_1) v zásobníku. Ak je zásobník prázdny, žiadne ďalšie kocky sa už do množiny pridať nedajú. Ak K_1 obsahuje všetky kocky, množina je súvislá, v opačnom prípade nie je súvislá. Zložitosť algoritmu je $O(n^2m)$, kde n je počet kociek, lebo každú dvojicu kociek testujeme na susednosť najviac raz.

P – II – 3

Myšlienka riešenia je rovnaká ako v riešení úlohy P – I – 3. V každom kroku však musíme pamätať na to, že sa nachádzame na ploche valca. Prejaví sa to pri ofarbovaní matice a výpočte odrezanej časti. Pri zisťovaní plochy si len treba uvedomiť, že dve plochy, ktoré by na liste papiera nesusedili, teraz už susediť môžu (teda ak sú rovnakej farby, ide vlastne o jednu plochu).

P – II – 4

a) T-stroj má iba konečnú pamäť, preto nemôže jednoducho spočítať písmená a, písmená b a zistiť, ktorých je viac.
   Môžeme postupovať takto: nájdeme napr. písmeno a najviac vľavo, označíme ho (t.j. prepíšeme znakom α) a hľadáme najľavejšie písmeno b. Označíme ho (prepíšeme na β) a celý algoritmus opakujeme. Po konečnom počte krokov, (v každom kroku označíme jedno a a jedno b) nastane situácia, keď
 i) Nenájdeme neoznačené a. Vieme, že počet označených a (α) sa rovná počtu označených b (β). Teda ak nájdeme jedno neoznačené b, vieme, že znakov b je viac a môžeme skončiť. Ak sú všetky b označené, zrejme je počet a rovný počtu b. Treba však uviesť slovo do pôvodného stavu, t.j. prepísať α na a a β na b.
ii) Nenájdeme neoznačené b. Keďže označených a je o 1 viac ako označených b a zároveň všetky b sú označené, písmen a je zrejme viac.
b) Najjednoduchšie bude zrejme začať od (pravého) konca. Zistíme si posledný znak, presunieme sa na prvý znak @ napravo od nášho slova a zapíšeme tam prečítaný znak. Presunieme sa na predposledný znak vstupného slova, prečítame ho atď. Aby sme vedeli, ktoré písmená sme už skopírovali, je dobré si ich označiť, napr. prepísať a na α, b na β, c na γ.
   <u>Stav 0</u>: presunieme hlavu nad najpravejšie písmeno. Prepneme do stavu 1.
   <u>Stav 1</u>: presúvame sa doľava, kým nenarazíme na znak a, b alebo c. Označíme ho a prepneme do stavu A,B, resp. C (podľa prečítaného znaku). Ak prídeme nad znak @, kopírovanie skončilo. Treba odznačiť všetky znaky vstupného slova. Presunieme hlavu nad posledný znak pôvodného slova (teda $\alpha, \beta,$ alebo γ) a postupujúc naľavo, prepisujeme všetky α, β a γ na a, b a c. Keď prídeme nad @, sme hotoví a zastavíme stroj.
   <u>Stav A</u>: Presúvame sa doprava, kým nenarazíme na @. Zapíšeme písmeno a. Skok do stavu 2.
   <u>Stavy B a C</u>: analogicky k A (zapíšu b, resp. c)
   <u>Stav 2</u>: vracia hlavu doľava, kým nenarazí na $\alpha, \beta,$ alebo γ a prepína do stavu 1.

P – III – 1

Priemet kocky do ľubovoľnej súradnicovej roviny ľahko spočítame v čase $O(n)$. Zostáva teda pre danú množinu typizovaných štvorcov určiť množinu k nej minimálnu. Pri tom platia dve pravidlá:

1. Majme štvorce k a l, $k \subseteq l$. Potom štvorec k možno z množiny vylúčiť.
2. Ak štvorce k_1, k_2, k_3, k_4 vznikli rozdelením štvorca k na štyri časti, potom štvorce k_1, k_2, k_3, k_4 možno vynechať a nahradiť štvorcom k.

   Ak sa nedá na množinu uplatniť ani jedno z týchto pravidiel, je už minimálna.
   Odstraňovanie nadbytočných štvorcov sa síce dá spraviť, aj keď sú kódy kociek uložené v poli, ale jednoduchšie a efektívnejšie je použiť stromovú štruktúru. Každý uzol stromu reprezentuje jeden typizovaný štvorec. Uzol môže mať 4 synov, ktorí reprezentujú štvorce, na ktoré je tento štvorec rozdelený. Koreň stromu predstavuje základnú typizovanú kocku. Pri načítavaní vstupu vytvárame strom – pre každý štvorec musíme pridať všetky štvorce, ktorých je podmnožinou (ak ešte v strome nie sú). V strome nemusíme ukladať samotný

kód štvorca, ten je určený cestou od koreňa k príslušnému uzlu. Uzly zodpovedajúce štvorcom z množiny označíme ako obsadené. Všetky podstromy obsadeného uzla sa podľa pravidla 1 môžu zrušiť. Rovnako ak má nejaký uzol obsadených všetkých synov, podľa pravidla 2 ich môžeme zrušiť a označiť tento uzol za obsadený. Tieto dve operácie možno vykonávať už počas vytvárania stromu. Po skončení obsadené vrcholy určujú hľadanú minimálnu množinu. Čas výpočtu je lineárny vzhľadom na súčet dĺžok kódov kociek.

P – III – 2

Riešenie je úpravou riešenia úlohy druhého kola (P – II – 2). Teraz však musíme uvažovať o tom, že každé dva protiľahlé stĺpce (riadky) matice spolu susedia.

P – III – 3

Označme ľavé číslo a, pravé b. Pre jednoduchšie počítanie prepíšme v a najľavejší znak na @, podobne zrušme najpravejší znak b. Takto bude mať každé číslo toľko znakov |, koľko je jeho hodnota. Tieto operácie môžeme spraviť pre jednoduchosť v častiach a) aj b). Výsledok, ktorý vyprodukujú stroje popísané ďalej, bude mať o 1 znak | menej ako požadovaný výsledok. Preto im treba pridať ešte jeden stav, do ktorého sa prepnú po skončení práce, a v ktorom sa k výsledku pridá požadovaný znak |.

a) Vynásobiť a a b znamená pričítať k nule a-krát číslo b. Pričítať číslo b k číslu v znamená prikopírovať číslo b za číslo v. Za (t.j. napravo) číslo b si dajme riadiaci znak = a za ním budeme zapisovať výsledok.
Nastavme hlavu nad najľavejší znak | čísla a. Ak je a nula, tak naľavo od $*$ nie je |, vieme, že sme skončili, lebo $0 * b = 0$. Ak a nie je nula, najľavejší | označme, t.j. zmeňme na x. Teraz musíme prekopírovať číslo b za koniec medzivýsledku v. Nastavme hlavu na prvý znak za $*$ a môžeme kopírovať. Je to jednoduché:

1. presúvame sa doľava, kým nie je pod hlavou $*$ alebo x. Krok vpravo.
2. ak sme nad |, označíme ho a presúvame sa doprava nad najbližší znak @. Zapíšeme |. Opakujeme od bodu 1. Ak sa nám už minuli všetky znaky | z čísla a, a odznačíme, t.j. všetky x medzi $*$ a = prepíšeme na |. Dostali sme zjednodušenú úlohu, t.j. k medzivýsledku pripočítať číslo $(a-1)b$. Skok do príslušného stavu.

b) Použime Euklidov algoritmus. Majme dve čísla a, b. Ak $a = b$, zrejme ich najväčší spoločný deliteľ (a, b) bude rovný a. Ak $a > b$, potom čísla $a - b$ a b majú rovnaké spoločné delitele ako a a b, preto $(a - b, b) = (a, b)$.
Stačí nám teda počítať $(a - b, b)$. Ak $a < b$, postupujeme obdobne a počítame $(a, b - a)$. Keďže pri každom kroku znížime súčet $a + b, a, b > 0$, niekedy tento algoritmus skončí. Potrebujeme T-stroj, ktorý vie porovnať a a b a od väčšieho odpočítať menšie. Nájdime najľavejší znak | čísla a. Označme ho (prepíšme znakom x). Nájdime k nemu najpravejší znak | z b a označme ho. Opakujme tento algoritmus, kým

i) nenájdeme v a žiadny znak |. Potom zrejme $a \geqq b$. Ak znak za $*$ je |, potom $a : b$. Číslo a odznačíme (prepíšeme x na |). Z čísla b chceme mať $b - a$, preto všetky znaky x na konci čísla b zmažeme. Dostali sme rovnakú úlohu ako na začiatku, ale číslo b je menšie. Prejdeme do začiatočného stavu.

Ak $a = b$ (t.j. za znakom $*$ je znak x), prišli sme k záveru. V čísle a všetky znaky x zmeníme na |, zmažeme znak $*$ a všetko napravo od neho a s pocitom dobre vykonanej práce ukončíme činnosť stroja.

ii) V b sú len znaky x. Zrejme je $a > b$. Odznačíme b, presunieme sa nad a a najpravejší znak x zmeníme na | (a malo označený o jeden znak viac). Všetky znaky x naľavo od neho zmažeme. Namiesto a máme $a - b$, b sa nezmenilo. Skok do zač. stavu.

P – III – 4

Dlhy medzi jednotlivými podnikmi budeme reprezentovať zreťazeným jednosmerným zoznamom. Tento zoznam je možné na počítači reprezentovať buď s pomocou dynamického prideľovania pamäti, alebo pomocou jednoduchého poľa, pričom zhora obmedzíme možný počet dlhov medzi podnikmi. Pre zrýchlenie celého výpočtu je vhodné si pamätať celkovú veľkosť dlhov jednotlivých podnikov a koľko ktorým podnikom iné podniky celkovo dlžia.

V každom kroku algoritmu vyhľadáme dva dlhy také, že spoločnosť X dlží k\$ spoločnosti Y a spoločnosť Z dlží l\$ spoločnosti X. Tieto dva dlhy spracujeme takto:

a) Ak je $k \leqq l$ tak zrušíme dlh spoločnosti X voči spoločnosti Y, dlh spoločnosti Z voči X znížime o k a zavedieme dlh Z voči Y a to k\$. Ak bolo $k = l$, zrušíme vzťah Z voči X celkom.

b) Ak je $k > l$ tak zrušíme dlh spoločnosti Z voči spoločnosti X, dlh spoločnosti X voči Z znížime o l a zavedieme dlh Z voči Y a to l\$.

Toto opakujeme, kým sa v systéme dlhov nachádza podnik, ktorý je súčasne dlžníkom aj veriteľom. V opačnom prípade sme získali jedno možné riešenie úlohy.

Uvedieme ešte jedno možné urýchlenie celého algoritmu: do nášho zoznamu dlhov zaveďme ďalšie dva ukazovatele, pomocou ktorých vytvoríme jednosmerné zoznamy dlžníkov a veriteľov pre každý podnik. Tým podstatne urýchlime vyhľadávanie dvojíc dlhov, kde jeden podnik je aj dlžníkom aj veriteľom.

P – III – 5

Zoznam križovatiek najprv načítame zo vstupného súboru do pamäti. Tento zoznam môžeme reprezentovať ako pole, a to vzhľadom k uvedenému obmedzeniu veľkosti vstupu. Aby sme prešli všetky križovatky, a neporušili pri tom pravidlá cestnej premávky v meste, bude mať dráha tvar špirály, ktorá bude začínať na najzápadnejšej križovatke mesta a postupne sa bude stáčať smerom doprava do stredu mesta.

Najprv teda vyhľadáme najzápadnejšiu križovatku v meste. Túto križovatku vyradíme zo zoznamu križovatiek a postupne podobným spôsobom hľadáme najsevernejšiu, najvýchodnejšiu a najjužnejšiu, atď., až kým nevyčerpáme zoznam križovatiek. Špeciálnym spôsobom treba pritom ošetriť prípad, ak je niektorá križovatka v danom okamihu napr. najzápadnejšia a najsevernejšia zároveň – v tomto prípade by sme totiž pri uvedenom spôsobe porušili pravidlá cestnej premávky.

1. československé stretnutie

JEVÍČKO, 10.–13. JÚNA 1995

Po rozdelení bývalej Česko–Slovenskej federatívnej republiky sa kontakty medzi mladými matematikmi z novovzniknutých krajín prerušili. Aj keď sú úlohy matematickej olympiády aj naďalej rovnaké, chýbalo hlavne osobné stretnutie študentov, ktoré kedysi nastávalo hlavne na celoštátnom kole MO kategórie A, na celoštátnych sústredeniach pre kategórie B a C a na výberových a prípravných sústredeniach na MMO. Jediný kontakt, ktorý sa v predchádzajúcom roku uskutočnil bola spoločná účasť na MMO, kde však študenti spoznali nie 6 ale stovky nových ľudí. Preto sa z podnetu niektorých členov úlohovej komisie MO zrodila iniciatíva, ktorá vyústila do súťaže, ktorá azda začala svoju dlhoročnú tradíciu. Prvý ročník súťaže zabezpečovala Česká republika a uskutočnil sa v rámci ich prípravného sústredenia pred medzinárodnou matematickou olympiádou. Súťažili šiesti najlepší riešitelia MO z oboch krajín a išlo výlučne o súťaž jednotlivcov. Súčasťou tohto podujatia však nie je len matematická súťaž, tento rok si napríklad súťažiaci merali svoje sily aj vo volejbale a basketbale.

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet
1.	David Pavlica	4 GMK Bílovec	7	5	0	7	7	5	31
2.	Libor Mašíček	4 G kpt. Jaroše Brno	7	0	2	7	7	7	30
3.	Petr Kaňovský	4 G kpt. Jaroše Brno	7	7	0	5	3	7	29
4.–5.	Patrik Horník	4 G Grösslingová Bratislava	7	7	2	7	1	4	28
4.–5.	Peter Macák	4 G J. Hronca Bratislava	0	7	1	6	7	7	28
6.	Robert Šámal	4 G Zborovská Praha 5	7	0	0	7	7	6	27
7.	Ivan Cimrák	3 G V. Okružná Žilina	7	1	1	7	3	4	23
8.	Martin Pál	4 G J. Hronca Bratislava	0	2	4	5	7	3	21
9.	Ján Bábeľa	4 G Poštová Košice	0	2	0	7	6	3	18
10.–11.	Vladimír Marko	2 G J. Hronca Bratislava	1	3	0	7	0	6	17
10.–11.	Martin Nečesal	4 G kpt. Jaroše Brno	7	0	2	0	6	2	17
12.	Filip Krška	4 G kpt. Jaroše Brno	7	1	1	7	0	0	16

Opravu riešení vždy zabezpečuje domáca strana a na koordinácii hodnotenia sa podieľajú vedúci jednotlivých družstiev. Tento rok nimi boli *Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. a RNDr. Karel Horák, CSc.* z Českej republiky a *Richard Kollár* zo Slovenska. Zoznam súťažiacich aj s výsledkami súťaže sú uvedené v tabuľke. Ako je možné uvidieť, v prvom meraní síl lepšie obstálo domáce družstvo. Je to však výzva pre nás, aby sme sa na druhý ročník súťaže, ktorý sa uskutoční na Slovensku, pripravili lepšie.

Zadania úloh

Úloha č.1
Postupnosť čísel a_1, a_2, ... spĺňa podmienku

$$a_{n+2} = (2 - n^2)a_{n+1} + (2 + n^2)a_n$$

pre každé celé $n \geqq 1$, pritom $a_1 = 2$ a $a_2 = 5$. Rozhodnite, či existujú indexy p, q a r také, že $a_p \cdot a_q = a_r$.

(J. Šimša)

Úloha č.2
Nech $\mathbb{Z}$ označuje množinu všetkých celých čísel. Nájdite všetky dvojice funkcií $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takých, že rovnosť

$$f\bigl(g(x) + y\bigr) = g\bigl(f(y) + x\bigr)$$

platí pre ľubovoľné celé čísla x a y, pričom $g(x) = g(y)$, práve keď $x = y$.

(P. Hliněný)

Úloha č.3
V rovine s kartézskou sústavou súradníc uvažujme všetky trojuholníky ABC také, že ich vrcholy sú mrežové body (body s celočíselnými súradnicami) a ich vnútro obsahuje práve jeden mrežový bod P. Označme E priesečník strany BC s priamkou AP. Určte najväčšiu možnú hodnotu podielu

$$\frac{|AP|}{|PE|}.$$

(Putnam Exam 1981)

Úloha č.4
Pre každé reálne číslo p ($p > 1$) určite najmenšiu hodnotu súčtu $x + y$, kde čísla x a y spĺňajú rovnicu

$$\bigl(x + \sqrt{1 + x^2}\bigr)\bigl(y + \sqrt{1 + y^2}\bigr) = p.$$

(Poľská olympiáda)

Úloha č.5
Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečky AC a BD sú navzájom kolmé. Dokážte, že obrazy priesečníku uhlopriečok v osových súmernostiach podľa strán štvoruholníka $ABCD$ ležia na jednej kružnici.

(USAMO 1993)

Úloha č.6
Nájdite všetky dvojice celých nezáporných čísel x a y, ktoré spĺňajú rovnicu

$$p^x - y^p = 1,$$

kde p je dané nepárne prvočíslo.

(R. Kollár)

Riešenia úloh

Úloha č.1

Také indexy p, q, r neexistujú, lebo každý člen danej postupnosti je celé číslo tvaru $3k+2$, takže súčin ľubovoľných dvoch členov je číslo tvaru $3k+1$. Skutočne, ak je $a_n = 3k_n + 2$ a $a_{n+1} = 3k_{n+1} + 2$ pre niektoré n (ako je pre $n = 1$), potom

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (2-n^2)(3k_{n+1}+2) + (2+n^2)(3k_n+2) = \\ &= 3(n^2k_n - n^2k_{n+1} + 2k_n + 2k_{n+1} + 2) + 2 = 3k_{n+1} + 2. \end{aligned}$$

Úloha č.2

Podmienkam vyhovuje každá dvojica funkcií $f(x) = x + c$ a $g(x) = x + d$, kde c a d sú ľubovoľné konštanty. Ukážeme, že sú to všetky hľadané dvojice. Označme teda $c = f(0)$ a $d = g(0)$. Z danej rovnice voľbou $x = 0$ resp. $y = 0$ plynie

$$g\big(f(y)\big) = f(d+y) \quad \text{pre každé } y \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

a

$$f\big(g(x)\big) = g(c+x) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Teraz dvojakým spôsobom vyjadríme $g\big(f\big(g(x)\big)\big)$. Ak aplikujeme g na obidve strany (2), dostaneme

$$g\big(f\big(g(x)\big)\big) = g\big(g(c+x)\big).$$

Ale podľa (1) pre $y = g(x)$ platí

$$g\big(f\big(g(x)\big)\big) = f\big(d+g(x)\big)$$

a zároveň podľa zadania pre $y = d$ je

$$g\big(f\big(g(x)\big)\big) = f\big(d+g(x)\big) = g\big(f(d)+x\big).$$

Porovnaním dostávame $g\big(g(c+x)\big) = g\big(f(d)+x\big)$, odkiaľ podľa vlastností funkcie g vyplýva $g(c+x) = f(d) + x$. To po zámene $x := x - c$ znamená, že

$$g(x) = x - c + f(d) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

(Odtiaľ už mimochodom plynie, že g je lineárna funkcia.) Dosadením získaného vzorca pre g do oboch strán (2) dostaneme

$$f\big(x - c + f(d)\big) = (c+x) - c + f(d),$$

odkiaľ po zámene $x := x + c - f(d)$ vyplýva hľadaný predpis $f(x) = x + c$ pre každé x. Preto $f(d) = d + c$, takže (3) znamená, že $g(x) = x + d$ pre každé x.

Úloha č.3

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že vrchol A leží v počiatku súradnicovej sústavy a označme

$$L = \tfrac{1}{2}(B+C), \quad M = \tfrac{1}{2}(C+A), \quad \text{a} \quad N = \tfrac{1}{2}(A+B)$$

stredy strán BC, CA a AB. Naviac položme

$$\begin{gathered} S = \tfrac{1}{3}(2L+M) = \tfrac{1}{3}(B+C+M), \\ T = \tfrac{1}{3}(B+C+N), \\ Q = 2P - B \qquad \text{a} \qquad R = 3P - B - C. \end{gathered}$$

Pritom Q a R sú mrežové body, ktoré dostaneme z bodu P rovnoľahlosťou so stredom B a koeficientom 2, resp. rovnoľahlosťou so stredom L a koeficientom 3. Zrejme $Q \neq P \neq$ $\neq R$. Preto bod Q nemôže ležať vnútri trojuholníku ABC, takže bod P neleží vnútri trojuholníku NBL, pretože rovnoľahlosť so stredom B a koeficientom 2 zobrazí trojuholník NBL na trojuholník ABC. Podobne (voľbou bodu $Q = 2P - C$) by sme zistili, že bod P neleží ani vnútri trojuholníku MLC. Pretože ani mrežový bod R nemôže ležať vnútri trojuholníku ABC, neleží bod P (jeho vzor v rovnoľahlosti so stredom L a koeficientom 3) vnútri trojuholníku LST. A pretože vzdialenosť bodu A od priamky ST je päťkrát väčšia ako vzdialenosť priamok ST a BC, plynie odtiaľ odhad

$$\frac{|AP|}{|PE|} \leqq 5.$$

Pre body $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ a $C = (0,3)$ dostaneme trojuholník, ktorý obsahuje jediný mrežový bod $P = (1,1) = T$, pre ktorý v uvedenom odhade nastane rovnosť. Teda najväčšia možná hodnota uvažovaného podielu je rovná 5.

Úloha č.4

Označme $t = x + \sqrt{1+x^2}$. Potom $t > 0$ a $x = \dfrac{t^2-1}{2t}$. Podľa posledného vzorca je podmienka $y + \sqrt{1+y^2} = \dfrac{p}{t}$ (ekvivalentná so zadanou rovnicou) splnená, práve keď

$$y = \frac{\left(\frac{p}{t}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{p}{t}}, \quad \text{alebo} \quad y = \frac{p^2 - t^2}{2pt}.$$

Vtedy platí

$$x + y = \frac{t^2-1}{2t} + \frac{p^2-t^2}{2pt} = \frac{p-1}{2p}\left(t + \frac{p}{t}\right) \geqq \frac{p-1}{p}\sqrt{t \cdot \frac{p}{t}} = \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

pričom rovnosť nastane, práve keď $t = \dfrac{p}{t}$, kedy $x = y = \dfrac{p-1}{2\sqrt{p}}$.

Odpoveď: Najmenšia hodnota súčtu $x + y$ je rovná $\dfrac{p-1}{\sqrt{p}}$.

Úloha č.5

Označme P, Q, R, S päty priesečníkov uhlopriečok E na jednotlivé strany AB, BC, CD a DA. Stačí ukázať, že štvoruholník $PQRS$ je tetivový, pretože štvoruholník uvažovaný v úlohe z neho dostaneme rovnoľahlosťou so stredom E a koeficientom rovnoľahlosti 2. Štvoruholníky $EPBQ$, $EQCR$, $ERDS$ a $ESAP$ sú tetivové (vždy dva ich protiľahlé uhly sú pravé). Odtiaľ plynie, že je

$$|\sphericalangle EPQ| = |\sphericalangle EBQ| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ERQ| = |\sphericalangle ECQ|.$$

Uhly EBQ a ECQ sú ostré uhly pravouhlého trojuholníku EBC, takže

$$|\sphericalangle EPQ| + |\sphericalangle ERQ| = |\sphericalangle EBQ| + |\sphericalangle ECQ| = \frac{\pi}{2}.$$

Podobne dostaneme aj rovnosť

$$|\sphericalangle EPS| + |\sphericalangle ERS| = \frac{\pi}{2},$$

čo spolu dáva

$$|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle QRS| = |\sphericalangle EPS| + |\sphericalangle EPQ| + |\sphericalangle ERS| + |\sphericalangle ERQ| = \pi,$$

čo znamená, že štvoruholník $PQRS$ je tetivový.

Úloha č.6

Ak je (x, y) riešenie danej rovnice, platí

$$p^x = 1^p + y^p = (1 + y)(1 - y + y^2 - \dots + y^{p-1}),$$

a teda $1 + y = p^n$ pre vhodné nezáporné celé $n \leqq x$. Ak je $n = 0$, potom však $y = x = 0$. Preto ďalej predpokladajme, že $x \geqq n \geqq 1$. Podľa binomickej vety platí

$$\begin{aligned} p^x &= y^p + 1 = (p^n - 1)^p + 1 = \\ &= p^{np} - p \cdot p^{n(p-1)} + \binom{p}{2} p^{n(p-2)} + \ldots + (-1)^{p-2} \binom{p}{p-2} p^{2n} + p \cdot p^n. \end{aligned}$$

Pretože p je prvočíslo, sú všetky binomické koeficienty v poslednom výraze deliteľné p, takže tento výraz je deliteľný mocninou p^{n+1}, nie však p^{n+2}. To znamená, že $x = n + 1$. Z poslednej rovnosti po odčítaní $p^x = p^{n+1}$ dostaneme

$$0 = p^{np} - p \cdot p^{n(p-1)} + \binom{p}{2} p^{n(p-2)} + \ldots + (-1)^{p-3} \binom{p}{p-3} p^{3n} - \binom{p}{p-2} p^{2n}.$$

Pre $p = 3$ je to rovnica $0 = 3^{3n} - 3 \cdot 3^{2n}$, ktorá má jediné riešenie $n = 1$, ktorému odpovedá $x = y = 2$. Pretože pre $p \geqq 5$ nie je koeficient $\binom{p}{2} = \dfrac{p(p-1)}{2}$ deliteľný p^2, usúdime, že pravá strana rovnice je pre $p \geqq 5$ deliteľná mocninou p^{2n+1}, nie však p^{3n+1}, čo vedie k záveru, že vtedy žiadne riešenie n neexistuje.

Odpoveď: $x = y = 0$ pre ľubovoľné p, pre $p = 3$ naviac $x = y = 2$.

36. medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 13. až 25. júla 1995 sa v Toronte v Kanade konala 36. medzinárodná matematická olympiáda IMO'95. Zúčastnilo sa jej 414 súťažiacich zo 73 krajín. Medzinárodná matematická olympiáda (MMO) je súťažou jednotlivcov. Každá zo zúčastnených krajín na ňu vysiela súťažné družstvo zložené z najviac šiestich súťažiacich, sprevádzané dvoma vedúcimi. Slovenské družstvo tvorili *Ján Bábeľa* zo 4.ročníka Gymnázia Poštová v Košiciach, *Ivan Cimrák* z 3.ročníka Gymnázia Veľká Okružná v Žiline, *Patrik Horník* zo 4.ročníka Gymnázia Grősslingová v Bratislave, *Peter Macák* zo 4.ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave, *Vladimír Marko* z 2.ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave a *Martin Pál* zo 4.ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave.
Vedúcim delegácie bol *Doc. RNDr. Tomáš Hecht, Csc.*, z MFF UK v Bratislave a zástupcom vedúceho *Richard Kollár* z MFF UK v Bratislave.
Samotná súťaž je rozdelená do dvoch súťažných dní, počas ktorých súťažiaci riešia po 3 úlohy, na ktorých vyriešenie majú vždy 4,5 hodiny čistého času. Výsledky slovenského družstva uvádza nasledujúca tabuľka:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Ján Bábeľa	1	7	1	3	0	0	12	-
Ivan Cimrák	7	0	7	7	2	0	23	3.
Patrik Horník	7	0	1	7	0	0	15	-
Peter Macák	7	7	7	7	5	0	33	2.
Vladimír Marko	7	0	6	7	7	0	27	3.
Martin Pál	7	2	6	6	7	7	35	2.

Tento rok sme si najlepšie poradili s úlohami č. 1 a 4. Prvá z nich bola tradičná geometrická úloha, druhá veľmi jednoduchá. Naopak opäť najhoršie sme skončili v šiestej – kombinatorickej úlohe. Vyriešil ju len jeden súťažiaci. V súťaži jednotlivcov sme si teda po dvoch rokoch neviezli domov zlato, ale získali sme dve strieborné a dve bronzové medaily. Pritom aj Vladimírovi Markovi aj Martinovi Pálovi chýbalo na zisk cennejších medailí len málo. V neoficiálnom hodnotení krajín sme takmer presne obhájili minuloročnú, nie veľmi lichotivú, priečku v tretej desiatke, skončili sme na 21.–22. mieste. Avšak ukazuje sa, že v prípade štandardného výkonu celého družstva máme šancu skončiť aj o desať miest vyššie. Prekvapujúco dobre skončili obaja študenti zo 4. ročníka Gymnázia Jura Hronca v Bratislave, pre ktorých to bola druhá medzinárodná olympiáda v jednom mesiaci a na úplne inom mieste zemegule. Len po jednodňovej prestávke na Slovensku pokračovali v ceste z Austrálie do Kanady. Ukázalo sa, že ani táto mimoriadna záťaž nebola rozhodujúca a kvalita študentov sa aj tak prejavila. A na záver hodnotenia našej účasti treba dodať, že napriek miernemu ústupu z pozícií, na ktorých kedysi bývalo spoločné československé družstvo, naši súťažiaci sa vo svete nestratili a výsledok týchto kvalít nebýva ešte na Slovensku pravidlom. Celkovým víťazom neoficiálnej súťaže družstiev sa stal tím Číny s 236 bodmi pred družstvami Rumunska (230 bodov) a Ruska (227 bodov).

V prvej desiatke skončili ešte po poradí Vietnam, Maďarsko, Bulharsko, Južná Kórea, Irán, Japonsko a Veľká Británia. Prekvapením bol neúspech družstva USA (skončilo až jedenáste), ktoré v minulom ročníku dosiahlo absolútne maximálny možný počet bodov. Družstvo Českej republiky skončilo na 17.–18. mieste so 154 bodmi.

Medzinárodná matematická olympiáda je samozrejme najmä záležitosťou spoločenskou. Mladí matematici z celého sveta majú možnosť vidieť nové kraje a stretnúť sa z rovesníkmi zo všetkých kolektívov. Tieto stretnutia a zážitky z nich môžu neskôr predstavovať veľkú motiváciu do ďalšieho života. Tento rok bola okrem zvyčajného spoločenského programu MMO spestrená jednou špecifickou záležitosťou severoamerického kontinentu. V oblasti Toronta, kde súťaž prebiehala, žije množstvo presídlencov z celého sveta. A tak sa organizátorom podarilo zabezpečiť skoro pre všetky prítomné výpravy (73 krajín !) sprievodcu, ktorý pochádzal z tej-ktorej krajiny. Takto bolo aj naše družstvo zverené do opateri slovenskej komunity. Títo mladí ľudia sa svedomito starali o program súťažiacich aj vedúcich. Navštívili spolu pre Kanadu typické zábavné podniky (bowling, biliard, …), špeciálnu slovenskú party, nový krásny slovenský kostol, atď. Jednoducho ukázali turistom niečo viac ako len krásnu prírodu a veľké moderné mesto, ukázali spôsob života v tejto ďalekej krajine s jej obrovskými možnosťami, ale aj nám neznámymi problémami. Boli to skutočne neopakovateľné zážitky. O tie sa však staral aj organizačný výbor, súťažiaci mali možnosť vidieť na vlastné oči baseballový zápas domáceho družstva na azda najmodernejšom štadióne na svete – Sky Dome, mohli sa pohľadom pokochať na nádhernej siluete Toronta a jeho okolia z najvyššej veže na svete – CN Tower, mohli navštíviť starú vojenskú pevnosť ešte z čias vojny severu z juhom, gigantický zábavný park filmovej spoločnosti Paramount, kde s voľnou vstupenkou mohli absolvovať niekoľko jázd smrti a vyskúšať si (samozrejme za najväčšej bezpečnosti) svoju odvahu. Nechýbalo ani pompézne slávnostné otvorenie a ukončenie olympiády s nádhernou laserovou show a dojímavým ceremoniálom. Vrcholom však určite bol výlet k Niagarským vodopádom. Všetci zúčastnení sa mohli odviezť výletnou loďou priamo pod tento mohutný div prírody. Na emocionálne zvýraznenie atmosféry MMO premietli pri záverečnom ceremoniáli a udeľovaní cien organizátori súťažiacim krátky video film, ktorý všetky tieto momenty zachytával. Celý priebeh olympiády totiž natáčal kamerou filmový štáb.

Pred úplným ukončením MMO ešte zástupca Indie stihol pozvať všetky zúčastnené krajiny na nasledujúcu, už 37. medzinárodnú matematickú olympiádu, ktorá sa bude konať na budúci rok v Dillí. Ďalšie ročníky by mali usporiadať Argentína, Kórea a Rumunsko.

Výsledky medzinárodnej matematickej olympiády

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Argentína	6	129	0	1	3	29.
Arménsko	6	111	0	2	1	32.–33.
Austrália	6	145	0	1	4	21.–22.
Azerbajdžan	3	30	0	0	0	64.
Bielorusko	6	131	0	1	3	26.–28.

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Belgicko	6	83	0	0	1	47.
Bosna a Hercegovina	6	18	0	0	0	69.
Brazília	6	86	1	0	0	44.
Bulharsko	6	207	1	4	1	6.
Cyprus	6	43	0	0	0	58.–59.
Česko	6	154	0	1	5	17.–18.
Čína	6	236	4	2	0	1.
Dánsko	6	77	0	0	1	49.
Estónsko	6	55	0	0	0	56.
Filipíny	6	28	0	0	1	65.–66.
Fínsko	6	101	0	0	3	36.–37.
Francúzsko	6	119	1	0	2	30.
Grécko	6	66	0	0	1	54.
Gruzínsko	6	79	0	0	1	48.
Holandsko	6	85	0	0	2	45.
Hong Kong	6	151	0	1	4	20.
Chile	2	14	0	0	0	70.
Chorvátsko	6	111	0	0	3	32.–33.
India	6	165	0	3	3	14.
Indonézia	6	68	0	0	1	53.
Irán	6	202	2	3	1	8.
Island	4	19	0	0	0	68.
Izrael	6	171	1	2	2	13.
Írsko	6	41	0	0	0	61.
Japonsko	6	183	1	3	2	9.
JAR	6	95	0	0	2	41.
Juhoslávia	6	154	0	2	3	17.–18.
Južná Kórea	6	203	2	3	1	7.
Kanada	6	153	0	2	3	19.
Kazachstan	6	54	0	0	0	57.
Kirgistan	6	28	0	0	0	65.–66.
Kolumbia	6	100	0	0	3	38.
Kuba	4	59	0	0	0	55.
Kuvajt	2	0	0	0	0	73.
Litva	6	74	0	0	0	50.
Lotyšsko	6	97	0	1	1	39.–40.
Macao	6	33	0	0	0	62.
Macedónsko	6	117	0	1	3	31.
Maďarsko	6	210	3	0	3	5.
Malajzia	2	1	0	0	0	72.
Maroko	6	138	0	0	5	24.
Mexiko	6	43	0	0	1	58.-59.

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Moldavsko	6	101	0	1	1	36.–37.
Mongolsko	6	91	0	0	1	42.
Nemecko	6	162	1	1	3	15.
Nový Zéland	6	84	0	0	2	46.
Nórsko	6	70	0	0	1	52.
Poľsko	6	161	0	1	5	16.
Portugalsko	6	26	0	0	0	67.
Rakúsko	6	88	0	0	1	43.
Rumunsko	6	230	3	3	0	2.
Rusko	6	227	4	2	0	3.
Sigapúr	6	131	0	1	3	26.–28.
Slovensko	6	145	0	2	2	21.–22.
Slovinsko	5	42	0	0	0	60.
Sri Lanka	1	10	0	0	0	71.
Španielsko	6	72	0	0	1	51.
Švajčiarsko	5	97	0	2	0	39.–40.
Švédsko	6	106	0	0	2	35.
Taliansko	6	131	0	0	5	26.–28.
Thajsko	6	107	1	2	0	34.
Tchaj-wan	6	176	0	3	2	12.
Trinidad a Tobago	6	32	0	0	0	63.
Turecko	6	134	0	1	4	25.
Ukrajina	6	140	1	1	1	23.
USA	6	178	0	3	3	11.
Veľká Británia	6	180	2	1	3	10.
Vietnam	6	220	2	4	0	4.

Zadania úloh MMO

Úloha č.1

Nech A, B, C, D sú 4 rôzne body na priamke v uvedenom poradí. Kružnice s priemermi AC a BD sa pretínajú v bodoch X a Y. Priamka $\overleftrightarrow{XY}$ pretína BC v bode Z. Nech P je bod priamky $\overleftrightarrow{XY}$ rôzny od Z. Priamka $\overleftrightarrow{CP}$ pretína kružnicu s priemerom AC v bodoch C a M a priamka $\overleftrightarrow{BP}$ pretína kružnicu s priemerom BD v bodoch B a N. Dokážte, že priamky $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{DN}$ a $\overleftrightarrow{XY}$ majú spoločný bod.

(Bulharsko)

Úloha č.2

Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqq \frac{3}{2}.$$

(Rusko)

Úloha č.3

Určte všetky celé čísla $n > 3$, pre ktoré existuje v rovine n bodov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a reálne čísla $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tak, že sú splnené obe nasledujúce podmienky:

i) žiadne tri z bodov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ neležia na jednej priamke;

ii) pre každú trojicu i, j, k $(1 \leqq i < j < k \leqq n)$ je obsah trojuholníka $A_iA_jA_k$ rovný $r_i + r_j + r_k$.

(Česká republika)

Úloha č.4

Nájdite maximálnu hodnotu čísla x_0, pre ktorú existuje postupnosť kladných reálnych čísel $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ spĺňajúca obe nasledujúce podmienky:

i) $x_0 = x_{1995}$;

ii)$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$, pre všetky $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

(Poľsko)

Úloha č.5

Nech $ABCDEF$ je konvexný šesťuholník, v ktorom platí:

$$|AB| = |BC| = |CD|,$$
$$|DE| = |EF| = |FA|,$$
$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle EFA| = 60°.$$

Nech G a H sú dva také body vo vnútri šesťuholníka, že $|\sphericalangle AGB| = |\sphericalangle DHE| = 120°$. Dokážte, že platí:

$$|AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE| \geqq |CF|.$$

(Nový Zéland)

Úloha č.6

Nech p je nepárne prvočíslo. Zistite počet takých podmnožín $\mathcal{A}$ množiny $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, že

i) $\mathcal{A}$ obsahuje práve p prvkov;

ii) súčet všetkých prvkov množiny $\mathcal{A}$ je deliteľný číslom p.

(Poľsko)

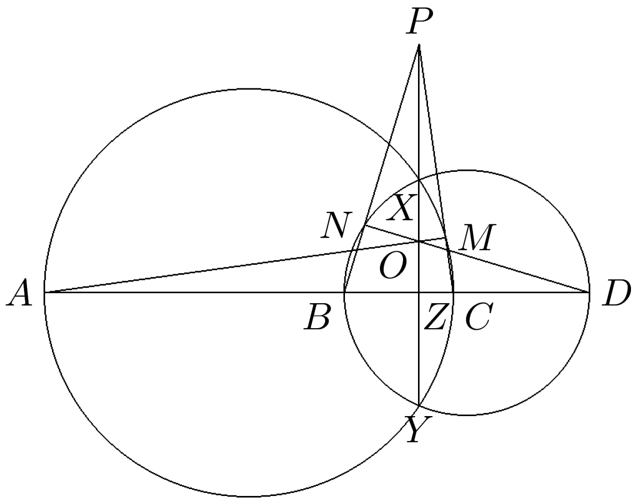
Riešenia úloh MMO

Úloha č.1

Riešenie podľa M. Pála.

Označme r polomer kružnice s priemerom BD, O priesečník priamky $\overleftrightarrow{DN}$ s priamkou $\overleftrightarrow{XY}$ a napokon O' priesečník priamky $\overleftrightarrow{AM}$ s priamkou $\overleftrightarrow{XY}$. Teraz určme vzdialenosť $|OZ|$ (obr. 25). Zrejme táto vzdialenosť môže byť len funkciou parametrov $r, |ZX|, |ZP|$. My dokážeme, že v skutočnosti táto dĺžka nezávisí od parametra r. Bez ohľadu na polohu začiatočných bodov teraz platia nasledujúce tvrdenie:

$$|\sphericalangle DNB| = |\sphericalangle PZB| = |\sphericalangle OZD| = 90°.$$



Obr. 25

Potom sú ale trojuholníky $\triangle DNB, \triangle PZB, \triangle DZO$ podobné a preto platí $\dfrac{|ZO|}{|ZD|} = \dfrac{|BZ|}{|ZP|}$. Z toho vyplýva

$$|ZO| = \frac{|BZ| \cdot |ZD|}{|ZP|}. \tag{1}$$

Lenže z mocnosti bodu Z ku kružnici nad priemerom BD platí

$$|BZ| \cdot |ZD| = |XZ| \cdot |ZY| = |XZ|^2. \tag{2}$$

Spojením (1) a (2) dostávame

$$|ZO| = \frac{|XZ|^2}{|ZP|}.$$

Čiže skutočne je vzdialenosť OZ závislá len na $|ZX|, |ZP|$. Ale zo symetrie vyplýva rovnaký vzťah aj pre vzdialenosť $|O'Z|$. Preto $|OZ| = |O'Z|$, a teda body O a O' splývajú.

Úloha č.2

Riešenie podľa M. Pála, upravené.
Položme $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Zrejme potom naďalej platí $xyz = 1, x, y, z \geqq 0$. Dokazovaná nerovnosť prechádza na ekvivalentný tvar

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqq \frac{3}{2}.$$

Po úprave na spoločného menovateľa a odstránení zlomkov (všetky menovatele sú kladné) dostávame opäť ekvivalentnú nerovnosť

$$(x^4 + y^4 + z^4) + (x^3y + y^3z + z^3x + x^3z + z^3y + y^3x) + (x + y + z) \geqq \\ \frac{3}{2}(2xyz + x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + z^2y + y^2x).$$

Poľahky nahliadneme, že ľavú a stranu stranu nerovnosti možno upraviť:

$$2(x^3 + y^3 + z^3 + 1)(x + y + z) \geqq 3(2xyz + x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + z^2y + y^2x). \qquad (1)$$

Teraz dokážeme nasledujúce dve nerovnosti

$$x + y + z \geqq \sqrt[3]{xyz} = 3, \qquad (2)$$

$$2(x^3 + y^3 + z^3 + 1) \geqq 2xyz + x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + z^2y + y^2x. \qquad (3)$$

Nerovnosť (2) je nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (čísla x, y, z sú všetky kladné) a nerovnosť (3) teraz dokážeme. Po jej jednoduchej úprave dostávame ekvivalentnú nerovnosť

$$2x^3 + 2y^3 + 2z^3 + 2 - 2xyz - x^2y - y^2z - z^2x - x^2z - z^2y - y^2x \geqq 0.$$

Po úprave ľavej strany a využití faktu $xyz = 1$ dostávame

$$x^2(2x - y - z) + y^2(2y - z - x) + z^2(2z - x - y) \geqq 0.$$

No teraz môžme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $x \geqq y \geqq z \geqq 0$, potom $x^2 \geqq y^2 \geqq z^2 \geqq 0$ a $2x - y - z \geqq 0$. Možno dokázať aj že $2y - x - z \geqq 0$. Potom, ale

$$x^2(2x-y-z)+y^2(2y-z-x)+z^2(2z-x-y) \geqq z^2(2x-y-z+2y-z-x+2z-x-y) = 0.$$

Keďže úpravy boli ekvivalentné, nerovnosť (3) skutočne platí. Teraz stačí nerovnosti (2) a (3) vzájomne prenásobiť (všade vystupujú len kladné čísla) a dostávame nerovnosť (1). Keďže aj úpravy danej nerovnosti na nerovnosť (1) boli ekvivalentné, dôkaz je ukončený.

Iné riešenie.
Opäť budeme dokazovať nerovnosť

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqq \frac{3}{2}$$

ekvivalentnú so zadanou. Označme súčet na ľavej strane nerovnosti S. Potom z Cauchyho nerovnosti vyplýva:

$$[(y+z)+(z+x)+(x+y)]\, S \geqq (x+y+z)^2,$$

čo znamená $S \geqq \frac{x+y+z}{3}$. Avšak z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ďalej vyplýva:

$$S \geqq \frac{x+y+z}{3} \cdot 32 \geqq \sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Rovnosť nastáva len pre $x = y = z = 1$, čo je ekvivalentné s $a = b = c = 1$.

Úloha č.3

Dokážeme, že $n = 4$ je jediné prirodzené číslo vyhovujúce danému problému. Pre $n = 4$ vyhovuje napríklad jednotkový štvorec $A_1A_2A_3A_4$ a čísla $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{6}$. Zostáva ukázať, že neexistuje žiadne riešenie pre $n = 5$, z čoho už vyplýva, že neexistuje žiadne riešenie pre $n \geqq 5$.

Tvrdenie dokážeme sporom. Nech existuje riešenie pre $n = 5$. Označme obsah trojuholníka $A_iA_jA_k$ ako S_{ijk}, $1 \geqq i < j < k \leqq 5$. Zo zadania vieme, že platí $S_{ijk} = p_i + p_j + p_k$. Zrejme nemôže platiť $p_i = p_j$. Ak by napríklad $p_4 = p_5$, potom $S_{124} = S_{125}$ a zároveň $S_{234} = S_{235}$, z čoho vyplýva, že A_4A_5 je rovnobežné aj s A_1A_2 aj A_2A_3. To však nie je možné, lebo body A_1, A_2 a A_3 neležia na jednej priamke. Rovnako si všimnime, že ak je štvoruholník $A_iA_jA_kA_l$ konvexný, potom platí $p_i + p_k = p_j + p_l$. Je to dôsledok toho, že $S_{ijk} + S_{kli} = S_{jkl} + S_{lij}$.

Všimnime si teraz konvexný obal bodov A_1, A_2, A_3, A_4 a A_5. Môžu nastať tri prípady.

V prvom prípade predpokladajme, že konvexný obal je päťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5$. Keďže sú štvoruholníky $A_1A_2A_3A_4$ a $A_1A_2A_3A_5$ konvexné, naše pozorovania vedú k tomu, že $p_1 + p_3 = p_2 + p_4$ a $p_1 + p_3 = p_2 + p_5$, čo znamená, že $p_4 = p_5$ a to je spor.

V druhom prípade nech je konvexným obalom štvoruholník $A_1A_2A_3A_4$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že A_5 leží v trojuholníku $A_3A_4A_1$. Potom je štvoruholník $A_1A_2A_3A_5$ konvexný, a dostávame spor ako v predchádzajúcom prípade.

No a napokon, predpokladajme, že konvexným obalom je $A_1A_2A_3$. Keďže však $S_{124} + S_{234} + S_{314} = S_{125} + S_{235} + S_{315}$, z čoho ale vyplýva $p_4 = p_5$, čo je spor.

Úloha č.4

Zadané podmienky sú ekvivalentné s rovnicami $2x_i^2 - \left(x_{i-1} + \frac{2}{x\,i-1}\right) x_i + 1 = 0$, ktoré majú riešenia $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$ a $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$. Dokážeme, že pre $i \geqq 0$ platí $x_i = 2^{k_i} x_0^{\varepsilon_i}$, pre nejaké prirodzené číslo k_i, $|k_i| \leqq i$ a $\varepsilon_i = (-1)^{k_i+i}$. Tvrdenie je pravdivé pre $i = 0$ s $k_0 = 0$ a $\varepsilon_0 = 1$. Ďalej budeme tvrdenie dokazovať indukciou. (Prvý krok sme už spravili.) Nech tvrdenie platí pre $i-1$ a $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$. Potom máme $k_i = k_i - 1$ a $\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$. Ak $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$, potom $k_i = -k_{i-1}$ a $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i-1}$. V každom prípade však platí $|k_i| \leqq i$ a $\varepsilon_i = (-1)^{k_i+i}$.

Teda skutočne $x_{1995} = 2^k x_0^\varepsilon$. Ak je k nepárne, potom $\varepsilon = 1$ a máme $2^k = 1$, čo je spor, lebo $k \neq 0$. Preto k musí byť párne, čiže $\varepsilon = -1$ a $x_0^2 = 2^k$. Pretože k je párne a $|k| \leqq 1995$, potom $k \leqq 1994$. Preto $x_0 \leqq 2^{997}$. Túto hodnotu možno dosiahnuť voľbou $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$ pre $i = 1, 2, \ldots, 1994$, a $x_{1995} = \frac{1}{x_1 994}$. Potom

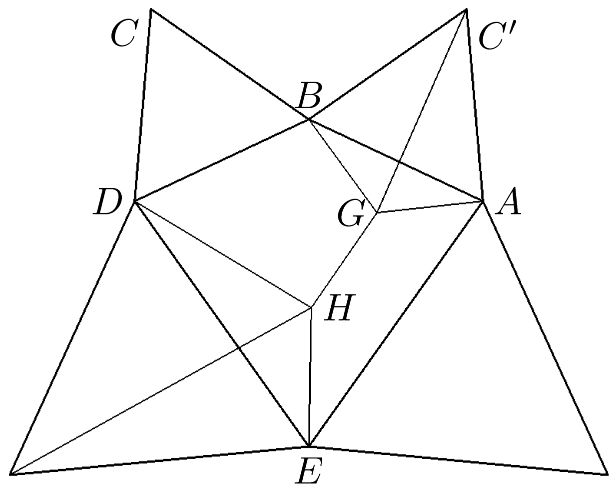
$$x_0 = x_{1995} = \frac{1}{2^{-1994}x_0}, \qquad \text{a preto} \quad x_0 = 2^{997}.$$

Úloha č.5

Všimnime si, že BCD a EFA sú rovnostranné trojuholníky (obr. 26). Preto je BE osou symetrie štvoruholníka $ABDE$. Zobrazme BCD a EFA cez BE po rade na $BC'A$ a $EF'D$. Keďže $|\sphericalangle BGA| = 180° - |\sphericalangle AC'B|$, G leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC'. Z Ptolemaiovej vety vyplýva $|AG| + |GB| = |C'G|$. Podobne dostávame $|DH| + |HE| = |HF'|$. Napokon spojením nerovností

$$|CF| = |C'F'| \leqq |C'G'| + |GH| + |HF'| = |AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE|,$$

kde rovnosť nastáva práve vtedy, keď obidva body G a H ležia na $C'F'$.



Obr. 26

Úloha č.6

Riešenie podľa M. Pála.

Označme X p-prvkovú množinu $X = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, kde p je nepárne prvočíslo. Skúmajme, koľkými spôsobmi možno vybrať z X práve k prvkov ($1 \leqq k < p$) tak, aby ich súčet dával zvyšok r_0 modulo p.

Vyberme ľubovoľnú k-ticu prvkov z X: $(x_1, \ldots, x_k)$. Nech $x_1 + \ldots + x_k \equiv r \pmod{p}$. Potom k-tice $(x_1 + \alpha, \ldots, x_k + \alpha)$, $\alpha = 0, \ldots, p-1$, dávajú zvyšky $r_\alpha \equiv r + k\alpha \pmod{p}$. Keďže p je prvočíslo, $k < p$, zrejme existuje α: $r_\alpha \equiv r_0 \pmod{p}$ a navyše sa všetky zvyšky mod p vyskytujú medzi r_α práve raz. Označme všetky k-tice $(x_1 + \alpha, \ldots, x_k + \alpha)$, $\alpha = 0, \ldots, p-1$. (Môžme ich označiť ľubovoľným symbolom, dôležité je len to, aby sme vedeli rozlíšiť označenú a neoznačenú k-ticu.) Ak ešte všetky k-tice nie sú označené, vyberme ľubovoľnú neoznačenú $(y_1, \ldots, y_k)$. Všetky $(x_1+\alpha, \ldots, x_k+\alpha), y_1+\beta, \ldots, y_k+\beta)$, $\alpha, \beta = 0, \ldots, p-1$, sú zrejme rôzne, preto táto nová trieda k-tic bude mať opäť p prvkov a žiadna k-tica v nej nie je zatiaľ označená. Takto môžme pokračovať, až kým nevyčerpáme všetky k-tice. Zrejme potom bude počet k-tic so zvyškom r_0 práve $N_k = \binom{p}{k}\frac{1}{p}$.

Vyberme teraz z množiny $\{1, \ldots, p\}$ l-ticu rôznych prvkov $(a_1, \ldots, a_l)$. Nech $a_1 + \ldots + a_l \equiv s \pmod p$, $0 \leqq s \leqq p-1$. K tejto l-tici vyberme k-ticu $(b_1, \ldots, b_k)$ z množiny $\{p+1, \ldots, 2p\}$ tak, že $k+l=p$ a $b_1 + \ldots + b_k \equiv -s \pmod p$. Keďže $p+1 \equiv 1, \ldots, 2p \equiv 0 \pmod p$, táto k-tica sa dá vybrať práve $N_k = \binom{p}{k}\frac{1}{p} = \binom{p}{p-l}\frac{1}{p} = \binom{p}{l}\frac{1}{p}$ spôsobmi. l-tica $(a_1, \ldots, a_l)$ sa zrejme dá vybrať $N_l = \binom{p}{l}\frac{1}{p}$ spôsobmi. Všetkých podmnožín množiny $\mathcal{A}$ teda bude

$$N_A = 2 + \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l}\binom{p}{p-l}\frac{1}{p}.$$

(Konštanta 2 na začiatku predstavuje prípady $l = p$ a $l = 0$, pre ktoré existuje zrejme vždy len jedna možnosť.)

Po malej úprave

$$N_A = \frac{2p-2}{p} + \frac{1}{p}\sum_{l=0}^{p-1} \binom{p}{l}\binom{p}{p-l}.$$

Dvojakým určením koeficientu pri x^p v polynóme $P(x) = (x+1)^p(x+1)^p = (x+1)^{2p}$ pomocou binomickej vety napokon dostávame

$$N_A = \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} + 2p - 2\right).$$

Druhá Stredoeurópska olympiáda v informatike

Druhý ročník Stredoeurópskej informatickej olympiády (Central European Olympiad in Informatics, CEOI '95) sa konal v dňoch 29.5. až 3.6. v juhomaďarskom Szegede. Zúčastnili sa na ňom štvorčlenné reprezentácie jedenástich krajín (44 účastníkov), z toho 6 kmeňových účastníckych krajín (Česká republika, Chorvátsko, Maďarsko, Poľsko, Rumunsko a Slovensko) a 5 krajín špeciálne pozvaných organizátormi (Bielorusko, Estónsko, Juhoslávia, Litva a Ukrajina). Ako špeciálni pozorovatelia sa zúčastnili aj zástupcovia Lotyšska, naopak z kmeňových krajín CEOI sa nedostavili Rakúsko a Slovinsko. Samotná súťaž je analógiou Medzinárodnej informatickej olympiády (MIO) a má slúžiť najmä ako príprava a motivácia pre študentov nižších ročníkov, ktorí by sa v budúcnosti mohli prebojovať na MIO.

Družstvo SR tvorili *Martin Hajduch* z 2.ročníka Gymnázia v Považskej Bystrici, *Martin Irman* z 3.ročníka Gymnázia Grösslingová v Bratislave, *Martin Domány* zo 4.ročníka Gymnázia v Michalovciach a *Vladimír Marko* z 2.ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave. Vedúcim družstva bol *RNDr. Juraj Balázs*, z PF UPJŠ Košice.

Po príchode 29.5. sa súťažiaci ubytovali na stredoškolských internátoch. Na druhý deň bolo na programe oboznámenie sa s prostredím a miestom súťaže (súťaž zabezpečovala katedra informatiky Univerzity A. Józsefa – JATE), prehliadka mesta, prvé zasadnutie poroty a slávnostné otvorenie spojené s prehliadkou zaujímavej výstavy z prehistórie počítačov. Samotná súťaž prebiehala v tretí a štvrtý deň. Súťažiaci mali k dispozícii 5 hodín čistého času, úlohy riešili na počítačoch PC 386DX alebo 486DX v prostredí MS DOS — naši súťažiaci programovali v Turbo Pascale s výnimkou M. Irmana (Borland C). Popoludní sa vyhodnocovali riešenia štandardným spôsobom známym z MIO (vstupno-výstupné správanie sa programov), pričom sa vyskytli určité problémy kvôli zavíreniu lokálnej siete. Po prvom dni mali naši reprezentanti (uvádzame v poradí ako vyššie) 85, 90, 70 a 70 bodov. Druhý deň získali 94, 67, 72 a 39 bodov, teda celkové počty získaných bodov boli 179 (Hajduch), 157 (Irman), 142 (Domány) a 109 (Marko). Úlohy boli zaujímavé a zložitosťou porovnateľné s úlohami posledných ročníkov MIO.

Na další deň bol na programe výlet do Národného pamätníka Ópusztaszer a večierok v univerzitnom klube. Večer porota hlasovala o rozdelení cien, pričom bola zabezpečená nestrannosť, rozhodovalo sa tak, aby ani členovia poroty netušili počet medailí svojho družstva. Odovzdávanie cien sa uskutočnilo v posledný deň na radnici mesta. Celkovo bolo udelených 24 medailí: 4 zlaté, 8 strieborných a 12 bronzových. Z našich získali zlato *Martin Hajduch* (celkovo 3.), striebro *Martin Irman* (8.) a bronz *Martin Domány* (14.). *Vladimír Marko* sa umiestnil na 28. mieste. V neoficiálnom poradí skončila SR na peknom treťom mieste (za Českou republikou a Poľskom). Cenné sú najmä skúsenosti zo súťaže typu MIO, ktoré sa môžu zúročiť na budúcich MIO.

Tretí ročník CEOI sa uskutoční v roku 1996 v Chorvátsku, príp. v Poľsku.

Juraj Balázs

Siedma medzinárodná olympiáda v informatike

Siedmy ročník MIO '95 sa konal v Holandsku v meste Eindhoven na pôde Technickej univerzity (TUE) v dňoch 26.6.–3.7.95. Hlavným organizátorom bola SLO so sídlom v Enschede (Štátny ústav pre tvorbu osnov). Slovensko reprezentovali štyria súťažiaci: *Dušan Bezák* z 3.ročníka z Gymnázia Grösslingová v Bratislave, *Miroslav Dudík* z 2.ročníka z Gymnázia v Trebišove, *Peter Gašpar* zo 4.ročníka z Gymnázia v Bardejove a *Martin Makúch* zo 4.ročníka z Gymnázia J.Hronca v Bratislave.

Vedúcou delegácie bola *RNDr. Viera Blahová* z ŠPÚ, Bratislava, zástupkyňou vedúcej bola *RNDr. Gabriela Andrejková, CSc.*, z PF UPJŠ, Košice.

Na olympiáde sa zúčastnilo 51 súťažiacich krajín (210 študentov) a dve krajiny prišli ako pozorovatelia. Všetkých účastníkov bolo približne 400. Na zvýšenie záujmu dievčat o programovanie mohla každá krajina vyslať na olympiádu päť súťažiacich, ak boli medzi nimi aj dievčatá. Túto možnosť Slovensko nevyužilo, pretože na celoštátnom kole nebolo žiadne dievča úspešnou riešiteľkou.

Súťažiaci boli ubytovaní asi 16 km od Eindhovenu v bungalovoch v kempe de Kempervennen. Tu bola študentom prístupná jedna miestnosť s desiatimi počítačmi. V budove TUE, v ktorej prebiehala súťaž bola súťažiacim prístupná ďalšia miestnosť s množstvom počítačov. Súťažnými dňami boli streda a piatok. Na zasadnutiach medzinárodnej poroty, ktorej členom sa stáva každý vedúci delegácie, sa prerokoval výber a formulácie súťažných úloh. Boli vybrané tri úlohy na každý súťažný deň. Zadania dostávali študenti v anglickom a v materinskom jazyku.

Holandsko prišlo s viacerými inováciami. Jeden z príkladov sa v prvý súťažný deň neriešil na počítači, ale išlo o teoretický problém. Nebolo v ňom potrebné písať v materinskom jazyku a riešenie následne prekladať, úlohou bolo doplniť tabuľky a časti programu zaoberajúce sa témou, ktorá bola definovaná v zadaní. Pritom sa nepredpokladalo, že by ju mohol študent už poznať. V druhý súťažný deň bol novým príkladom tzv. reaktívny program, ktorý kominukuje s užívateľom tým, že zadáva otázky na obrazovku a dostáva vstupné údaje z klávesnice. V praxi to spôsobilo určité problémy — zadania boli rozsiahlejšie, preklad do materinského jazyka zabral viac času ako sa pôvodne predpokladalo. Súťaž sa preto začala s hodinovým oneskorením o 12,00 hod. Študenti súťažili 5 a pol hodiny, mali predĺženú dobu na otázky a posunulo sa aj vyhodnocovanie.

Vyhodnocovanie prebiehalo automaticky. Vyhodnocovací program bol inštalovaný na jednom počítači, ku ktorému boli pripájané postupne všetky študentské počítače s ich riešeniami. Program vyhodnotil postupne všetky tri (prípadne dve) úlohy a vypočítal celkové skóre na základe desiatich sád testovacích dát. Každý beh bol v určenom časovom limite (väčšinou 20 s). Pri vyhodnotení bolo možné zapísať komentár do protokolu, týkajúci sa námietok k vyhodnoteniu. Vyhodnotenie prebiehalo za prítomnosti študenta, vedúcich a vyhodnocovateľa určeného organizátorom. Z vyhodnotenia bol urobený záznam na disketu, ktorú sme ponechali študentovi a dve kópie protokolu, ktoré boli vytlačené, jedna pre organizátorov a jedna pre delegáciu. Vyhodnocovanie tretieho teoretického príkladu sa robilo ručne a výsledky boli známe až na druhý deň.

Pri automatickom vyhodnocovaní druhého dňa nastal problém s reaktívnym programom, ktorý v mnohých prípadoch hlásil chybový stav, preto bol vyhodnocovaný dodatočne v noci bez našej prítomnosti a protokol sme dostali až na druhý deň.

Medzinárodná porota v sobotu rokovala o inovácii pravidiel MIO a problémoch, ktoré sa vyskytli. Rozhodlo sa tiež, že bude udelených 20 zlatých, 35 strieborných a 55 bronzových medailí.

Z nesúťažného programu stojí za zmienku zážitok z Provinciehuis pri kráľovskom komisariáte provincie Severné Brabantsko. Po privítaní poslancom parlamentu, hlavou provincie, nasledovala prednáška známeho holandského vedca, pracujúceho v oblasti computer science, E. Dijkstru, otca štruktúrovaného programovania, v ktorej porovnával situáciu v oblasti CS v USA a v Európe. Počas súťaže sa konal aj významný veľtrh a výstava zamerané na informatiku. Súťažiaci mali možnosť zoznámiť sa s podmienkami štúdia na TUE a zároveň spoznať prírodné a historické krásy oblasti, kde sa podujatie uskutočnilo. Zúčastnili sa výletov do miest Amsterdam a Roterdam, kde okrem vyhliadkových plavieb na lodi navštívili aj baseballové majstrovstvá sveta, ktoré sa v tom čase konali v Roterdeme.

Záverečné slávnostné vyhodnotenie, počas ktorého sa udeľovali medaily, sa konalo v budove Frits Philips Music Centre. Hlavnou výhrou bol počítač typu IBM PC a všetci zlatí medailisti získali vecnú cenu – CD prehrávač s diskami a softvér od firmy Philips. Naši nakoniec získali dve strieborné a dve bronzové medaily, čím sme sa zaradili do prvej tretiny zúčastnených krajín (13. miesto v neoficiálnom poradí so ziskom 470 bodov). Túto súťaž družstiev vyhralo družstvo Českej republiky (získali štyri zlaté medaily, spolu 635 bodov) pred družstvami Číny (618) a Ruska (587). V prvej desiatke skončili ešte po poradí družstvá Rumunska, Maďarska, USA, Poľska, Litvy, Fínska a Veľkej Británie.

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Martin Makúch	30	28	19	23	18	12	149	2.
Miroslav Dudík	30	28	15	30	14	32	130	2.
Peter Gašpar	21	8	12	0	27	32	100	3.
Dušan Bezák	24	4	18	0	21	24	91	3.

Na záver je potrebné konštatovať, že medzinárodná a slovenská olympiáda v informatike sa k sebe približujú. Hlavný rozdiel možno pozorovať v tom, že naša, vychádzajúc z matematickej olympiády a domácich podmienok, bola zameraná na riešenie teoretických problémov, len v poslednom ročníku sa zaradil jeden praktický príklad. Na medzinárodných olympiádach sa doteraz vyskytovali iba praktické príklady, teraz bol po prvýkrát zaradený aj jeden teoretický, s čím bolo spojených nesmierne veľa problémov. Študenti mali výhrady hlavne k hodnoteniu, kde vystupoval ľudský činiteľ. S automatickým hodnotením cez počítač, napriek istým výpadkom, boli spokojní a považovali ho za objektívnejšie.

Budúci ročník sa bude konať vo Veszpréme v Maďarsku.

Viera Blahová, Gabriela Andrejková

Zadania úloh MOI

1. Pokrytie pravouhlých štvoruholníkov

Sú dané štyri pravouhlé štvoruholníky. Nájdite najmenšie pokrytie (novým) pravouhlým štvoruholníkom (PŠ), v ktorom sa nachádzajú všetky štyri PŠ, ktorý má najmenší plošný obsah.

Všetky štyri PŠ musia mať paralelné strany s odpovedajúcimi stranami pokrývajúceho štvoruholníka.

Existuje niekoľko rôznych pokrytí, splňujúcich podmienky, ktoré majú rovnaký plošný obsah. Máte nájsť všetky také pokrytia.

Vstupné dáta

Vstupný súbor `INPUT.TXT` obsahuje štyri riadky. Každý riadok popisuje jeden daný PŠ dvoma kladnými celými číslami: dĺžkami strán PŠ. Každá strana PŠ má dĺžku najmenej 1 a najviac 50.

Výstupné dáta

Výstupný súbor `OUTPUT.TXT` by mal obsahovať o jeden riadok viac ako je počet riešení. Prvý riadok obsahuje jediné celé číslo: minimálny obsah pravouhlého štvoruholníka obsahujúceho PŠ.

A) Každý z nasledujúcich riadkov obsahuje jedno riešenie popísané dvoma číslami p a q, kde $p \leqq q$

B) Tieto riadky musia byť utriedené vzostupne podľa p, a musia byť rôzne.

2. Ponuka obchodu

Každý druh tovaru v obchode má svoju cenu. Napríklad cena kvetu je 2 ICU (Informatická Cenová Jednotka) a cena vázy je 5 ICU. Aby to bolo pre zákazníkov atraktívnejšie, obchod zaviedol špeciálne ponuky.

Špeciálna ponuka pozostáva z jednej alebo viacerých položiek, ktoré majú spoločne redukovanú cenu. *Príklady:* tri kvety sú za 5 ICU namiesto za 6, alebo dve vázy spolu s jedným kvetom sú za 10 ICU namiesto za 12.

Napíšte program, ktorý vypočíta cenu zákazníkovi, ktorú má zaplatiť za presne určené počty položiek, ktoré má v nákupnom košíku, tak aby bola optimalizovaná vzhľadom na špeciálne ponuky. To znamená, že cena má byť taká nízka, ako je len možné. Nie je však možné pridávať položky, aj keď by to znížilo cenu. Pre ceny a ponuky uvedené vyššie je (najnižšia) cena za tri kvety a dve vázy 14 ICU: dve vázy a jeden kvet sú za zníženú cenu 10 ICU a dva kvety sú za regulárnu cenu 4 ICU.

Vstupné údaje

Vstupné údaje sú v dvoch súboroch: `INPUT.TXT` a `OFFER.TXT`. Prvý súbor popisuje položky a ich ceny (nákupný košík). Druhý súbor popisuje špeciálne ponuky. V oboch súboroch sú používané len celé čísla.

Prvý riadok v súbore `INPUT.TXT` obsahuje počet b rôznych druhov tovarov v košíku ($0 \leqq b \leqq 5$). Každý z nasledujúcich b riadkov obsahuje tri hodnoty c, k, a p. Hodnota c je (jednoznačný) kód druhu tovaru ($1 \leqq c \leqq 999$). Hodnota k určuje, koľko položiek tohto druhu tovaru je v košíku ($1 \leqq k \leqq 5$). Hodnota p je regulárna cena za položku ($1 \leqq p \leqq 999$). Poznamenajme, že všetkých spolu je najviac $5 \times 5 = 25$ položiek, ktoré môžu byť v košíku.

Prvý riadok súboru `OFFER.TXT` obsahuje počet s špeciálnych ponúk ($0 \leqq s \leqq 99$). Každý z nasledujúcich s riadkov popisuje jednu špeciálnu ponuku uvedením jej štruktúry a jej zníženej ceny. Prvé číslo n v takom riadku je počet rôznych druhov tovarov, ktoré sú súčasťou ponuky ($1 \leqq n \leqq 5$). Ďalších n dvojíc čísel (c, k) určuje, že je v špeciálnej ponuke k položiek ($1 \leqq k \leqq 5$) s kódom c ($1 \leqq c \leqq 999$). Posledné číslo p v riadku určuje zníženú cenu ($1 \leqq p \leqq 9999$). Znížená cena špeciálnej ponuky je menšia než súčet regulárnych cien.

Výstupné údaje

Výpis výsledkov je do výstupného súboru `OUTPUT.TXT` v jedinom riadku, ktorý obsahuje najnižšiu možnú cenu zaplatenú za nákup uvedený vo vstupnom súbore.

3. Klient a server

Úlohu z priestorových dôvodov neuverejňujeme.

4. Hra s písmenami

Hry s písmenami sú populárne doma aj v televízii. V jednej verzii hry každé písmeno má svoju hodnotu a vy spájate písmená do tvaru jedného alebo viacerých slov dávajucich čo možno najvyššie skóre. Pokiaľ nemáte nejakú „metódu práce so slovami“, budete skúšať všetky slová, ktoré poznáte, niekedy sa pozriete na to, ako sa píšu a potom vypočítate skóre. Zvyčajne sa toto dá urobiť počítačom oveľa presnejšie.

Dané sú hodnoty písmen, zoznam anglických slov a zoskupenia písmen. Máte nájsť najvyššie skóre slov alebo dvojíc slov, ktoré môžu byť vytvorené. Písmeno sa nesmie vyskytovať vo výstupnom riadku častejšie ako vo vstupnom riadku.

Vstupné údaje

Vstupný súbor INPUT.TXT obsahuje jeden riadok s reťazcom malých písmen (od 'a' po 'z'): zoskupenie písmen. Reťazec pozostáva z aspoň 3 a najviac 7 písmen v ľubovoľnom poradí.

Slovník je uložený v súbore WORDS.TXT a obsahuje najviac 40000 riadkov. Na konci súboru je riadok, ktorý obsahuje len jednu bodku (.). Každý z ostatných riadkov obsahuje reťazec pozostávajúci z aspoň 3 a najviac 7 malých písmen. Slová v súbore sú utriedené v abecednom poradí. V slovníku sa nenachádzajú duplikáty slov.

Výstupné údaje

Prvý riadok vo výstupnom súbore OUTPUT.TXT vášho programu by mal obsahovať najvyššie skóre (podúloha A) a každý z nasledujúcich riadkov obsahuje všetky slová a/alebo dvojice slov zo súboru WORDS.TXT s týmto skóre (podúloha B). Použite hodnoty písmen, ktoré sú uvedené na konci úlohy.

Ak sa dá vytvoriť kombinácia dvoch slov z daných písmen, slová musia byť vytlačené v tom istom riadku odelené medzerou. Dvojica na výstupnom riadku môže obsahovať dve identické slová. Neduplikujte dvojice, napríklad „rag prom“ a „prom rag“ predstavujú tú istú dvojicu, preto len jedna z nich môže byť vypísaná.

Hodnoty písmen: q7 w6 e1 r2 t2 y5 u4 i1 o3 p5 a2 s1 d4 f6 g5 h5 j7 k6 l3 z7 x7 c4 v6 b5 n2 m5 (každé písmeno s hodnotou).

5. Cestné preteky

Daný je plán tratí cestných pretekov, na ktorom je niekoľko bodov označených 0 až N (tu je $N = 9$) a niekoľko šípok, ktoré ich spájajú. Bod 0 je štart pretekov, bod N je cieľ. Šípky predstavujú jednosmerné cesty. Účastníci pretekov sa môžu pohybovať z bodu do bodu po cestách len v smere šípok. V každom bode si účastník môže vybrať ľubovoľnú výstupnú šípku.

Dobre vytvorená trať má nasledujúce vlastnosti:

1. Každý bod trate je dosiahnuteľný zo štartu.
2. Cieľ je dosiahnuteľný z ľubovoľného bodu trate.
3. Cieľ nemá výstupné šípky.

Účastník nemusí navštíviť každý bod trate, aby prišiel do cieľa. Niektoré body sa však nedajú obísť, to sú nevyhnutné body. V uvedenom príklade sú týmito bodmi 0, 3, 6, 9. Pre danú dobre vytvorenú trať váš program má určiť množinu nevyhnutných bodov, ktoré musia navštíviť všetci účastníci s výnimkou bodov štart a cieľ (podúloha A).

Predpokladajme, že preteky sa uskutočnia v dvoch nasledujúcich dňoch. Z tohto dôvodu sa trať musí rozdeliť na dve trate, po jednej na každý deň. V prvý deň je štart v bode 0 a cieľ v nejakom 'deliacom bode'. Na druhý deň je štart v tomto deliacom bode a cieľ je v bode N. Pre danú dobre vytvorenú trať váš program má určiť množinu deliacich bodov (podúloha B).

Bod S je deliacim bodom pre dobre vytvorenú trať C, ak S je rôzny od štartu a cieľa trate C a táto trať sa môže rozdeliť na dve dobre vytvorené trate, ktoré nemajú spoločné šípky a ktoré majú bod S ako jediný spoločný bod. V uvedenom príklade len bod 3 je deliacim bodom.

Vstupné údaje

Súbor `INPUT.TXT` popisuje dobre vytvorenú trať s najviac 50 bodmi a najviac 100 šípkami. V súbore je $N + 1$ riadkov. Prvých N riadkov obsahuje koncové body šípok, ktoré vychádzajú z bodov 0 až $N - 1$. Každý z týchto riadkov je ukončený číslom -2. Posledný riadok obsahuje číslo -1.

Výstupné údaje

Váš program by mal napísať dva riadky do výstupného súboru `OUTPUT.TXT`. Prvý riadok musí obsahovať počet nevyhnutných bodov vo vstupnej trati, za ktorým nasledujú označenia týchto bodov v ľubovoľnom poradí (podúloha A). Druhý riadok musí obsahovať počet deliacich bodov vstupnej trate, za ktorým nasledujú označenia týchto bodov v ľubovolnom poradí (podúloha B).

Príklad: (graf s vrcholmi 0 až 9, nasleduje zoznam orientovaných hrán) $0 \to 1$, $0 \to 2$, $1 \to 3$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $3 \to 5$, $4 \to 4$, $4 \to 6$, $5 \to 6$, $6 \to 7$, $6 \to 8$, $7 \to 9$, $8 \to 5$, $8 \to 9$.

6. Vodiče a spínače

Uvažujme kábel s troma vodičmi spájajúcimi stranu A so stranou B. Na strane A sú tri vodiče označené 1, 2 a 3. Na strane B vodiče 1 a 3 sú spojené so spínačom 3 a vodič 2 je spojený so spínačom 1.

Vo všeobecnosti kábel obsahuje m vodičov ($1 \leqq m \leqq 90$), označených 1 až m na strane A a m spínačov na strane B, označených 1 až m. Každý vodič je pripojený presne k jednému spínaču. Každý spínač môže byť pripojený k nula alebo viacerým vodičom.

Merania

Váš program musí určiť ako sú pripojené vodiče k spínačom vykonaním nejakých meraní. Každý spínač môže byť vypnutý alebo zapnutý. Na začiatku sú všetky spínače vypnuté. Vodič môže byť testovaný na strane A skúškou P:

Lampa L bude svietiť vtedy a len vtedy, keď detekovaný vodič je pripojený na zapnutý spínač.

Váš program začne čítaním jedného riadku načítaním čísla m zo štandardného vstupu. Môže potom vydať tri druhy príkazov vypísaním riadku na štandardný výstup. Každý príkaz začína jediným veľkým písmenom : T (test vodiča), C (zmena stavu spínača), D (hotovo).

Za príkazom T nasleduje označenie vodiča, za príkazom C označenie spínača a za príkazom D zoznam, v ktorom i-tý prvok je označenie spínača, ku ktorému je pripojený i-tý vodič.

Po príkazoch T a C váš program musí prečítať jeden riadok zo štandardného vstupu. Príkaz

T vráti Y (Yes), ak spínač vodiča je zapnutý (lampa svieti), inak vráti N (No). Príkaz C vráti Y, ak nový stav vypínača je zapnutý, inak vráti N. Efekt príkazu C je zmena stavu spínača (ak bol zapnutý, potom bude vypnutý a naopak); výsledok je vrátený ako spätná väzba.

Váš program môže zadávať príkazy T a C v ľubovolnom poradí. Potom zadá príkaz D a skončí. Váš program nesmie zadať celkove viac ako 900 príkazov.

Poznámka: V jazyku PASCAL nepoužívajte unit CRT.

Korešpondenčný seminár ÚV MO

V minulých ročníkoch MO slúžil na prípravu najtalentovanejších študentov gymnázií celoštátny korešpondenčný seminár ÚV MO. Počas viac ako desiatich rokov trvania ho postupne riadili prof. Jozef Moravčík, doc. Antonín Vrba a RNDr. Karel Horák. Na začiatku mal pôsobiť ako seminár pre žiakov mimo Prahy a Bratislavy, ale neskôr sa zameral hlavne na prípravu študentov na III.kolo MO a MMO. Počet riešiteľov nikdy nebol veľmi vysoký, pretože náročnosť úloh bolo veľmi vysoká. Zároveň však dobre pripravila našich reprezentantov na MMO a azda aj zásluhou tejto súťaže družstvo Československa dosahovalo výborné umiestnenia. V 43. ročníku MO sa táto súťaž neuskutočnila z rôznych praktických dôvodov. Aj keď sa v tomto ročníku v Českej republike obnovila, bola už len pre riešiteľov z ČR. Preto ÚV MO pristúpil na organizovanie tejto súťaže na Slovensku. Počas školského roka prebehlo päť sérii, v každej mali súťažiaci riešiť po sedem príkladov. Do riešenia sa zapojilo spolu 32 študentov zo Slovenska (20 z Bratislvavy, 3 zo Západslovenského regiónu, 5 zo Stredoslovenského regiónu, 4 z Východoslovenského regiónu), z nich bol jeden žiakom 7.triedy a 4 študentmi druhého ročníka gymnázia. Účastníkmi súťaže boli aj všetci 6 členovia slovenskej delegácie na MMO vrátane oboch náhradníkov (obsadili popredné miesta). Takto súťaž už v svojom prvom ročníku prispela k príprave študentov a pomohla ÚV MO pri výbere na prípravné a výberové sústredenia pred MMO a na samotnú MMO. Korešpondenčný seminár viedol Richard Kollár a opravovanie zabezpečovali študenti MFF UK (všetko bývalí olympionici).

Celkové poradie 1.ročníka KS ÚV MO

1. *Eugen Kováč*, 3 Gymnázium Stropkov, 93.5 bodov,
2. *Martin Pál*, 4 Gymnázium J. Hronca, Bratislava, 88 bodov,
3. *Peter Macák*, 4 Gymnázium J. Hronca, Bratislava, $83,5$ bodov,
4. *Ján Bábeľa*, 4 Gymnázium Poštová, Košice, $62,5$ bodov,
5. *Ivan Cimrák*, 4 Gymnázium Veľká Okružná, Žilina, $53,5$ bodov.

Uvádzame všetky príklady, ktoré sa v priebehu roka riešili (boli vyriešené všetky úlohy!) aj s riešeniami, prevažne najlepšími študentskými. Až na pár výnimiek sú všetky príklady vybrané zo zborníka čínskych olympiád, ktorý pri príležitosti konania 35. medzinárodnej matematickej olympiady v Hong Kongu vydala Čínska ľudová republika spolu s Hong Kongom. Zvyšné úlohy sú tiež prebrané zo zahraničných olympiád.

Zadania súťažných úloh KS ÚV MO

Prvá séria

1.1 Na turnaji sa hrá jednokolovo systémom každý s každým. Každý zápas sa musí skončiť víťazstvom jedného z dvoch súperiacich hráčov. Hráč A dostane cenu, ak pre každého iného hráča B platí: A porazil B, alebo A porazil hráča C, ktorý porazil hráča B. Dokážte, že ak len jeden hráč dostane cenu, tak tento hráč porazil všetkých ostatných súperov.

1.2 Súčet m rôznych párnych prirodzených čísel a n rôznych nepárnych prirodzených čísel je rovný 1994. Aká je maximálna možná hodnota výrazu $3m + 4n$?

1.3 Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú dané reálne čísla, nie všetky rovné 0. Reálne čísla $r_1, r_2, \dots, r_n$ vyhovujú podmienke: pre ľubovoľnú n-ticu relnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí:

$$r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \ldots + r_n(x_n - a_n) \leqq$$

$$\leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Určte $r_1, r_2, \dots, r_n$ v závislosti na $a_1, a_2, \dots, a_n$.

1.4 Dokážte, že rovnica $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$, $n \in \mathbb{N}$ má v obore komplexných čísel koreň vyhovujúci podmienke $|z| = 1$ práve vtedy, ak je $n + 2$ deliteľné 6-timi.

1.5 Rovnostranný trojuholník so stranou n je rozdelený na n^2 rovnostranných trojuholníkov so stranou 1 priamkami rovnobežnými so stranami trojuholníka ABC. Každému bodu, ktorý je vrcholom najmenej jedného z týchto trojuholníkov, je priradené reálne číslo nasledovne: ak $PQRS$ je rovnobežník zložený z dvoch jednotkových trojuholníkov so spoločnou stranou, súčet čísel priradených vrcholom P, R a Q, S je rovnaký; bodom A, B a C sú po rade priradené čísla a, b, c.

a) Určte najkratšiu vzdialenosť medzi bodom, ktorému je priradené najväčšie číslo a bodom, ktorému je priradené najmenšie číslo.

b) Určte súčet všetkých čísel, ktoré sú priradené bodom.

1.6 Daných je 5 bodov vo vnútri rovnostranného trojuholníka s obsahom 1 . Dokážte, že existujú 3 rovnostranné trojuholníky také, že každý z daných 5 bodov leží vo vnútri aspoň jedného z týchto trojuholníkov a plocha, ktorú pokrývajú je nanajvýš $0,64$.

1.7 Daná je guľa so stredom O a štvorsten, ktorého všetkých 6 hrán sa dotýka danej gule. Ďalej vieme, že existujú 4 vzájomne sa dotýkajúce gule so stredmi vo vrcholoch štvorstena, ktoré sa naviac ešte všetky dotýkajú inej gule so stredom O. Dokážte, že daný štvorsten je pravidelný.

2.1 Dané sú dve sústredné kružnice, jedna z nich má dvojnásobný polomer ako druhá. Do menšej kružnice je vpísaný konvexný štvoruholník $ABCD$. Predĺženia polpriamok AB, BC, CD, DA pretínajú väčšiu kružnicu po poradí v bodoch C_1, D_1, A_1, B_1. Dokážte, že obsah štvoruholníka $A_1B_1C_1D_1$ je väčší alebo rovný dvojnásobku obsahu $ABCD$ a zistite, kedy nastáva rovnosť.

2.2 Ak $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je konečná postupnosť reálnych čísel, tak *drakom* nazveme blok za sebou idúcich členov postupnosti, ktorých aritmetický priemer je väčší ako 1994, *hlavou draka* nazývame prvý člen v takomto bloku. Samotný jeden člen väčší ako 1994 je tiež považovaný aj za *draka*, aj za *hlavu draka*. Nech $(a_i)_{i=1}^{k}$ je pevná postupnosť, v ktorej existuje aspoň jeden *drak*. Potom dokážte, že aritmetický priemer *hláv* všetkých *drakov* v tejto postupnosti je väčší ako 1994.

2.3 (A) Predpokladajme, že a_1, a_2 a a_3 sú kladné reálne čísla spĺňajúce podmienku:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4).$$

Dokážte, že takéto čísla a_1, a_2 a a_3 sú dĺžkami strán nejakého trojuholníka.

(B) Nech $n \in \mathbb{N}, n \geqq 3$. Ďalej predpokladajme, že

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4)$$

platí pre nejaké kladné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokážte, že potom pre každé $i, j, k \leqq n$ sú čísla a_i, a_j, a_k dĺžkami strán nejakého trojuholníka.

2.4 Dané sú tri štvorsteny $A_iB_iC_iD_i$, $1 \leqq i \leqq 3$. Bodmi B_i, C_i a D_i veďme tri roviny β_i, γ_i a δ_i kolmé po rade na priamky A_iB_i, A_iC_i a A_iD_i, $(i = 1, 2, 3)$. Vieme, že sa spomínaných 9 rovín pretína v jednom bode E a body A_1, A_2 a A_3 ležia na jednej priamke. Potom možno dokázať, že ak body A_1, A_2, A_3 splývajú, prienik troch gúľ opísaných daným štvorstenom je guľa opísaná štvorstenu $A_1B_1C_1D_1$.

a) Dokážte toto tvrdenie.

b) Zistite, čo ešte môže byť prienikom týchto sfér. Urobte úplnú diskusiu vzhľadom na polohu bodu E voči priamke A_1A_3.

2.5 Pre každé $n \geqq 3, n \in \mathbb{N}$ označme $f(n)$ najmenšie prirodzené číslo, ktoré nedelí n. Nech $f^{(1)}(n) = f(n)$. Ak $f^{(k)}(n) \geqq 3$, tak definujme rekurentne $f^{(k+1)}(n) = f(f^{(k)}(n))$. Ľahko nahliadneme, že pre každé $n \geqq 3$ existuje práve jedno k_n, pre ktoré $f^{(k_n)}(n) = 2$.

a) Zistite, či existuje $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $k_n = 4$.

b) Nájdite všetky $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $k_n = 3$.

2.6 Každá z množín A a B je zjednotením dvojice disjunktných oblúkov jednotkovej kružnice. Naviac, každý z oblúkov v B má dĺžku $\frac{\pi}{m}$, kde m je pevné prirodzené číslo. Označme $A^j, j = 1, 2, \ldots, 2m$ množinu získanú z A jej otočením okolo stredu jednotkovej kružnice o $\frac{j\pi}{m}$ radiánov v smere hodinových ručičiek. Dokážte, že potom existuje prirodzené číslo k, pre ktoré platí:

$$\ell(A^k \cap B) \geqq \frac{\ell(A)\ell(B)}{2\pi},$$

kde $\ell(X)$ označuje súčet dĺžok disjunktných oblúkov obsiahnutých v množine X.

2.7 Predpokladajme, že $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ n \geqq 2$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Tretia séria

3.1 Nech n je prirodzené číslo. Nájdite maximum funkcie :

$$f(x) = \frac{x + x^2 + \ldots + x^{2n-1}}{(1+x^n)^2}$$

a určte, pre ktoré x sa toto maximum nadobúda.

3.2 Nech n je párne, $n \geqq 2$ a nech $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Máme funkciu $g : A \to A$ s vlastnosťami :

$$\begin{aligned} g(k) &\neq k \qquad \forall k \in A, \\ g(g(k)) &= k \qquad \forall k \in A. \end{aligned}$$

Určte počet funkcií $f : A \to A$, pre ktoré platí :

$$\begin{aligned} f(k) &\neq g(k) \qquad \forall k \in A, \\ f(f(k)) &= g(k) \qquad \forall k \in A. \end{aligned}$$

3.3 Trojuholník ABC má polomer vpísanej kružnice r. Body D, E a F ležia na stranách BC, CA a AB. Ak polomery vpísaných kružníc trojuholníkov AEF, BFD a CDE sú rovnako veľké, je ich veľkosť $r - r'$, kde r' je polomer kružnice vpísanej trojuholníku DEF. Dokážte !

3.4 V rovine je daných 1994 bodov, pričom žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Ako ich máme rozdeliť do 30-tich skupín rôznej veľkosti, aby počet trojuholníkov s vrcholmi v rôznych skupinách bol maximálny?

3.5 Určte všetky funkcie $f : S \to S$, kde S je množina reálnych čísel väčších ako 1, pre ktoré $f(x^m y^n) \leqq f(x)^{1/4m} f(y)^{1/4n}$ pre všetky reálne čísla $x, y > 1$ a prirodzené $m, n > 0$.

3.6 Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$, v ktorom AB nie je rovnobežné s CD. Kružnica prechádzajúca bodmi A, B sa dotýka CD v bode P a kružnica prechádzajúca bodmi C, D sa dotýka AB v bode Q. Dokážte, že spoločná tetiva týchto kružníc rozpoľuje úsečku PQ práve vtedy, keď AD je rovnobežné s BC.

3.7 Pre dané prirodzené číslo x definujme *D-reťaz* čísla x dĺžky d ako postupnosť $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_d = x$, v ktorej x_i delí x_{i+1} pre $1 \leqq i \leqq d-1$. Pre $20^k 12^m 1994^n$, kde k, m a n sú prirodzené čísla, nájdite maximálnu dĺžku *D-reťaze* a počet *D-reťazí* tejto dĺžky.

Štvrtá séria

4.1 Nech S je jednotková kružnica v komplexnej rovine. Majme funkciu $f : S \to S$ definovanú predpisom $f(z) = z^m$, kde m je prirodzené číslo. Označme $f^{(0)}(z) = z$ a $f^{(k+1)}(z) = f(f^{(k)}(z))$ pre $k \geqq 0$. Najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré platí $f^{(n)}(z) = z$, nazveme periódou čísla z. Určte počet čísel v S, ktorých perióda je 1995.

4.2 Aké podmienky musí spĺňať konvexný štvoruholník $ABCD$, aby v rovine $ABCD$ existoval bod P, pre ktorý sú obsahy trojuholníkov ABP, BCP, CDP a DAP rovnaké ? Aký najväčší počet takýchto bodov existuje pre daný štvoruholník $ABCD$?

4.3 Jeden príklad z bežného života: Desať malých sýkoriek oddychuje na terase. Spomedzi ľubovoľných piatich z nich aspoň štyri sedia na jednej kružnici. Aká je minimálna hodnota maximálneho počtu sýkoriek z týchto desiatich, ktoré sedia na jednej kružnici ?

4.4 Konvexný štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice so stredom O. Označme P priesečník uhlopriečok AC a BD a ďalej označme Q priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABP a CDP rôzny od P. Dokážte, že ak sú O, P a Q tri rôzne body, potom $OQ \perp PQ$.

4.5 Dané je prirodzené číslo a a reálne čísla A a B. Uvažujme systém rovníc

$$x^2(Ax^2 + By^2) + y^2(Ay^2 + Bz^2) + z^2(Az^2 + Bx^2) = \frac{(2A + B)(13a)^4}{4},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = (13a)^2.$$

Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku pre A a B, aby mal tento systém riešenie x, y a z v obore prirodzených čísel.

4.6 Konvexný n-uholník sa dá rozdeliť jeho $n-3$ uhlopriečkami na $n-2$ trojuholníkov tak, že žiadne dve z týchto uhlopriečok sa nepretínajú vo vnútri n-uholníka mimo jeho vrcholov. Dokážte, že aspoň pre jedno takéto rozdelenie možno uhlopriečky toto rozdelenie určujúce a hrany n-uholníka nakresliť jedným uzavretým neprerušeným ťahom bez opakovania hrán vtedy a len vtedy, ak je n násobkom troch.

4.7 Daná je konečná množina X a $E(X)$ systém všetkých podmnožín množiny X s párnym počtom prvkov. Funkcia $f : E(X) \to \mathbb{R}$ spĺňa podmienky:
– $f(D) > 1995$ pre aspoň jednu množinu D zo systému $E(X)$,
– $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - 1995$ pre ľubovoľne disjunktné A, B z $E(X)$.

Dokážte, že X možno rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny P, Q také, že $f(S) > 1995$ pre všetky neprázdne množiny S z $E(P)$ a $f(T) \leqq 1995$ pre všetky T z $E(Q)$.

Piata séria

5.1 Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú nezáporné reálne čísla a nech a je najmenším z týchto čísel. Dokážte, že

$$\frac{1+x_1}{1+x_2} + \frac{1+x_2}{1+x_3} + \dots + \frac{1+x_{n-1}}{1+x_n} + \frac{1+x_n}{1+x_1} \leqq$$
$$\leqq n + \frac{(x_1-a)^2 + (x_2-a)^2 + \dots + (x_n-a)^2}{(1+a)^2}$$

Dokážte tiež, že rovnosť nastáva práve vtedy ak $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

5.2 Na začiatku sú v každom políčku tabuľky 9×9 vpísané čísla 1 a -1. Pre každé políčko P vypočítame súčin všetkých čísel vpísaných do políčok, ktoré majú spoločnú hranu s P. Súčasne nahradíme čísla vo všetkých políčkach príslušnými súčinmi. Nastane vždy taká situácia, že po konečnom opakovaní popísanej operácie bude vo všetkých 81 políčkach vpísané číslo 1 ?

5.3 Nech $0 < a_0 \leqq a_0 \leqq \dots \leqq a_{n-1} \leqq 1$ sú reálne čísla. Nech λ je komplexný koreň rovnice $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ taký, že $|\lambda| \geqq 1$. Dokážte, že $\lambda^{n+1} = 1$.

5.4 Graf s 8 vrcholmi neobsahuje žiadnu slučku (teda hranu začíanjúcu aj končiacu v tom istom vrchole), žiadnu násobnú hranu, ani cyklus dĺžky 4. Aký najvyšší počet hrán môže mať ?

5.5 Nech a_0 a a_1 sú celé čísla. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je definovaná vzťahmi

$$a_2 = 2a_1 - a_0 + 2,$$
$$a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \forall n \geqq 2$$

Ak pre každé prirodzené číslo m obsahuje postupnosť m posebeidúcich členov, z ktorých sú všetky štvorcami celých čísel, potom všetky členy postupnosti sú štvorcami. Dokážte.

5.6 Nájdite všetky funkcie $f : \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ také, že pre všetky x, y a z z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ platí:

$$f(x,1) = x,$$
$$f(1,y) = y,$$
$$f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$$
$$\mathrm{a} f(zx, zy) = z^k f(x,y)$$

pre nejakú kladnú konštantu k, nezávislú od voľby x, y a z.

5.7 Funkcia f nadobúdajúca reálne hodnoty pre všetky nezáporné reálne čísla, spĺňa podmienku :

$$f(x)f(y) \leqq y^2 f(x/2) + x^2 f(y/2)$$

pre všetky $x \geqq y \geqq 0$. Súčasne platí $|f(x)| \leqq M$ pre $0 \leqq x \leqq 1$, kde M je nejaká pevná konštanta. Dokážte, že $f(x) \leqq x^2$.

Riešenia súťažných úloh KS ÚV MO

Prvá séria

1.1 Dokážme najprv platnosť nasledujúceho tvrdenia.

Lema *V každom turnaji existuje hráč ocenený cenou.*

Dôkaz Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Prvý krok Pre $n = 2$ tvrdenie zrejme platí (jeden hráč porazil toho druhého, teda dostal cenu).

Druhý krok Nech pre všetky turnaje s n hráčmi dané tvrdenie platí. Majme potom $n+1$ hráčov. Z nich izolujme hráča A a neuvažujme žiadne zápasy, ktoré zohral. Zostalo nám n hráčov hrajúcich turnaj. Medzi nimi podľa indukčného predpokladu existuje hráč B odmenený cenou. Hráčov z tejto n-tice rozdeľme do dvoch množín :

V - množina hráčov, ktorí vyhrali nad B,
P - množina hráčov, ktorí prehrali s B.

Potom, vrátiac sa k pôvodnému turnaju s $n+1$ hráčmi, môžu nastať tieto situácie :

i) A prehral s B

ii) existuje hráč $X \in P$ taký, že A prehral s X

iii) pre každého hráča $X \in P$; A vyhral nad X a A vyhral nad B.

V prípadoch i) a ii) zjavne hráč B spĺňa kritérium na udelenie ceny. V prípade iii) pre zmenu hráč A dostane cenu (porazil B, všetkých hráčov z P a sprostredkovane aj všetkých hráčov z V), čím sme vlastne dokázali lemu.

Poznámka. Toto tvrdenie sa dá ukázať aj tak, že pozorujeme hráča s najväčším počtom výhier a ukážeme, že musí dostať cenu.

Použiť túto lemu pri vyriešení úlohy je jednoduché : Predpokladajme, že cenu dostal iba jeden hráč a existuje neprázdna množina C hráčov, ktorí nad ním vyhrali. Potom v turnaji, zohľadňujúcom iba výsledky hráčov z C, existuje ocenený hráč. Tento ale porazil cenou odmeneného hráča a jeho prostredníctvom aj všetkých ostatných hráčov (nepatriacich do C). Teda aj on spĺňa podmienky pre udelenie ceny, čo je spor s predpokladom.

1.2 Jednoduchou úvahou zistíme, že čísla m a n je vhodné voliť tak, aby

$$1994 \geqq (2+4+\ldots+2m)+(1+3+\ldots+(2n-1)) = (m+\frac{1}{2})^2 + n^2 - \frac{1}{4},$$

alebo

$$(m+\frac{1}{2})^2 + n^2 \leqq 1994 + \frac{1}{4}.$$

Z Cauchyho nerovnosti dostávame:

$$3m + 4n = 3\left(m + \frac{1}{2}\right) + 4n - \frac{3}{2} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{(3^2 + 4^2)}\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2} - \frac{3}{2} \leqq 5 \cdot \sqrt{1994 + \frac{1}{4}} - \frac{3}{2} < 222.$$

Preto $3m + 4n \leqq 221$. Diofantická rovnica $3m + 4n = 221$ má mnoho kladných riešení. Rozhodne však z tejto rovnice modulo 4 dostávame $m \equiv 3 \pmod 4$. Ďalej $n = \dfrac{221 - 3m}{4}$. Má však platiť $m^2 + m + n^2 \leqq 1994$. Po dosadení dostávame

$$m^2 + m + \frac{221 - 3m}{4} \leqq 1994.$$

Riešením tejto kvadratickej nerovnice zistíme, že jediné m, vyhovujúce podminke $m \equiv 3$ mod 4, je $m = 27$. K nemu ale prislúcha nepárne $n = 35$. Keďže však počet nepárnych čísel musí byť párny (1994 je párne), úloha pre $3m + 4n = 221$ nemá riešenie. Potom je hľadané maximum 220, lebo pre čísla $1, 3, \ldots, 73, 2, 4, \ldots, 52, 54, 82$ platí $3m + 4n = 220$.

1.3 *(Ivan Cimrák)* Uvažujme $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n), \vec{r} = (r_1, \ldots, r_n), \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, ako vektory n-rozmerného Euklidovského priestoru, kde $\vec{r}, \vec{a}$ zvierajú uhol α a vektory $\vec{r}, \vec{x}$ uhol φ. Potom podľa zadania, pre ľubovoľný vektor $\vec{x}$ má platiť:

$$\vec{r} \cdot \vec{x} - |\vec{x}| \leqq \vec{r} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|,$$

a teda pre všetky $\varphi, |\vec{x}|$ má byť

$$|\vec{x}|(|\vec{r}| \cos\varphi - 1) \leqq |\vec{a}|(|\vec{r}| \cos\alpha - 1). \tag{1}$$

Nech existuje φ také, že $|\vec{r}| \cos\varphi - 1 \geqq 0$. Potom nerovnosť

$$|\vec{x}| \leqq \frac{|\vec{a}|(|\vec{r}| \cos\alpha - 1)}{|\vec{r}| \cos\varphi - 1}$$

zjavne neplatí pre dostatočne veľké hodnoty $|\vec{x}|$. Čiže pre každé φ platí $|\vec{r}| \cos\varphi - 1 \leqq 0$, a teda

$$|\vec{r}| \leqq 1. \tag{2}$$

Zvoľme φ tak, aby $|\vec{r}| \cos\varphi - 1 \neq 0$. Potom z (1) dostávame:

$$|\vec{x}| \geqq \frac{|\vec{a}|(|\vec{r}| \cos\alpha - 1)}{|\vec{r}| \cos\varphi - 1} = k.$$

Ak $k > 0$, tak iste existuje $|\vec{x}| < k$ a posledný vzťah neplatí. Teda $k < 0$, čiže $|\vec{a}|(|\vec{r}| \cos\alpha - 1) \geqq 0$. Keďže $|\vec{a}| \geqq 0$ podľa zadania, máme

$$|\vec{r}| \cos\alpha \geqq 1, \tag{3}$$

a teda určite $|\vec{r}| \geqq 1$. Z toho a z (2) dostávame $|\vec{r}| = 1$. Použitím tohto vzťahu a (3) konečne dostávame $\alpha = 0$, čiže $r_i = \dfrac{a_i}{|\vec{a}|}$.

Zostáva overiť, či nájdené $\vec{r}$ vyhovuje podmienkam úlohy.

$$\vec{r} \cdot \vec{x} - \vec{r} \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\left(\vec{x} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{|\vec{a}|}\left(|\vec{x}| \cdot |\vec{a}| \cos\varphi - |\vec{a}|^2\right) = |\vec{x}| \cos\varphi - |\vec{a}|^2 \leqq |\vec{x}| - |\vec{a}|^2.$$

1.4 *(Peter Macák)* Predpokladajme, že rovnica má koreň w, pre ktorý $|w| = 1$. Po dosadení:

$$\begin{aligned} w^{n+1} - w^n - 1 &= 0 \\ w^n(w-1) &= 1 \\ |w|^n \cdot |w-1| &= 1, \end{aligned}$$

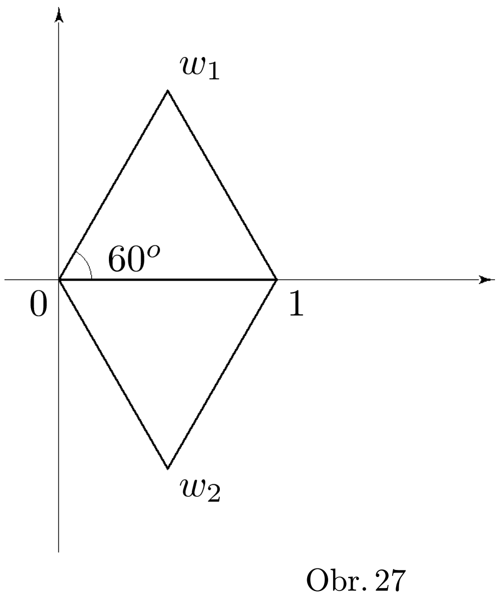
teda $|w - 1| = 1$. Z toho a z predpokladu $|w| = 1$ vyplýva, že komplexné číslo w má v Gaussovej rovine rovnakú vzdialenosť (rovnú 1) od čísel 0 a 1, a teda w je vrcholom rovnoramenného trojuholníka so základňou 01, (obr. 27).

V goniometrickom tvare: $w = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}$. V prvom prípade po dosadení a použití *Moivrovej vety* dostávame:

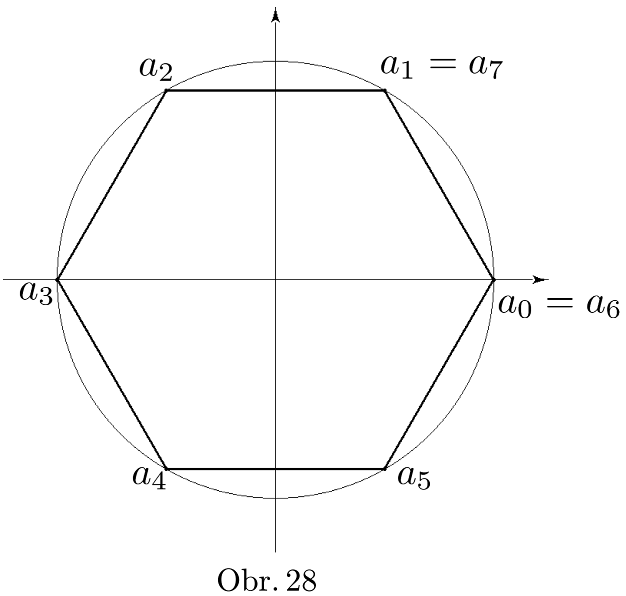
$$w_1^{n+1} - w_1^n = 1$$

$$\left(\cos(n+1)\frac{\pi}{3} + i\sin(n+1)\frac{\pi}{3}\right) - \left(\cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3}\right) = 1 \qquad (*)$$

Čísla tvaru $\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}$ sú vrcholmi pravidelného šesťuholníka v Gaussovej rovine (obr. 28): $a_i = a_j \iff i \equiv j \pmod 6$.



Obr. 27



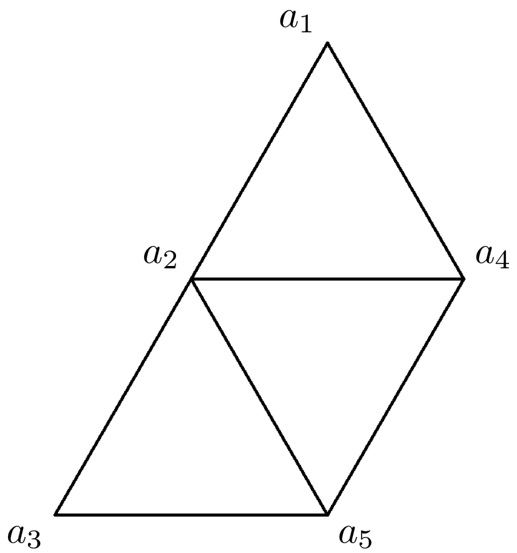
Obr. 28

Vo vzťahu ($*$) požadujeme, aby $a_{n+1} - a_n = 1$, čo je zrejme splnené len pre dvojicu a_4, a_5, a teda musí platiť $n \equiv 4 \pmod 6$, inými slovami $6|n+2$, čo sme chceli dokázať. Rovnaký výsledok dostaneme aj v prípade, ak za w dosadíme $w_2 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$.

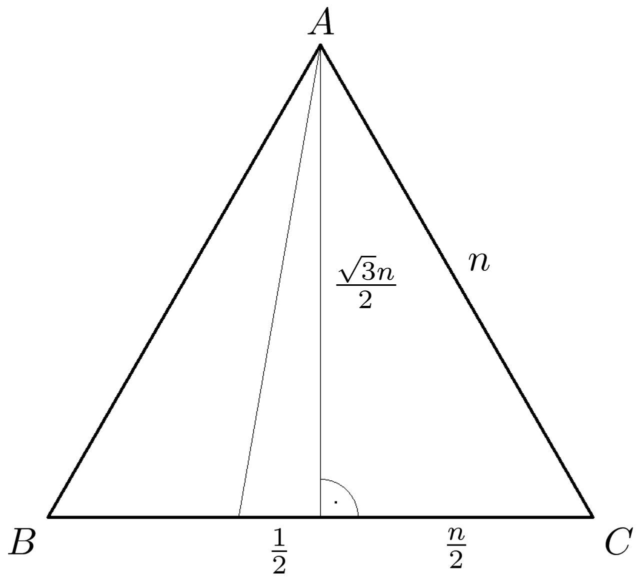
V prípade, že $6|n+2$ jednoduchým dosadením čísla $w = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ za z zistíme, že naša rovnica má naozaj koreň s absolútnou hodnotou 1.

1.5 Všimnime si ľubovoľné tri susedné malé trojuholníky a označme ich vrcholy a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (obr. 29). Z rovností $a_1 + a_5 = a_2 + a_4$, $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$ dostávame $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$. Z toho vyplýva, že čísla na ľubovoľnej úsečke, rovnobežnej so stranou trojuholníka ABC, tvoria aritmetickú postupnosť, ktorej extrémne (najmenšia a najväčšia) hodnoty ležia na obvode $\triangle ABC$.

(a) Označme hľadanú vzdialenosť r. Ak $a = b = c$, potom sú všetky čísla v trojuholníku rovnaké a $r = 0$. Ak $a \neq b \neq c \neq a$, potom extrémne hodnoty môžu ležať len vo vrcholoch $\triangle ABC$, teda $r = n$. Nech $b = c \neq a$. Potom extrémne hodnoty ležia vo vrchole A a na hrane BC. Na obr. 30vidíme, že $r = \frac{\sqrt{3}n}{2}$, ak n je párne, a $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}n}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3n^2+1}}{2}$, ak n je nepárne.



Obr. 29



Obr. 30

(b) Otočením trojuholníka ABC o 120° a 240° získame dva iné očíslované trojuholníky. Teraz uvažujme číslo každého bodu ako súčet čísel jemu priradených v pôvodnom a dvoch otočených trojuholníkoch. Keďže rovnobežníkové pravidlo platí pre každý z týchto trojuholníkov, platí aj pre trojuholník z nich zložený. Lenže v ňom má každý bod priradené číslo $a + b + c$. Keďže tento trojuholník má

$$1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

očíslovaných bodov, súčet čísel priradených bodom trojuholníka ABC je

$$\frac{(n+1)(n+2)(a+b+c)}{6}.$$

Iné riešenie *(Boris Krupa).*

Najprv tiež nahliadneme aritmetický rast na susedných políčkach. Vyjadrime teraz všetky hodnoty bodov ako lineárnu kombináciu vektorov $(\frac{a}{n}, 0, 0), (0, \frac{b}{n}, 0), (0, 0, \frac{c}{n})$.

b) Ak chceme zistiť súčet všetkých čísel, spočítame všetky zložky vektorov zvlášť, a potom tieto súčty spočítame.

$$S = \frac{a+b+c}{n}\left[\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{2}{2}\right] = \frac{a+b+c}{n}\binom{n+2}{3}.$$

a) Hodnota každého bodu (x, y, z) je $\frac{x}{n} \cdot a + \frac{y}{n} \cdot b + \frac{z}{n} \cdot c = \frac{1}{n} \cdot (xa + yb + zc)$, pričom $x + y + z = n$ je konštanta. Bez ujmy na všeobecnosti nech $a \geqq b \geqq c$. Potom pre ľubovoľné $t = \frac{1}{n} \cdot (xa + yb + zc)$ platí $c \leqq t \leqq a$, lebo t je váženým aritmetickým priemerom čísel a, b, c. Rovnosť môže nastať, len keď čísla a, b, c nie sú navzájom rôzne. Preto v prípade $a \neq b \neq c \neq a$ sú extrémne hodnoty len vo vrcholoch, čiže hľadaná vzdialenosť je n. Ostatné prípady sa rozdiskutujú podobne ako v 1. riešení.

Iné riešenie *(Martin Pál, len časť b).* Každému bodu je priradené číslo tvaru $x = k_1a + k_2b + k_3c$, k_1, k_2, k_3 závisia od polohy bodu. Preto celý súčet bude tvaru:

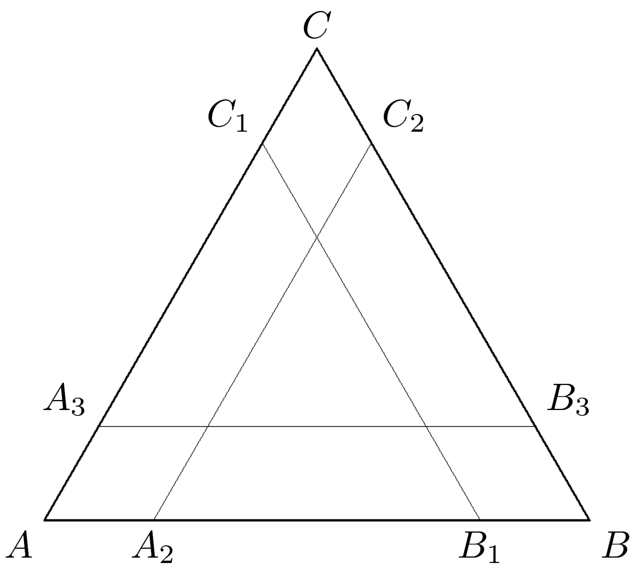
$$S = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c.$$

Zo symetrie vyplýva, že $\alpha = \beta = \gamma$. Preto je súčet rovný $S = k \cdot (a + b + c)$. Na určenie konštanty k, ktorá závisí len od veľkosti trojuholníka, položíme $a = b = c$. Jednoduchým výpočtom získame hľadaný súčet.

1.6 *(Michal Kovár a Michaela Ačová)* Označme $|AB| = |BC| = |CA| = a$, kde $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 1$. Ďalej označme body $A_2, A_3, B_1, B_3, C_1, C_2$ (obr. 31) tak, aby $|AB_1| = |BC_2| = \ldots = |CB_3| = a(0.8 - \varepsilon)$, kde ε je vhodné malé reálne číslo.

Môže nastať niekoľko prípadov:

a) Ak by v niektorom z trojuholníkov $AB_1C_1, A_2BC_2, A_3B_3C$ ležali tri z daných bodov (ďalej len body), potom obsah tohto trojuholníka je menší ako $0,64$. Vhodne malými trojuholníkmi pokryjeme zvyšné dva body a celkový obsah nepresiahne $0,64$.



Obr. 31

b) V žiadnom z týchto trojuholníkov neležia 3 body. Poľahky nahliadneme, že potom existuje vrchol, pri ktorom v rovnobežníku ležia práve dva body a zvyšné tri sú rozmiestnené pri protiľahlej strane, buď po jednom, alebo dva v jednom krajnom rovnobežníku a jeden v druhom. Ak nastáva prvý prípad, pokryjeme prvé dva body trojuholníkom rovnoľahlým s AA_2A_3 s koeficientom 2 a stredom rovnoľahlosti A. Tento má obsah trochu menší ako $0,16$. Ďalej zostrojme trojuholník rovnoľahlý s trojuholníkom CC_1C_2, so stredom C a koeficientom 3 a trojuholník rovnoľahlý s trojuholníkom BB_1B_3, so stredom B a koeficientom 3. Tieto potom pokrývajú lichobežník pri strane b, a preto bod v tomto lichobežníku patrí bez ujmy na všeobecnosti napríklad prvému z nich. Jeho obsah je menší ako $0,36$. Posledný bod pokryjeme dostatočne malým trojuholníkom. Je zrejmé, že táto konštrukcia zahŕňa aj druhý uvedený prípad.

1.7 Označme T guľu, dotýkajúcu sa všetkých šiestich strán štvorstena $A_1A_2A_3A_4$, S druhú guľu zo zadania so stredom O a S_i gule so stredmi A_i pre $i = 1,2,3,4$. Ďalšie úvahy budeme bez ujmy na všeobecnosti robiť z pohľadu roviny $A_1A_2A_3$. Ďalej označme B_1, B_2, B_3 po rade dotykové body gúľ S_2 a S_3, S_3 a S_1, S_1 a S_2. Nech C_1, C_2, C_3 sú body dotyku gule T s priamkami A_2A_3, A_3A_1 a A_1A_2 v tomto poradí. Potom $|A_1B_2| = |A_1B_3|, |A_2B_3| = |A_2B_1|, |A_3B_1| = |A_3B_2|, |A_1C_2| = |A_1C_3|, |A_2C_3| = |A_2C_1|, |A_3C_1| = |A_3C_2|$. Z toho vyplýva, že $B_i = C_i$ pre $i = 1,2,3$. Treba si ale uvedomiť, že dve gule môžu mať aj vnútorný dotyk! Predpokladajme, že S_1 je vo vnútri S a S_2 je mimo S. Potom bod dotyku S_1 a S_2 splýva s bodmi dotyku týchto gúľ s guľou S, a preto sa S_3 a S_4 tiež dotýkajú v tomto bode. To je však nemožné, pretože body A_1, A_2, A_3, A_4 nemôžu byť kolineárne. Označme R, r, r_1, r_2, r_3, r_4 polomery gúľ T, S, S_1, S_2, S_3, S_4 v tomto poradí. Ak S je mimo S_1, potom je tiež mimo S_2, S_3 a S_4. Platí $|OB_3|^2 + |A_1B_3|^2 = |OA_1|^2$, alebo $R^2 + r_1^2 = (r + r_1)^2$. Podobne $R^2 + r_2^2 = (r + r_2)^2$. Ďalej dostávame:

$$|A_1A_2| = r_1 + r_2 = \frac{R^2 - r^2}{2r} + \frac{R^2 - r^2}{2r} = \frac{R^2 - r^2}{r}.$$

Podobne $|A_iA_j| = \dfrac{R^2-r^2}{r}$, pre $1 \leqq i < j \leqq 4$. Preto je štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ pravidelný. Ak S obsahuje S_1, potom obsahuje aj S_2, S_3 a S_4. Potom podobne dostaneme, že štvorsten $A_1A_2A_3A_4$ je pravidelný so stranou dĺžky $\dfrac{r^2-R^2}{r}$.

Druhá séria

2.1 *(Eugen Kováč)* Najprv označme S obsah štvoruholníka $ABCD$, S' obsah štvoruholníka $A_1B_1C_1D_1$, S_1 obsah trojuholníka B_1AC_1, S_2 obsah trojuholníka C_1BD_1, S_3 obsah trojuholníka D_1CA_1, S_4 obsah trojuholníka A_1DB_1 a β veľkosť uhla ABC. Zrejme platí $S' = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S$. Nech r je polomer menšej kružnice. Potom pre mocnosť bodu C_1 k menšej kružnici platí:

$$|C_1B| \cdot |C_1A| = (2r)^2 - r^2 = 3r^2 \qquad \text{(vzdialenosť } C_1 \text{ od stredu je } 2r\text{)}.$$

Zrejme $|C_1A| \leqq 3r$ (rovnosť nastáva, keď AB je priemer menšej kružnice), potom platí $|C_1B| \geqq r \geqq \frac{1}{2}|AB|$, lebo $|AB| \leqq 2r$. Ďalej platí:

$$\sin|\sphericalangle C_1BD_1| = \sin(180^\circ - |\sphericalangle C_1BD_1|) = \sin|\sphericalangle ABC| = \sin\beta.$$

Potom (zrejme $\sin\beta > 0$)

$$\begin{aligned} S_2 = \frac{1}{2}|BC_1| \cdot |BD_1| \cdot \sin\beta &\geqq \frac{1}{4}|AB| \cdot |BD_1| \cdot \sin\beta > \\ > \frac{1}{4}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta &= \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

Analogicky odvodíme, že $S_3 > \frac{1}{2}S_{\triangle BCD}$, $S_4 > \frac{1}{2}S_{\triangle CDA}$ a $S_1 > \frac{1}{2}S_{\triangle DAB}$.

Sčítaním týchto nerovností dostávame:

$$\begin{aligned} S + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 > S + \frac{1}{2}\left(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CDA} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle DAB}\right) = \\ = S + \frac{1}{2}(S + S) = 2S, \end{aligned}$$

pričom rovnosť nenastáva nikdy.

2.2 Malá zmena textu zadania môže veľmi zmeniť riešenie zadanej úlohy. V tomto prípade možno uvažovať tieto rôzne varianty:

a) *Dokážte, že aritmetický priemer všetkých hláv drakov je väčší ako 1994*

b) *Dokážte, že aritmetický priemer hláv všetkých drakov je väčší ako 1994.*

Keďže ide o dve rôzne úlohy uvádzame riešenie obidvoch.

a) *(Martin Pál, Peter Macák a Boris Krupa)* Uvažujme našu postupnosť $(a_i)_{i=1}^k$. Nech a_{h_1} je prvý prvok tejto postupnosti, ktorý je hlavou draka a nech $a_{h_1}, a_{h_1+1}, \dots, a_{h_1+l_1-1}$ je nejaký drak. Potom tento drak má l_1 členov, a teda platí $(\sum_{j=0}^{l_1-1} a_{h_1+j})/l_1 > 1994$. Teraz uvažujme postupnosť $(a_i)_{i=h_1+l_1}^k$ a opäť v nej nájdime prvú hlavu aj s drakom atď. Takto dostaneme m disjunktných drakov $a_{h_n}, a_{h_n+1}, \dots, a_{h_n+l_n-1}$, $1 \leqq n \leqq m$, pričom každá hlava patrí niektorému z týchto drakov. Keďže $(\sum_{j=0}^{l_n-1} a_{h_n+j})/l_n > 1994$ pre každé n, $1 \leqq n \leqq m$, tak $\sum_{j=0}^{l_n-1} a_{h_n+j} > 1994 \cdot l_n$, a teda

$$\sum_{n=1}^{m} \sum_{j=0}^{l_n-1} a_{h_n+j} > 1994 \left(\sum_{n=1}^{m} l_n \right) .$$

Nech $b_1, \dots, b_p$ sú tie členy našich m drakov, ktoré nie sú hlavami žiadneho draka v postupnosti $(a_i)_{i=1}^k$. Iste $b_j \leqq 1994$ pre všetky j, $1 \leqq j \leqq p$. Potom však

$$\sum_{n=1}^{m} \sum_{j=0}^{l_n-1} a_{h_n+j} - \sum_{j=1}^{p} b_j > 1994 \left(\sum_{n=1}^{m} l_n - p \right) ,$$

a teda aritmetický priemer hláv drakov je väčší ako 1994.

b) *(Eugen Kováč)* Najprv ukážeme, že ak v postupnosti $(a_i)_{i=1}^k$ existuje drak obsahujúci a_k, tak aritmetický priemer hláv drakov obsahujúcich a_k je väčší ako 1994. Nech a_{h_1} je hlava draka, obsahujúceho a_k, ktorá je prvá v postupnosti $(a_i)_{i=1}^k$ a nech l_1 je najmenšie prirodzené číslo také, že $l_1 > h_1$, (na chvíľu predpokladajme, že také číslo existuje), a že $a_{l_1}, \dots, a_k$ nie je drak. Potom $(\sum_{j=0}^{k-h_1} a_{h_1+j})/(k - h_1 + 1) > 1994$, a naviac $(\sum_{j=0}^{k-l_1} a_{l_1+j})/(k - l_1 + 1) \leqq 1994$. Čiže $(\sum_{j=0}^{l_1-1} a_{h_1+j})/(l_1 - h_1) > 1994$ a teda $(a_i)_{i=h_1}^{l_1-1}$ je drak. Teraz nech a_{h_2} je hlava draka, obsahujúceho a_k, ktorá je prvá v postupnosti $(a_i)_{i=l_1}^k$ atď. Takto dostaneme m disjunktných drakov, v ktorých budú všetky hlavy drakov obsahujúcich a_k (a žiadna nehlava). Keďže ide o drakov, tak aritmetický priemer hláv drakov obsahujúcich a_k bude väčší ako 1994.

Teraz pristúpme k dôkazu tvrdenia. Dokážeme ho indukciou vzhľadom na dĺžku postupnosti.

Tvrdenie zrejme platí v jednoprvkovej postupnosti (a_1).

Majme $(k + 1)$-prvkovú postupnosť $(a_i)_{i=1}^{k+1}$. V tejto postupnosti sú nejaké draky neobsahujúce a_{k+1} a podľa indukčného predpokladu je aritmetický priemer ich hláv väčší ako 1994. Naviac aritmetický priemer hláv drakov obsahujúcich a_{k+1} je tiež väčší ako 1994, a teda aritmetický priemer hláv všetkých drakov v tejto postupnosti je väčší ako 1994.

2.3 *(Časť A Richard Hulín, časť B Martin Pál)*

(A) Upravujme danú nerovnosť:

$$
\begin{aligned}
\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2 &> 2\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)\\
2a_1^2a_2^2+2a_1^2a_3^2+2a_2^2a_3^2 &> \left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)\\
4a_2^2a_3^2 &> a_1^4+a_2^4+a_3^4-\left(2a_1^2a_2^2+2a_1^2a_3^2\right)+2a_2^2a_3^2\\
\left(2a_2a_3\right)^2 &> \left(a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)^2.
\end{aligned}
$$

Keďže je výraz $2a_2a_3$ kladný, môžeme nerovnosť odmocniť a platí:

$$
\begin{aligned}
(2a_2a_3) &> a_1^2-a_2^2-a_3^2\\
a_1^2 &> (a_2+a_3)^2.
\end{aligned}
$$

Teraz sú obe strany poslednej nerovnosti kladné, preto musí platiť $a_1 < a_2+a_3$. Podobne cyklickou zámenou dostávame aj ostatné trojuholníkové nerovnosti: $a_2 < a_1+a_3$ a $a_3 < a_1+a_2$.

(B) Dokážeme ekvivalentné tvrdenie:
Ak pre niektoré $i,j,k \leqq n$, $n \geqq 3$ platí $a_i \geqq a_j+a_k$, potom

$$
\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^2 > (n-1)\left(a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4\right).
$$

Najskôr však dokážeme toto pomocné tvrdenie (T): Pre ľubovoľné $b_1,\ldots,b_{m+1}$ platí,

$$
\begin{aligned}
\text{ak}\quad \left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_m^2\right)^2 &\leqq (m-1)\left(b_1^4+b_2^4+\ldots+b_m^4\right),\\
\text{potom}\quad \left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{m+1}^2\right)^2 &\leqq m\left(b_1^4+b_2^4+\ldots+b_{m+1}^4\right).
\end{aligned}
$$

Označme $x := \sum_{i=1}^{m} b_i^2$. Potom

$$
\begin{aligned}
0 &\leqq \frac{1}{m-1}\left(x-b_{m+1}^2(m-1)\right)^2\\
0 &\leqq \frac{1}{m-1}x^2-2b_{m+1}^2x+(m-1)b_{m+1}^4\\
x^2+2b_{m+1}^2x+b_{m+1}^4 &\leqq m\left(\frac{1}{m-1}x^2+b_{m+1}^4\right)
\end{aligned}
$$

Ak potom platí $\frac{1}{m-1}x^2 \leqq b_1^4+b_2^4+\ldots+b_m^4$, vyplýva z toho

$$
\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{m+1}^2\right)^2 \leqq m(b_1^4+b_2^4+\ldots+b_m^4),
$$

a tvrdenie (T) sme dokázali.

Nech teraz pre nejaké $i, j, k \leqq n$ platí $a_i \geqq a_j + a_k$. Položíme $b_1 = a_i$, $b_2 = a_j$, $b_3 = a_k$ a nech b_4 až b_n majú hodnoty ostatných a_l pre $l \neq i, j, k$. Podľa časti (A) musí platiť

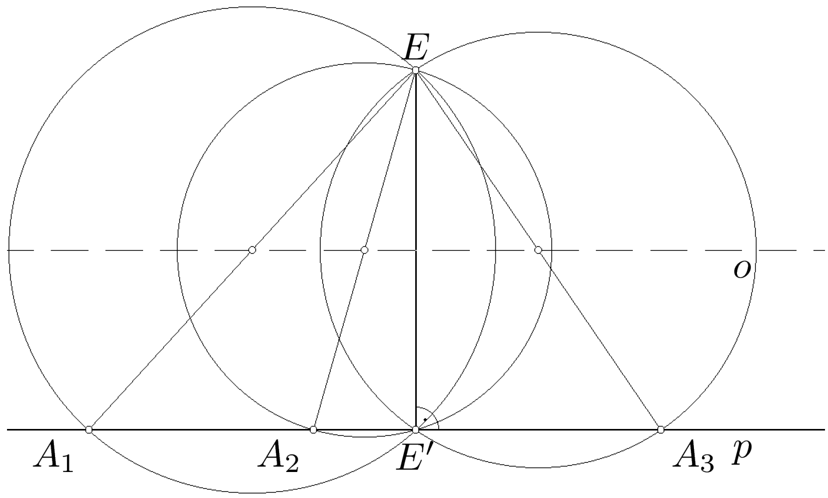
$$\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)^2 \leqq 2\left(b_1^4 + b_2^4 + b_3^4\right).$$

Dokážme teraz tvrdenie úlohy pre našu n-ticu čísel matematickou indukciou cez n. Prvý indukčný krok sme už dokázali, druhý indukčný krok je ale tvrdenie (T). Preto pre našu n-ticu platí:

$$\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)^2 \leqq (n-1)\left(b_1^4 + b_2^4 + \ldots + b_n^4\right),$$

a teda zrejme aj

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 \leqq (n-1)\left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4\right).$$



Obr. 32

2.4 *(Peter Macák a Martin Pál)*

a) Zo zadania vieme, že roviny kolmé na priamky A_iB_i, A_iC_i, A_iD_i, prechádzajúce bodmi B_i, C_i, D_i sa pretínajú v bode E. Preto budú uhly $A_iB_iE, A_iC_iE, A_iD_iE$ pravé, a teda body B_i, C_i, D_i ležia na kružniciach s priemerom A_iE. Čiže body B_i, C_i, D_i ležia na sfére s priemerom A_iE. Ak splynú body A_1, A_2, A_3, splynú aj sféry nad priemermi A_iE, teda aj gule opísané štvorstenom $A_iB_iC_iD_i$. Týmto sme dokázali tvrdenie úlohy.

b) Využime poznatok, že stred gule opísanej štvorstenu $A_iB_iC_iD_i$ je stredom úsečky A_iE. Nakoľko body A_1, A_2, A_3 ležia na jednej priamke (nazvime si túto priamku p), stačí pozorovať situáciu v rovine $\overline{A_1A_2A_3E}$. Potom stredy gúľ opísaných štvorstenom $A_iB_iC_iD_i$ tiež ležia v tejto rovine a dokonca na jednej priamke (nazvime si túto priamku o). Prienikom sfér opísaných štvorstenom $A_iB_iC_iD_i$ bude teda prienik kružníc nad priemermi A_iE otočený okolo priamky o (obr. 32).

Vo všeobecnosti môžu nastať takéto prípady : body A_i splývajú, bod E leží na priamke p a bod E neleží na priamke p. Prvý prípad bol rozdiskutovaný v časti a) a vtedy je prienikom sfér opäť sféra. V druhom prípade stredy gúľ opísaných štvorstenom $A_iB_iC_iD_i$ nesplývajú, ležia na priamke p, a preto kružnice nad priemermi A_iE (prechádzajúce bodom E) sa navzájom dotýkajú v bode E. Teda aj prienikom sfér opísaných štvorstenom bude iba bod E. Ak bod E neleží na priamke p, vezmime taký bod E' priamky p, že $EE' \perp p$. Potom sú uhly $A_iE'E$ pravé, teda bod E' leží na kružnici nad priemerom A_iE. Nakoľko body A_i nesplývajú, môžu byť body E, E' jedinými dvoma spoločnými bodmi kružníc nad priemermi A_iE. Preto prienikom sfér v tomto prípade bude kružnica nad priemerom EE' v rovine kolmej na priamku p.

2.5 *(Peter Macák)*

a) Rozlíšime niekoľko jednoduchých prípadov.
   – Po krátkom pozorovaní zistíme, že pre nepárne n platí $f(n) = 2$.
   – Pre párne n nedeliteľné tromi máme $f(n) = 3$ a potom $f^{(2)}(n) = 2$.
   – Ak je n deliteľné šiestimi, môžu nastať dva prípady:

   (i) $f(n)$ nie je deliteľné tromi, potom buď $f^{(2)}(n) = 2$, alebo $f^{(2)}(n) = 3$ a $f^{(3)}(n) = 2$.

   (ii) $f(n)$ je deliteľné tromi. Ukážeme, že $f(n) = 3$. Ak by sa totiž v prvočíselnom rozklade čísla $f(n)$ nachádzal faktor p^α, kde p je prvočíslo $p \neq 3$, má $f(n)$ tvar $p^\alpha q$, kde $3|q$, a teda $q > 1$. Potom musí platiť, že $f(n)$ nedelí n, ale zároveň $\dfrac{f(n)}{q}$ delí n, lebo $\dfrac{f(n)}{q} < f(n)$ a $f(n)$ je najmenšie číslo nedeliace n. Zároveň z rovnakých dôvodov $q|n$. Čísla q a p^α sú však nesúdeliteľné, a preto musí platiť $q \cdot p^\alpha | n$. To je ale spor s tým, že $f(n) = q \cdot p^\alpha$. Preto musí byť $f(n) = 3^a$, a potom $f^{(2)}(n) = 2$.

Týmto sme prešetrili všetky možnosti, ale pre žiadne n neplatí $k_n = 4$. Preto také n neexistuje.

b) Z postupu v prvej časti riešenia vyplýva, že jediné vhodné n, pre ktoré $k_n = 3$ sú čísla, ktoré sú deliteľné šiestimi, $f(n)$ nie je deliteľné tromi a $f^{(2)}(n) = 3$. Teraz dokážeme, že v tomto prípade musí byť $f(n)$ mocninou prvočísla, v našom prípade to bude mocnina dvoch. Ak by $f(n) = p^\alpha q^\beta r$, kde p, q sú rôzne prvočísla a $r, \alpha, \beta \geqq$ $\geqq 1$, rovnakým postupom ako v poslednom prípade v časti a) dostaneme spor. Preto musí byť $f(n)$ mocninou prvočísla. Keďže $f^{(2)}(n) = 3$, potom $f(n)$ musí byť párne, a preto $f(n) = 2^a$, pre nejaké $a \in \mathbb{N}$. Hľadané čísla sú preto všetky tie, ktoré nie sú deliteľné 2^a a sú deliteľné všetkými prirodzenými číslami menšími ako 2^a. Ak označíme $N(X)$ pre $X \in \mathbb{N}$ najmenší spoločný násobok čísel $1, 2, \ldots, X$, potom musí mať číslo n tvar $N(2^a) \cdot q$, kde q je nepárne prirodzené číslo. Tvar čísla $N(2^a)$ je nasledujúci: $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sú všetky prvočísla menšie ako 2^a a pre exponenty platí: $\alpha_i = [(a+1) \cdot \log_2 p_i]$, kde $[x]$ označuje celú časť čísla x.

2.6 *(Eugen Kováč)* Označme B^j, $j = 1, 2, \ldots, 2m$ množinu získanú z B jej otočením okolo stredu jednotkovej kružnice o $\dfrac{j\pi}{m}$ radiánov proti smeru hodinových ručičiek. Potom zrejme platí pre každé $j = 1, 2, \ldots, 2m$: $\ell(A^j \cap B) = \ell(A \cap B^j)$. Nech β_1, β_2 sú dva oblúky z množiny B. Pretože $\ell(\beta_1) = \ell(\beta_2) = \dfrac{\pi}{m}$, oblúky β_1^j a β_1^{j+1} (definícia je analogická ako pre B^j) ležia hneď vedľa seba (majú spoločný práve jeden (krajný) bod). Potom zrejme

$$\sum_{c=1}^{2m} \ell(\beta_1^i) = 2\pi$$

a oblúk β_1 obehne celú kružnicu. Preto

$$\beta_1^1 \cup \beta_1^2 \cup \ldots \cup \beta_{2m}^2 = K,$$

kde K označuje celú kružnicu. Pri tomto obiehaní oblúk β_1 práve raz pokryje množinu A (pretože $A = A \cap K = A \cap (\beta_1^1 \cup \beta_1^2 \cup \ldots \cup \beta_{2m}^2))$. Potom zrejme $\ell(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2m} \ell(A \cap \beta_1^i)$. Analogicky sa ukáže, že $\ell(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2m} \ell(A \cap \beta_2^i)$. Vzhľadom na to, že $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$, platí

$$2\ell(A) = \sum_{i=1}^{2m} \ell(A \cap B^i) = \sum_{i=1}^{2m} \ell(A^i \cap B).$$

Podľa Dirichletovho princípu teraz musí existovať také prirodzené číslo k, pre ktoré

$$\ell(A^k \cap B) \geqq \frac{2\ell(A)}{2m} = \frac{\ell(A)}{m} = \frac{\ell(A) \cdot \ell(B)}{2\pi}.$$

2.7 *(Ivan Cimrák)* Skúmajme funkciu $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$. Po dvoch zderivovaniach okamžite zistíme, že táto funkcia je na intervale $(0, 1)$ konvexná. (Možno to preveriť – trochu zložitejšie – aj bez pomoci diferenciálneho počtu.)

$$f''(x) = (1-x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x(1-x)^{-\frac{5}{2}} > 0.$$

Preto pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ n \geqq 2$ možno použiť Jensenovu nerovnosť:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \geqq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \geqq f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}$$

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}. \tag{1}$$

Ďalej pre čísla $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n} > 0$ platí nerovnosť medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom:

$$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{n} \leqq \sqrt{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}} \leqq \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \tag{2}$$

Z (1) a (2) dostávame:

$$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}} \leqq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \leqq \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}$$

$$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}} \leqq \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}. \tag{3}$$

Rovnosť v (3) môže nastať len vtedy, ak nastane v (2), čiže len vtedy, ak nastane rovnosť v A - K nerovnosti, a to je práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$. Pre takéto x_i však rovnosť skutočne nastáva.

Tretia séria

3.1 *(Ján Bábeľa)*

Lema 1. *Pre každé i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí:*

$$1 + x^n \geqq x^i + x^{n-i}. \tag{1}$$

Dôkaz. Možno postupovať viacerými spôsobmi (vyšetrovanie priebehu funkcie, nerovnosti). My použijeme jednoduchú úpravu:

$$1 + x^n - x^i - x^{n-i} = (1 - x^i)(1 - x^{n-i}).$$

Je jasné, že obidva výrazy majú pre kladné x rovnaké znamienko, a preto lema platí. Rovnako okamžite nahliadneme, že jediný prípad, keď nastáva rovnosť je ten, keď $x = 1$. (Tvrdenie evidentne platí pre párne n aj v tvare $1 + x^n \geqq 2x^{\frac{n}{2}}$.)

Funkcia $f(x)$ určite nenadobúda svoje maximum pre $x \in \mathbb{R}_0^-$, lebo vtedy nastáva jedna z nasledujúcich možností:

(i) $x < -1 \Rightarrow x + x^2 + \ldots + x^{2n-1} = x + (x^2 + x^3) + \ldots + (x^{2n-2} + x^{2n-1}) = x + (x + 1)(x^2 + \ldots + x^{2n-2}) < 0$, lebo $x < 0$ a zároveň $x + 1 < 0$, $x^2 + \ldots + x^{2n-2} > 0$;

(ii) $0 > x \geqq -1 \Rightarrow x + x^2 + \ldots + x^{2n-1} = (x + x^2) + \ldots + (x^{2n-3} + x^{2n-2}) + x^{2n-1} = (x + 1)(x + x^2 + \ldots + x^{2n-3}) + x^{2n-1} < 0$, lebo $x^{2n-1} < 0$ a zároveň $x + 1 \geqq 0, x^2 + \ldots + x^{2n-2} < 0$;

(iii) $x = 0 \Rightarrow x + \ldots + x^{2n-1} = 0$.

Preto s využitím vlastnosti $(1+x^n)^2 \geqq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ dostávame $f(x) \leqq 0$, avšak pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}^+$ je $f(x) > 0$. Teda ak funkcia $f(x)$ nadobúda maximum, je to určite pre kladné x.

Ďalej s využitím lemy 1 dostávame pre párne n:

$$
\begin{aligned}
&x + x^2 + \ldots + x^{2n-1} = (1+x^n)(x + \ldots + x^{n-1}) + x^n = \\
&\quad = (1+x^n)\left((x + x^{n-1}) + (x^2 + x^{n-2}) + \ldots (x^{\frac{n}{2}-1} + x^{\frac{n}{2}+1}) + x^{\frac{n}{2}}\right) + x^n \leqq \\
&\quad \leqq \text{(Lema 1)} \quad (1+x^n)\ [\underbrace{(1+x^n) + \ldots + (1+x^n)}_{(\frac{n}{2}-1)\text{-krát}} + x^{\frac{n}{2}}] + x^n \leqq \\
&\quad \leqq \text{(AG nerovnosť)} \quad \frac{n-1}{2}(1+x^n)^2 + x^n.
\end{aligned}
$$

Úplne obdobne pre nepárne n dostávame rovnaký výsledok. Čiže:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x + \ldots + x^{2n-1}}{(1+x^n)^2} \leqq \frac{\frac{n-1}{2}(1+x^n)^2 + x^n}{(1+x^n)^2} = \\
&= \frac{n-1}{2} + \frac{x^n}{(1+x^n)^2} = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{1+x^n} - \frac{1}{(1+x^n)^2} = \\
&= \frac{n-1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{1+x^n} - \frac{1}{(1+x^n)^2} = \\
&= \frac{2n-1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^n}\right)^2 \leqq \frac{2n-1}{4}.
\end{aligned}
$$

Rovnosť tu nastáva len pre $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+x^n} \Leftrightarrow x = 1$.

Čiže pre $x \in \mathbb{R}^+$ platí $f(x) \leqq \frac{2n-1}{4}$ a rovnosť nastáva len keď zároveň nastáva rovnosť v (1) a posledná rovnosť , čo platí pre $x = 1$. Preto sa maximum $f(x)$ nadobúda pre $x = 1$ a je rovné $\frac{2n-1}{4}$.

3.2 *(Martin Pál)* Najprv sporom dokážeme, že funkcia $g(x)$ je prostá. Nech existujú také $a \neq b$, pre ktoré platí $g(a) = g(b)$. Potom $g(g(a)) = g(g(b)), a = b$, teda funkcia $g(x)$ je skutočne prostá na množine A.

Rovnako ukážeme, že aj funkcia $f(x)$ je prostá. $f(a) = f(b), g(f(f(a))) = g(f(f(b)))$, $g(g(a)) = g(g(b)), a = b$, čiže $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, teda aj funkcia $f(x)$ je prostá. Pretože v našom prípade je obor hodnôt podmnožinou def. oboru, musí byť podobne ako g(x) bijekciou.

Ak je teraz číslo n párne, môžeme písať $n = \dfrac{m}{2}$ pre nejaké vhodné prirodzené číslo m. Potom možno čísla množiny A rozdeliť do disjunktných dvojíc: $g(a) = b, \quad g(b) = a$. Označme tieto množiny M_i, kde $i = 1, 2, \ldots, m$.

Ďalej vieme, že $f(g(a)) = f(f(f(a))) = g(f(a))$. Preto ak pre nejaký prvok x z množiny $M_i = \{x, y\}$ platí $f(x) \in M_j = \{a, b\}$, (napr. $f(x) = a$), potom aj pre druhý prvok v M_i platí $f(y) \in M_j$. Keďže je však $f(x)$ prostá, musí dokonca platiť $f(y) = b$. Funkcia $f(x)$ teda utvára dvojice množín M_i, pre ktoré platí: $f(x)$ zobrazí monžinu M_i na množinu M_j a zároveň M_j zobrazí na M_i. Zrejme musí byť $i \neq j$, inak by neplatila podmienka $f(x) \neq g(x)$. Preto ak je číslo m nepárne (teda $n = 4k + 2$ pre vhodné prirodzené k), je počet vyhovujúcich funkcií rovný nule.

Pre párne m zistíme počet funkcií. Nech $m = 2k$ pre vhodné k. Všetky prvky množiny A treba rozdeliť na disjunktné štvorice. Keďže je $g(x)$ pevne daná funkcia, máme už pevne daných m dvojíc prvkov. K M_1 musíme priradiť druhú dvojicu prvkov M_i, to možno urobiť $m - 1$ spôsobmi. Teraz vyberme ľubovoľnú ďalšiu dvojicu, k nej môžeme vybrať druhú práve $m - 3$ spôsobmi. Takto možno pokračovať, až kým nevyčerpáme všetky dvojice. To je spolu

$$(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1 = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad .$$

Ešte však treba uvážiť, že v každej štvorici možno prvky usporiadať dvoma spôsobmi: $f(x) = a, f(a) = y, f(y) = b, f(b) = x$, alebo $f(x) = b, f(b) = y, f(y) = a, f(a) = x$. Preto je celkový počet funkcií rovný:

$$2^k \cdot \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{4}\right)!} \quad .$$

3.3 *(Peter Macák)* Označme po rade S, S', S_1, S_2 a S_3 obsahy a o, o', o_1, o_2 a o_3 obvody trojuholníkov ABC, DEF, AEF, BDF a CDE. Polomery kružníc vpísaných trojuholníkom AEF, BDF a CDE sú podľa zadania zhodné, označme ich r_1. Keďže obsah trojuholníka je rovný polovici súčinu jeho obvodu a polomeru vpísanej kružnice a platí $2S = 2(S' + S_1 + S_2 + S_3)$, máme $or = o'r' + (o - o')r_1$, čiže

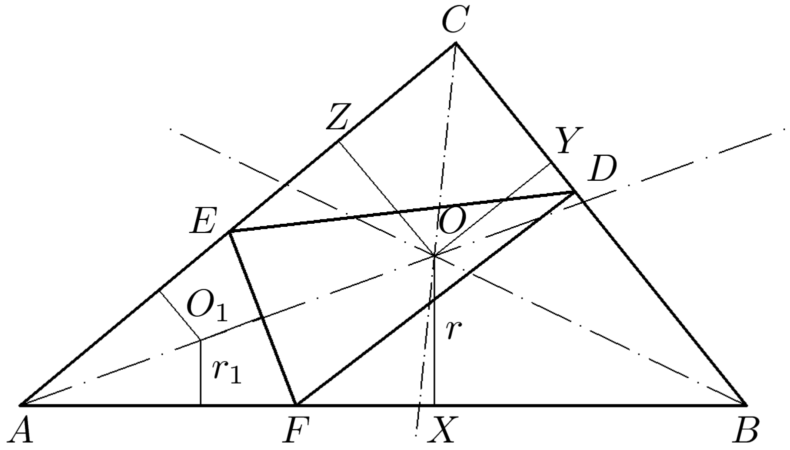
$$o'(r' + r_1) = o(r - r_1)\,. \tag{1}$$

Označme O a O_1 stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABC a AEF (obr. 33). V trojuholníku ABC označme X, Y a Z päty kolmíc spustených z O na AB, BC a CA a v trojuholníku AEF označme X_1, Y_1 a Z_1 päty kolmíc spustených z O_1 na AF, FE a EA. Podľa *vety Uss* sú trojuholníky AX_1O_1 a AZ_1O_1 zhodné, podobne aj dvojice trojuholníkov FX_1O_1, FY_1O_1 a EY_1O_1, EZ_1O_1. Teda $|AZ_1| = |AX_1|$, $|FX_1| = |FY_1|$ a $|EY_1| = |EZ_1|$, čiže $|AZ_1| + |AX_1| = o_1 - 2|EF|$.

Ďalej trojuholníky AX_1O_1 a AXO sú podobné (majú navzájom rovnobežné strany) s koeficientom $\frac{|O_1X_1|}{|OX|} = \frac{r_1}{r}$. S tým istým koeficientom sú podobné aj trojuholníky AZ_1O_1 a AZO. Preto $\frac{r_1}{r}(|AZ| + |AX|) = o_1 - 2|EF|$. Keď si uvedomíme, že podobné vzťahy platia aj pre trojuholníky BDF a CDE, ich sčítaním dostávame

$$\frac{r_1}{r} o = o_1 + o_2 + o_3 - 2o' = o + o' - 2o' = o - o',$$

a teda $o(r - r_1) = o'r$.



Obr. 33

Porovnaním posledného vzťahu s (1) dostávame $r = r' + r_1$, teda naozaj $r_1 = r - r'$.

3.4 Predpokladajme, že body sú už rozdelené do 30 skupín $S_1, S_2, \dots, S_{30}$, ($|S_1| = n_1$, $|S_2| = n_2, \dots, |S_{30}| = n_{30}$, $n_1 < n_2 < \dots < n_{30}$) tak, že hľadaný počet trojuholníkov je maximálny.

LEMA 1. *Pre všetky $i = 1, 2, \dots, 29$ platí: $n_{i+1} - n_i \leqq 2$.*

DÔKAZ. Predpokladajme, že to nie je pravda. Nech i je také, že $n_{i+1} - n_i > 2$. Presuňme jeden prvok z S_{i+1} do S_i a vytvorme tak S'_{i+1} a S'_i. Ukážeme, že sme zvýšili počet trojuholníkov s vrcholmi v rôznych skupinách. Označme M množinu $S_i \cup S_{i+1} = S'_i \cup S'_{i+1}$. Zrejme sa počet trojuholníkov, ktoré nemajú žiaden vrchol v M, nezmenil. Podobne sa z toho istého dôvodu nezmenil počet trojuholníkov s práve jedným vrcholom v M. Všimnime si teraz tie trojuholníky, ktoré majú dva vrcholy v M. V pôvodnom rozložení ich bolo $n_i n_{i+1}(1994 - n_i - n_{i+1})$. V novom (čiarkovanom) rozložení ich je $(n_i + 1)(n_{i+1} - 1)(1994 - n_i - n_{i+1})$. Keďže však platí

$$(n_i + 1)(n_{i+1} - 1) = n_i n_{i+1} + n_{i+1} - n_i - 1 > n_i n_{i+1},$$

vidíme, že v novom rozložení je skutočne viac trojuholníkov s vrcholmi v rôznych skupinách, ktoré majú práve dva vrcholy v množine M. V tejto množine však nemôže mať žiadny vyhovujúci trojuholník všetky tri vrcholy (sú to len dve množiny S_i a S_{i+1}), inak by sa aj celkový počet hľadaných trojuholníkov zvýšil, a to je spor s predpokladom, že pôvodný výber množín zaručoval ich maximálny počet.

LEMA 2. *Existuje nanajvýš jedno také i, pre ktoré $n_{i+1} = n_i + 2$.*

DÔKAZ. Ak by existovali $i < j$ tak, že $n_{i+1} = n_i + 2$, $n_{j+1} = n_j + 2$, tak by sme presunutím jedného prvku z S_{j+1} do S_i podobne ako v leme 1 zväčšili počet trojuholníkov s vrcholmi v rôznych skupinách, čo je opäť spor.

Ak by pre všetky i platilo $n_{i+1} = n_i + 1$, tak $n_1 < n_2 < \dots < n_{30}$ by tvorili aritmetickú postupnosť s diferenciou 1 a platilo by

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{30} = 30n_1 + 435. \tag{1}$$

Ak by rozdiel $n_{i+1} - n_i$ bol 2, potom

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{30} = 30n_1 + 435 + (30 - i) = 30(n_1 + 1) + 435 - i. \tag{2}$$

Keďže však $1994 - 435 = 1559 = 30 \cdot 52 - 1$, vidíme, že nastáva prípad (2), a že $i = 1$, $n_1 = 51$.

Preto $(n_1, n_2, \ldots, n_{30}) = (51, 53, 54, 55, \ldots, 79, 80, 81)$.

3.5 *(Peter Macák)* Musí platiť:

$$f(x^m y^n) \leqq f(x)^{\frac{1}{4m}} f(y)^{\frac{1}{4n}}, \qquad \text{pre } x, y > 1. \tag{1}$$

Zaveďme funkciu $g(x) = \log_a(f(x))$, $a > 1$. Pretože $f(x) \in (1, \infty)$, platí $g(x) \in (0, \infty)$. Zlogaritmovaním vzťahu (1) sa nám nezmení znamienko a platí:

$$\begin{aligned} \log_a(f(x^m y^n)) &\leqq \frac{1}{4m} \log_a(f(x)) + \frac{1}{4n} \log_a(f(y)) \\ g(x^m y^n) &\leqq \frac{1}{4m} g(x) + \frac{1}{4n} g(y) \end{aligned} \tag{2}$$

Keďže definičný obor funkcie $g(x)$ je interval $(1, \infty)$, existuje funkcia $h(x)$ s definičným oborom $(0, \infty)$, ktorá je daná predpisom $g(x) = h(\log_b x)$, kde b je reálne číslo väčšie ako 1. Vzťah (2) možno potom napísať v tvare:

$$h(m \log_b x + n \log_b y) \leqq \frac{1}{4m} h(\log_b x) + \frac{1}{4n} h(\log_b y).$$

Po substitúcii $u = \log_b x$, $v = \log_b y$ dostávame

$$h(mu + nv) \leqq \frac{1}{4m} h(u) + \frac{1}{4n} h(v). \tag{3}$$

Týmto sa celá úloha pretransformovala na úlohu nájsť všetky funkcie $h(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ($\log_b x$ je pre $b > 1$, $x > 1$ kladné číslo), pre ktoré platí vzťah (3) pre ľubovoľné prirodzené m, n. Ukážeme, že funkcie $h(x) = \dfrac{H(x)}{x}$, kde $H(x)$ je ľubovoľná nerastúca funkcia, vyhovujú.

Pre prirodzené m, n a kladné u, v platí: $mu + nv > v, \quad mu + nv > u$. Pretože $H(x)$ je nerastúca funkcia, tak

$$H(mu + nv) \leqq H(v) \tag{4}$$
$$H(mu + nv) \leqq H(u). \tag{5}$$

Pre ľubovoľné kladné m, n, u, v možno po úpravách odvodiť:

$$\begin{aligned} (mu - nv)^2 &\geqq 0 \\ m^2u^2 + 2mnuv + n^2v^2 &\geqq 4mnuv \\ (mu + nv)^2 \frac{1}{4mnuv(mu + nv)} &\geqq 4mnuv \frac{1}{4mnuv(mu + nv)} \\ \frac{1}{4mu} + \frac{1}{4nv} &\geqq \frac{1}{mu + nv}. \end{aligned} \tag{6}$$

Použitím (4,5,6) dostávame:

$$\frac{H(mu + nv)}{mu + nv} \leqq \frac{H(mu + nv)}{4mu} + \frac{H(mu + nv)}{4nv} \leqq \frac{H(u)}{4mu} + \frac{H(v)}{4nv}. \tag{7}$$

Teda skutočne

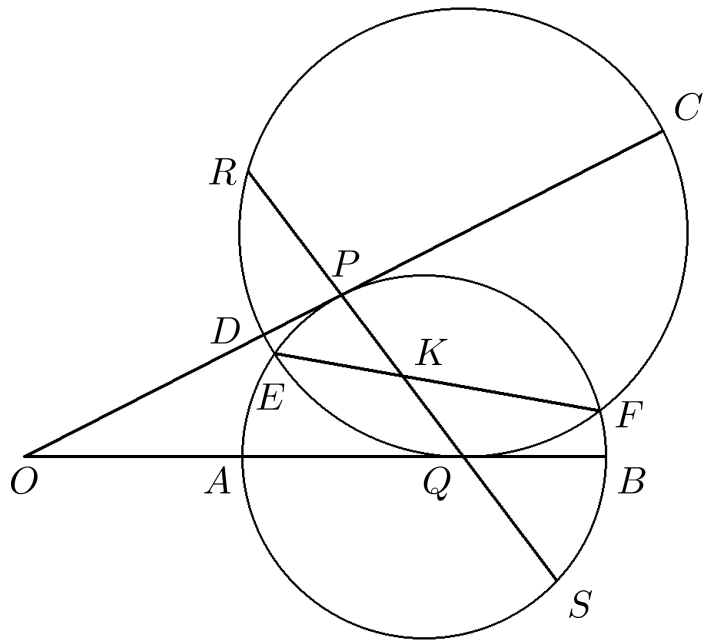
$$h(mu + nv) \leqq \frac{1}{4m} h(u) + \frac{1}{4n} h(v),$$

čo je rovnosť (3). Týmto sme dokázali, že ľubovoľná funkcia $h(x) = H(x)/x$, kde $H(x)$ je ľubovoľná kladná nerastúca funkcia vyhovuje (3). Pretože však nerovnosť (3) je ekvivalentná s nerovnosťou (1), je zároveň každá funkcia

$$f(x) = a^{H(\log_b x)/\log_b x},$$

kde $a, b > 1$, $H(x)$ je kladná nerastúca funkcia, riešením danej úlohy. Týmto však nemáme zaručené, že sme našli skutočne všetky funkcie vyhovujúce danej podmienke. Tento problém však výrazne presahuje hranice stredoškolskej matematiky, a preto jeho riešenie neuvádzame. (Úlohu úplne nevyriešil žiaden riešiteľ.)

3.6 Nech PQ pretína spoločnú tetivu EF v bode K, kružnicu opísanú QCD opäť v bode R a kružnicu opísanú PAB opäť v bode S (obr. 34).



Obr. 34

Môžeme predpokladať, že priamky AB a CD sa pretínajú v nejakom bode O. Označme $|OA| = a, |OB| = b, |OC| = c, |OD| = d, |OP| = p$ a $|OQ| = q$. Z vety o mocnosti bodu ku kružnici vyplýva, že $|KP| \cdot |KS| = |KE| \cdot |KF| = |KQ| \cdot |KR|$. Preto $\frac{|PR|}{|KP|} = \frac{|KR|}{|KP|} - 1 = \frac{|KS|}{|KQ|} - 1 = \frac{|QS|}{|KQ|}$. Z toho vyplýva, že $|KP| = |KQ|$ práve vtedy, keď $|PR| = |QS|$, čo možno zapísať aj ako $|CP| \cdot |DP| = |PR| \cdot |PQ| = |QS| \cdot |PQ| = |AQ| \cdot |BQ|$. Využijúc toho, že $p^2 = ab$ a $q^2 = cd$, môžeme upraviť výraz $(c-p)(p-d) = (q-a)(b-q)$ na $(ac - bd)(bc - ad) = 0$. Nakoľko sa priamky AB a CD pretínajú mimo štvoruholníka $ABCD$, platí $b > a$ a $c > d$, alebo obe nerovnosti platia opačne. Preto $bc - ad \neq 0$, a teda musí platiť $ac - bd = 0$, čiže $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$. Čo je ekvivalentné tomu, že BC je rovnobežné s AD.

3.7 *(Miroslav Dudík)* Ak chceme, aby bola D-reťaz daného čísla čo najdlhšia, musí byť podiel čísel x_{i+1}, x_i, pre $0 \leqq i \leqq d-1$ prvočíslo. (Ak by to bolo číslo zložené, ktoré sa dá zapísať ako súčin dvoch čísel väčších ako 1, mohli by sme túto reťaz predĺžiť aspoň o jeden člen, čo je spor s predpokladom jej maximality.) Maximálnou dĺžkou D-reťaze bude teda maximálny počet prvočísel, ktorými môžeme dané číslo deliť a dostaneme ešte celé číslo. V našom prípade dostávame:

$$20^k \cdot 12^m \cdot 1994^n = 2^{2k} \cdot 5^k \cdot 2^{2m} \cdot 3^m \cdot 2^n \cdot 997^n = 2^{2k+2m+n} \cdot 3^m \cdot 5^k \cdot 997^n.$$

Maximálna dĺžka D-reťaze teda je $2k + 2m + n + m + k + n = 3k + 3m + 2n$. Počet týchto D-reťazí určíme ako počet rôznych postupností podielov $\frac{x_{i+1}}{x_i}$. Počet týchto postupností však už určíme jednoducho, je to počet permutácií $2k+2m+n$ dvojok, m trojok, k pätiek a m 997-ičiek. To však je :

$$p = \frac{(3k + 3m + 2n)!}{(2k + 2m + n)!k!m!n!} \quad .$$

Štvrtá séria

4.1 *(Tamás Varga a Martin Domány)* Jednoduchým výpočtom overíme, že $f^{(k)}(z) - z^{m^k}$. Nech p je perióda čísla z. Potom pre každé prirodzené číslo n platí, že $f^{(n \cdot p)}(z) = z$. Naozaj:

$$f^{(n \cdot p)}(z) = z^{m^{n \cdot p}} = z^{m^{\overbrace{p + p + \ldots + p}^{n\text{-krát}}}} = z^{\overbrace{m^p m^p \ldots m^p}^{n\text{-krát}}}.$$

Obrátene, nech k je také číslo, že $f^{(k)}(z) = z$. Potom určite $k \geqq p$, a teda existujú prirodzené čísla $n, s; s < p$, také, že $k = np+s$. Potom ale $f^{(k)}(z) = z^{m^{n \cdot p + s}} = \left(z^{m^{n \cdot p}}\right)^{m^s} = z^{m^s} = z$. Pretože $s < p$, musí platiť, že $s = 0$. Dokázali sme, že $f^{(k)}(z) = z$ práve vtedy, keď $k = n \cdot p$ pre nejaké prirodzené n.

Ak má číslo z periódu 1995 musí preň platiť:

$$z^{m^{1995}} = z, \qquad \text{t.j.} \qquad z^{m^{1995}-1} = 1.$$

Táto rovnica má v obore komplexných čísel $m^{1995}-1$ riešení tvaru:

$$z_k = \sin\frac{2\pi k}{m^{1995}-1} + i\cos\frac{2\pi k}{m^{1995}-1}, \qquad k = 1, 2, \dots, m^{1995}-1.$$

Medzi nimi sú však také čísla, ktorých perióda je menšia ako 1995, v každom prípade však musí deliť číslo 1995. Toto číslo delia prvočísla $3, 5, 7, 19$ a samozrejme jednotka. Počet komplexných čísel s periódou jedna je $P(1) = m-1$, s periódou 3 je $P(3) = m^3 - - 1 - P(1) = m^3 - m$, s periódou 5 je $P(5) = m^5 - 1 - P(1) = m^5 - m$, atď., s periódou 15 je $P(15) = m^{15} - 1 - P(5) - P(3) - P(1) = m^{15} = m^5 - m^3 + m$, atď.

Takýmto postupom by sme sa dostali k číslu

$$\begin{aligned} P(1995) = m^{1995} - m^{665} - m^{399} - m^{285} - m^{105} + m^{133} + \\ + m^{95} + m^{57} + m^{35} + m^{21} + m^{15} - m^{19} - m^7 - m^5 - m^3 + m, \end{aligned}$$

počtu komplexných čísel s periódou 1995.

4.2 *(Michal Bajcsy a Daniel Pártoš)* Najprv nájdime geometrické miesto bodov P_A takých, že obsahy trojuholníkov DAP_A a ABP_A sú rovnaké. Označme $\alpha_1 = \sphericalangle DAP_A$ a $\alpha_2 = \sphericalangle BAP_A$. Potom pre obsahy platí $|P_AA|\cdot|AD|\cdot|\sin\alpha_1| = |P_AA|\cdot|AB|\cdot|\sin\alpha_2|$, čiže $|AD|\cdot|\sin\alpha_1| = |AB|\cdot|\sin\alpha_2|$. Keďže $|AD|$, $|AB|$ a uhol DAB sú pevné veličiny, hľadaným geometrickým miestom je dvojica priamok, ktoré prechádzajú bodom A. Stred úsečky DB vyhovuje podmienkam kladeným na P_A, preto jedna z týchto priamok prechádza stredom DB, nazvime ju t_A. Druhá priamka je rovnobežná s BD, nazvime ju r_A.

Ak má bod P spĺňať podmienky úlohy, musí ležať buď na t_X, alebo na r_X pre každé $X \in \{A, B, C, D\}$. Rozoberieme jednotlivé prípady:

1) Bod P leží na t_A, t_B, t_C, t_D. Predpokladajme, že $t_A \neq t_C$. Potom $t_A \cap t_C = S_{BD}$, kde S_{BD} je stred úsečky BD. Teda $P = S_{BD}$ a $t_B = t_D$. Z toho vyplýva, že aspoň jedna z uhlopriečok delí štvoruholník na dve obsahom rovnaké časti.

2) P leží na t_A, t_B, t_C, r_D. Ak $t_A = t_C$, tak $t_A || r_D$, kde $t_A \neq r_D$, spor. Ak $t_A \neq t_C$, tak $P = S_{BD} \notin r_D$, spor. Tento prípad teda nemôže nastať.

Keďže $r_A || r_C$ a $r_B || r_D$, zostáva posledný prípad:

3) P leží na t_A, t_B, r_C, r_D. Označme $S = AC \cap BD$ a S' bod na úsečke PC vzdialený $\frac{|BD|}{2}$ od P (taký bod existuje, keďže $DB || r_C$ a $AC || r_D$). Trojuholníky ACP a $SS'P$ sú rovnoľahlé, a teda podobné. Preto $\dfrac{|AC|}{|CP|} = \dfrac{|SS'|}{|S'P|}$, čiže $\dfrac{|AS| + |SC|}{|DS|} = \dfrac{|CS|}{\frac{1}{2}(|BS| + |SD|)}$. Po prenásobení $|AS|\cdot|BS| + |CS|\cdot|BS| + |BS|\cdot|CS| = |CS|\cdot|DS|$. Ak $\alpha = \sphericalangle ASD$, tak $|AS|\cdot|BS|\cdot|\sin\alpha| + |CS|\cdot|BS|\cdot|\sin\alpha| + |BS|\cdot|CS|\cdot|\sin\alpha| = |CS|\cdot|DS|\cdot|\sin\alpha|$. Čiže uhlopriečky rozdelia daný štvoruholník na štyri trojuholníky, z ktorých jeden je obsahom taký veľký ako ostatné tri spolu. Z bodov 1 a 3 je zrejmé, že pre každý štvoruholník existuje nanajvýš jeden hľadaný bod P.

4.3 *(Eugen Kováč)* Označme si sýkorky číslicami $1, 2, \ldots, 9, 0$. Zápis $\mathcal{K}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bude znamenať, že sýkorky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sedia na jednej kružnici.

Lema 1. *Existuje 5 sýkoriek sediacich na jednej kružnici.*

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že žiadnych 5 sýkoriek nesedí na jednej kružnici. Bez ujmy na všeobecnosti $\mathcal{K}(1, 2, 3, 4)$ a $\mathcal{K}(5, 6, 7, 8)$. Z pätice $1, 2, 3, 9, 0$ štyri sýkorky sedia na kružnici. Ak $\mathcal{K}(1, 2, 3, 9)$, tak aj $\mathcal{K}(1, 2, 3, 4, 9)$, spor. Obdobne sa dokáže, že nemôže byť $\mathcal{K}(1, 2, 3, 0)$. Takže môžme predpokladať $\mathcal{K}(1, 2, 9, 0)$.

Uvažujme teraz päticu $2, 3, 4, 9, 0$. Nutne $\mathcal{K}(3, 4, 9, 0)$ (ľubovoľná iná štvorica by si už vynútila aj piatu sýkorku na jednej kružnici). Podobne z $5, 6, 7, 9, 0$ máme $\mathcal{K}(5, 6, 9, 0)$, a z $6, 7, 8, 9, 0$ tiež $\mathcal{K}(7, 8, 9, 0)$. Pätica $1, 3, 5, 9, 0$ si vynucuje $\mathcal{K}(1, 3, 5, 9)$ alebo $\mathcal{K}(1, 3, 5, 0)$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $\mathcal{K}(1, 3, 5, 9)$. Pätica $1, 3, 7, 9, 0$ si vynucuje $\mathcal{K}(1, 3, 7, 0)$, a napokon pätica $3, 5, 7, 9, 0$ nedáva žiadnu možnosť štvorice, ktorá by si už nevynucovala päť sýkoriek na jednej kružnici.

Lema 2. *Aspoň 9 sýkoriek sedí na jednej kružnici.*

Dôkaz. Nech $1, 2, 3, 4, 5$ sedia na jednej kružnici (môžme to predpokladať na základe lemy 1). Stačí ukázať, že aspoň jedna zo sýkoriek $6, 7$ sedí na tej istej kružnici. Predpokladajme, že nie.

Uvažujme päticu $1, 2, 3, 6, 7$. Potom buď $\mathcal{K}(1, 2, 6, 7)$, $\mathcal{K}(1, 3, 6, 7)$ alebo $\mathcal{K}(2, 3, 6, 7)$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $\mathcal{K}(1, 2, 6, 7)$. Teraz uvažujme päticu $3, 4, 5, 6, 7$. Opäť bez ujmy na všeobecnosti $\mathcal{K}(3, 4, 6, 7)$. Ešte uvažujme päticu $1, 3, 5, 6, 7$. Ak $\mathcal{K}(1, 3, 6, 7)$, tak $\mathcal{K}(1, 2, 3, 6, 7)$, a tiež $\mathcal{K}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, spor. Podobne nemôže byť ani $\mathcal{K}(1, 5, 6, 7)$, ani $\mathcal{K}(3, 5, 6, 7)$. Potom ale buď $\mathcal{K}(1, 3, 5, 6)$ alebo $\mathcal{K}(1, 3, 5, 7)$, čiže buď sýkorka 6, alebo 7 sedí na kružnici spolu s $1, 2, 3, 4, 5$.

Keďže zrejme môže byť 9 sýkoriek na jednej kružnici a desiata vedľa, odpoveď je 9.

4.4 *(Peter Macák a Martin Pál)* Predpokladajme, že O, P, Q sú tri rôzne body. Označme S_1, S_2 stredy kružníc opísaných $\triangle ABP, \triangle CDP$ (obr. 35).

Vyjadrime si teraz veľkosť pravouhlého priemetu úsečky S_1P

na priamku $\overleftrightarrow{BD}$: $d_1 = \frac{|BP|}{2}$, pretože S_1 leží na osi BP;

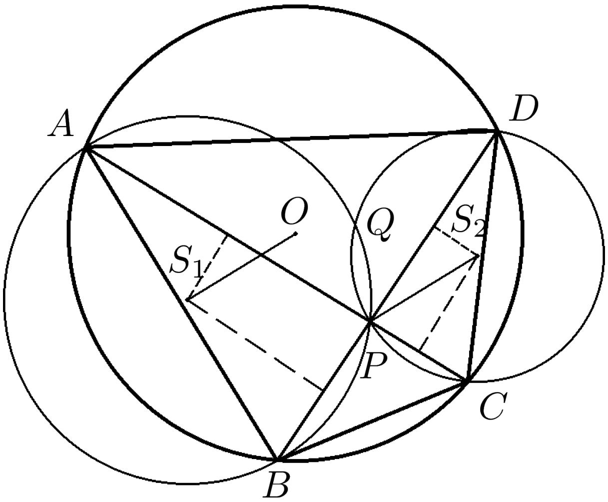
na priamku $\overleftrightarrow{AC}$: $d_2 = \frac{|AP|}{2}$, pretože S_1 leží na osi AP.

Rovnakou úvahou určíme dĺžky priemetov úsečky OS_2 na priamku $\overleftrightarrow{BD}$:

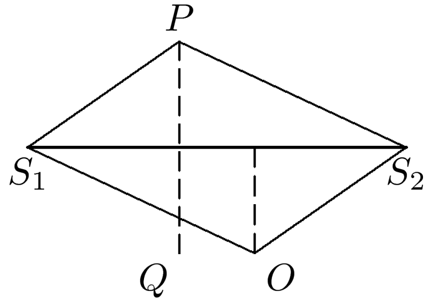
$d_3 = \frac{|BD|}{2} - \frac{|DP|}{2}$, pretože O leží na osi BD, S_2 leží na osi PD a hľadaná vzdialenosť je vzdialenosť päty kolmice z bodu O do bodu D bez vzdialenosti päty kolmice z S_2 od bodu D. Po jednoduchej úprave: $d_3 = \frac{|BD|-|DP|}{2} = \frac{|BP|}{2}$.

Obdobne pre dĺžku priemetu OS_2 na priamku $\overleftrightarrow{AC}$: $d_4 = \frac{|AC|-|CP|}{2} = \frac{|AP|}{2}$.

Zistili sme teda, že $d_1 = d_3$ a $d_2 = d_4$. Z toho ale vyplýva , že $|S_1P| = |OS_2|$ (obr. 36). $\overleftrightarrow{BD}$ a $\overleftrightarrow{AC}$ sú totiž rôznobežné priamky a v danej rovine môžeme zaviesť súradnicovú sústavu, v ktorej sú práve tieto dve priamky súradnicovými osami. Potom sú dĺžky d_1, d_2 , resp. d_3, d_4 súradnicami vektorov $\overrightarrow{S_1P}$ a $\overrightarrow{OS_2}$; keďže majú obe súradnice rovnaké, musia mať rovnakú dĺžku a zároveň musia byť rovnobežné.



Obr. 35



Obr. 36

Úplne analogicky sa dokáže, že $|S_2P| = |OS_1|$. Preto sú trojuholníky S_1S_2P a S_2S_1O zhodné. Z toho vyplýva, že vzdialenosť bodu O od priamky $\overleftrightarrow{S_1S_2}$ je rovnaká ako vzdialenosť bodu P od tejto priamky. Pretože bod Q je osovo súmerný s bodom P podľa osi S_1S_2, tak aj jeho vzdialenosť od $\overleftrightarrow{S_1S_2}$ je rovnaká ako vzdialenosť P od tejto priamky. Z toho už ale vyplýva, že $OQ \parallel S_1S_2$. Pretože body P, Q sú osovo súmerné podľa $\overleftrightarrow{S_1S_2}$ (vyplýva to napríklad z toho, že $\triangle S_1S_2Q \cong \triangle S_1S_2P$ podľa vety *sss*), tak $PQ \perp S_1S_2$.

Teda $OQ \parallel S_1S_2$ a $S_1S_2 \perp PQ \Longrightarrow OQ \perp PQ$.

4.5 *(Ján Bábeľa)* Máme sústavu rovníc :

$$\begin{aligned} x^2(Ax^2+By^2)+y^2(Ay^2+Bz^2)+z^2(Az^2+Bx^2) &= \frac{(2A+B)}{4}(13a)^4, \\ x^2+y^2+z^2 &= (13a)^2. \end{aligned}$$

Dosaďme za $(13a)^2$ z druhej rovnice do prvej. Po jednoduchých úpravách dostaneme ekvivalentnú sústavu rovníc :

$$\begin{aligned} (2A-B)(x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2) &= 0, \\ x^2+y^2+z^2 &= (13a)^2. \end{aligned}$$

Ak $B = 2A$, potom je prvá rovnosť splnená a druhá má riešenie v obore prirodzených čísel : $x = 12a, y = 4a, z = 3a$.

Ak $B \neq 2A$, môžme prvú rovnicu vydeliť týmto členom. Bez ujmy na všeobecnosti potom môžeme predpokladať, že platí $x \geqq y \geqq z$. Teda postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2) &= 0,\\ (x^2 + y^2 - z^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - z^2 - 2xy) &= 0,\\ (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) &= 0.\end{aligned}$$

Ľahko však nahliadneme, že pre prirodzené čísla x, y, z (ak $x \geqq y \geqq z$) musí platiť :

$$(x + y + z) > 0, \qquad (x + y - z) > 0, \qquad (x - y + z) > 0.$$

Teda jediná možnosť, ktorá nám zostala je : $x = y + z$. Dosaďme túto rovnosť do druhej rovnice systému. Dostávame : $2(y^2 + yz + z^2) = 13a^2$.

Nech $y = y_1D$ a $z = z_1D$, kde D je najväčší spoločný deliteľ y a z a y_1, z_1 sú vhodné prirodzené čísla. Potom zjavne D delí aj parameter a a možno zaviesť označenie $a = a_1D$, pre vhodné prirodzené a_1. Môžeme teda našu rovnosť upraviť na tvar : $2(y_1^2 + y_1z_1 + z_1^2) = 13a_1^2$. Potom ľavá strana rovnice môže nadobúdať iba zvyšok 2 po delení štyrmi, ale pravá iba zvyšky 0 a 1 po delení tým istým číslom. Teda rovnica nemá riešenie v obore prirodzených čísel. To znamená, že v prípade $B \neq 2A$ nemá daná sústava rovníc riešenie. $B = 2A$ je teda nutnou aj postačujúcou podmienkou existencie riešenia systému rovníc v obore prirodzených čísel.

4.6 Najprv rozoberieme prípad $n = 3k$, kde k je nejaké prirodzené číslo. Označme n-uholník $A_1A_2\ldots A_{3k}$, uhlopriečky zvoľme:

$$\begin{array}{llll} A_1A_3 & , A_1A_5 & , A_3A_5, & (1)\\ A_1A_6 & , A_1A_8 & , A_6A_8, & (2)\\ \vdots & , \vdots & , \vdots & \\ A_1A_{3m} & , A_1A_{3m+2}, & A_{3m}A_{3m+2}, & (\mathrm{m})\\ \vdots & , \vdots & , \vdots & \\ A_1A_{3k-3}, & A_1A_{3k-1}\ , & A_{3k-3}A_{3k-1}, & (\mathrm{k\text{-}1}) \end{array}$$

Uhlopriečky v (1), (2), ..., (k-1) tvoria trojuholníky s jedným vrcholom A_1. Náš ťah môže vyzerať takto: začíname v A_1, postupne prejdeme všetky trojuholníky z (1)–(m), a nakoniec prejdeme strany n-uholníka.

Teraz rozoberme prípad, keď n nie je deliteľné tromi. Dokážeme, že pre žiadne n nedeliteľné tromi nemožno uhlopriečky daným spôsobom vybrať. Dôkaz prevedieme úplnou matematickou indukciou podľa n.

Prvý krok Pre $n = 4$ je tvrdenie triviálne.

Druhý krok Nech tvrdenie platí pre všetky $k < n$. Môžeme predpokladať $n \geqq 5$. Označme opäť n-uholník $A_1A_2\dots A_n$. Predpokladajme, že je rozdelený $n-3$ uhlopriečkami tak, že požadovaný ťah sa dá nakresliť. Potom:

($*$) Z každého vrcholu musí vychádzať párny počet uhlopriečok.

Navyše, keďže n-uholník je rozdelený na trojuholníky, musí existovať také prirodzené číslo i, že A_iA_{i+2} je medzi uhlopriečkami. Bez ujmy na všeobecnosti, nech je to A_1A_3. Podľa ($*$) ešte aspoň jedna uhlopriečka A_1A_s vychádza z A_1, kde s je vhodné prirodzené číslo. Napríklad zvoľme s tak, aby bolo najmenšie možné. Zrejme $s > 4$ a $s \neq 0$ (inak by ($*$) nemohlo byť splnené pre A_3 alebo A_1). Potom A_1A_3 a A_1A_s sú dvoma stranami jedného z trojuholníkov, na ktoré je n-uholník rozdelený. Samozrejme, treťou stranou je A_3A_s. Keďže $s > 4$, aj táto strana je uhlopriečkou n-uholníka. Zvyšných $n-6$ uhlopriečok rozdeľuje mnohouholníky $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5\dots A_s$, $A_sA_{s+1}\dots A_1$ na trojuholníky. (Opäť samozrejme z každého vrcholu vychádza párny počet uhlopriečok !) Podľa indukčného predpokladu má každý z týchto mnohouholníkov počet vrcholov deliteľný tromi. Lenže tieto počty sú 3, $s-2$ a $n-(s-2)$ a ich súčet je $n+3$, čo nie je deliteľné tromi. Preto nie je deliteľné tromi aj jedno z čísel $s-2$, $n-(s-2)$, a teda tvrdenie pre jeden z týchto mnohouholníkov neplatí. To je však spor.

4.7 *(Eugen Kováč)*

Nech $A \in E(X)$ je taká množina, pre ktorú je $f(A)$ maximálne. Ak existuje viac takých A, vyberme tú, pre ktorú $|A|$ (počet prvkov množiny A) je minimálny (ak je takých stále viac, vyberme ľubovoľnú z nich). Potom $P = A$, $Q = X - A$ je požadovaným rozdelením.

Ak totiž $T \in E(X-A)$, potom $A \cap T = \emptyset$ a teda $f(A) \geqq f(A \cup T) = f(A) + f(T) - 1995$, z čoho dostávame $f(T) \leqq 1995$.

Ak $S \in E(A), S \neq \emptyset$, tak aj $S' = A - S \in E(A)$ (A aj S majú párny počet prvkov). Zrejme $S' \neq A$, $S' \subset A$, čiže $|S'| < |A|$, a teda vzhľadom na voľbu A musí platiť :$f(S') <$ $< f(A)$. Zároveň $S \cup S' = A$, a tiež $S \cap S' = \emptyset$. Z toho už vyplýva, že

$$f(A) = f(S \cup S') = f(S) + f(S') - 1995 < f(S) + f(A) - 1995,$$

a teda $f(S) > 1995$.

Piata séria

5.1 *(Eugen Kováč)* Dokazujme dané tvrdenie matematickou indukciou:

Prvý krok Nech $n = 2$, $x_1 \leqq x_2$. Potom $0 \leqq (x_2 - x_1)^3$. Z toho:

$$(x_2 - x_1)^2(1 + x_1) \leqq (x_2 - x_1)^2(1 + x_2),$$

$$\frac{(x_2 - x_1)^2}{(1 + x_1)(1 + x_2)} \leqq \frac{(x_2 - x_1)^2}{(1 + x_1)^2}.$$

Odtiaľ:

$$\frac{x_1 - x_2}{1 + x_2} + \frac{x_2 - x_1}{1 + x_1} \leqq \frac{(x_2 - x_1)^2}{(1 + x_1)^2}$$

$$\frac{1+x_1}{1+x_2}+\frac{1+x_2}{1+x_1}\leqq 2+\frac{\left(x_1-x_1\right)^2}{\left(1+x_1\right)^2}+\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{\left(1+x_1\right)^2}$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1=x_2$, čím sme dokázali prvý indukčný krok.

Druhý krok Nech nerovnosť platí pre všetky n-tice nezáporných čísel. Ukážme, že platí aj pre ľubovoľnú $(n+1)$-ticu. Uvažujme ľubovoľnú $(n+1)$-ticu čísel $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}$. Nech x_1 je najmenším spomedzi týchto čísel. Potom $x_1=a$. Podľa indukčného predpokladu platí nerovnosť :

$$\frac{1+a}{1+x_2}+\frac{1+x_2}{1+x_3}+\ldots+\frac{1+x_{n-1}}{1+x_n}+\frac{1+x_n}{1+a}\leqq n+\frac{\left(x_1-a\right)^2+\left(x_2-a\right)^2+\ldots+\left(x_n-a\right)^2}{(1+a)^2}.$$

Stačí ukázať, že platí:

$$\frac{1+x_n}{1+x_{n+1}}+\frac{1+x_{n+1}}{1+a}-\frac{1+x_n}{1+a}\leqq\frac{(x_{n+1}-a)^2}{(1+a)^2}+1.$$

Uvedieme postupnosť ekvivalentných nerovností. Nech $0\leqq a\leqq b, 0\leqq a\leqq c$. Potom:

$$c-b\leqq c-a \quad \text{a} \quad 0\leqq\frac{1}{c}\leqq\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{c-b}{c}\frac{c-a}{a}\leqq\frac{c-a}{a}\frac{c-a}{a},$$
$$(c-b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\leqq\frac{(c-a)^2}{a^2},$$
$$\frac{c}{a}+\frac{b}{c}-\frac{b}{a}\leqq 1+\frac{(c-a)^2}{a^2}.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a=b=c$. Týmto sme vlastne z predpokladu $0\leqq a+1\leqq x_n+1, 0\leqq a+1\leqq x_{n+1}+1$ dostali požadovanú nerovnosť, a tým aj celý druhý indukčný krok.

5.2 *(Eugen Kováč)* Ukážeme, že existuje taká tabuľka, ktorá sa popísanou operáciou po žiadnom konečnom počte krokov nezmení na tabuľku so samými jednotkami.

+	+	+	+
+	+	+	−
+	+	−	+
+	−	+	−
−	+	+	+
+	−	+	−
+	+	−	+
+	+	+	−
+	+	+	+

−	+	−	+
+	−	+	+
+	+	−	+
+	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	−
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	−	+

Uvažujme tabuľku, ktorá má v strednom políčku (piate políčko v piatom riadku) 1 a vo všetkých ostatných +1. Táto tabuľka bude zrejme po ľubovoľnom počte operácií súmerná podľa piateho riadku aj podľa piateho stĺpca. Ak P je políčko v piatom stĺpci, potom číslo vľavo od P a číslo vpravo od P sú rovnaké. Preto je ich súčin 1. Avšak v tejto tabuľke po ľubovoľnom počte operácií nemajú na piaty stĺpec vplyv ostatné stĺpce. Teraz stačí iterovať samostatne len piaty stĺpec, ktorý sa od druhej iterácie začne opakovať s periódou 6, pričom v každej iterácii je v tomto stĺpci aspoň jedna 1.

V tabuľke možno vidieť, ako prebieha zmena znamienok v piatom stĺpci. Každý stĺpec predstavuje jednu iteráciu.

5.3 Platí $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Prenásobením členom $\lambda - 1$ dostávame

$$\lambda^{n+1} = (1 - a_{n-1})\lambda^n + (a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1} + \ldots + (a_1 - a_0)\lambda + a_0.$$

Keďže všetky koeficienty na pravej strane sú nezáporné, platí

$$|\lambda|^{n+1} \leqq (1 - a_{n-1})|\lambda|^n + (a_{n-1} - a_{n-2})|\lambda|^{n-1} + \ldots + (a_1 - a_0)|\lambda| + a_0.$$

Z toho, že $|\lambda| \geqq 1$ možno zhora ohraničiť pravú stranu nerovnosti výrazom

$$|\lambda|^n[(1 - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_1 - a_0) + a_0] = |\lambda|^n.$$

Máme teda nerovnosť $|\lambda|^{n+1} \leqq |\lambda|^n$, odtiaľ $|\lambda| \leqq 1$, preto $|\lambda| = 1$. Potom

$$|\lambda^{n+1}| = |(1 - a_{n-1})\lambda^n| + |(a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1}| + \ldots + |(a_1 - a_0)\lambda| + |a_0|.$$

Pretože a_0 je kladné reálne číslo, sú aj čísla

$$\lambda^{n+1}, \quad (1 - a_{n-1})\lambda^n, \quad (a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1}, \quad \ldots, \quad (a_1 - a_0)\lambda$$

nezáporné reálne. Z toho už potom okamžite vyplýva

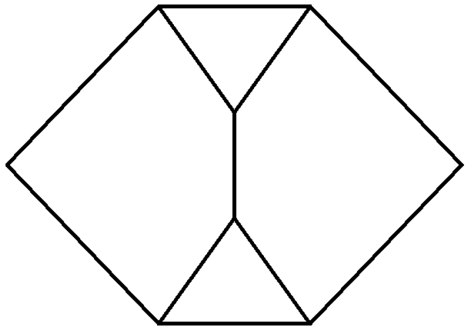
$$\lambda^{n+1} = |\lambda^{n+1}| = |\lambda|^{n+1} = 1.$$

5.4 Na obr. 37 vidíme, že graf so zadanými vlastnosťami môže mať 11 hrán. Ukážme, že je to najvyšší možný počet. Predpokladajme, že existuje taký vyhovujúci graf, ktorý má aspoň 12 hrán (zrejme môžme predpokladať, že ich má práve 12). Nech A je vrchol maximálneho stupňa n. Potom $n \geqq 3$. Nech A susedí s $B_1, B_2, \ldots, B_n$, zvyšné vrcholy označme C_1, C_2, C_{7-n}. Ak C_i alebo B_i je spojený s dvomi rôznymi vrcholmi B_j a B_k, potom tri z nich spolu s A tvoria štvorcyklus. Preto je v grafe nanajvýš $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ hrán typu B_iB_j a $7-n$ hrán typu B_iC_j. Hrán typu C_iC_j je evidentne nanajvýš $\binom{7-n}{2}$. Teraz možno zhora odhadnúť celkový počet hrán v grafe číslom

$$f(n) = n + \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + (7-n) + \binom{7-n}{2}.$$

Teraz však $f(5) = f(6) = f(7) = 10 < 12$, kým $f(4) = 12$.

Ak $n = 4$, sú v grafe postupne práve 2, 3 a 3 hrany typu B_jB_i, B_iC_j a C_iC_j. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že B_1 je spojený s B_2, B_3 s B_4 a C_1, C_2, C_3 sú spojené navzájom. Žiadne z B-čiek nemôže byť spojené s dvomi C-čkami (inak by vznikol štvorcyklus). Preto sú tri B-čka spojené s rôznymi C-čkami. Avšak B_1 a B_2 alebo B_3 a B_4 vytvoria štvorcyklus s dvomi C-čkami. Preto takýto graf neexistuje.



Obr. 37

Pre $n = 3$ sú všetky vrcholy stupňa 3. Keďže $f(3) = 14$, v tomto grafe môžu byť nanajvýš 4 hrany typu C_iC_j. Odtiaľ plynie, že musia byť po rade práve $1, 3$ a 4 hrany typu B_iB_j, B_iC_j a C_iC_j. Naviac, jedno z C-čiek je spojené z inými tromi. Odtiaľ vyplýva, že iné C-čko je spojené s dvomi B-čkami, a teda vznikol štvorcyklus s A. Zrejme prípad $n = 2$ nemá zmysel diskutovať.

5.5 *(Martin Pál)* Daný rekurentný vzťah

$$a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} \tag{1}$$

zrejme spolu s prvými tromi členmi jednoznačne určuje postupnosť. Teraz si všimneme, že ak hľadáme a_n v tvare

$$a_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma, \tag{2}$$

vyhovuje takáto postupnosť rekurentnému vzťahu (1). Treba ešte splniť začiatočné podmienky na a_0, a_1, a_2. Riešením sústavy lineárnych rovníc dostávame $\alpha = \dfrac{a_2 - 2a_1 + a_0}{2}$, $\beta = \frac{4a_1 - 3a_0 - a_2}{2}$, $\gamma = a_0$. Dosadením vzťahu $a_2 = 2a_1 - a_0 + 2$ do posledného dostávame: $\alpha = 1, \beta = a_1 - a_0 - 1, \gamma = a_0$. Teda $a_n = n^2 + \beta n + \gamma$. (Keďže postupnosť je určená jednoznačne, je to jej jediné možné vyjadrenie.)

Ďalej vieme, že druhé mocniny celých čísel dávajú po delení štyrmi zvyšky 0 a 1. Aby a_n bolo pre nejaké n štvorcom, musí byť (pomocou úvahy modulo 4) β deliteľné dvomi. Položme $\beta = 2k$. Potom $a_n = n^2 + 2kn + \gamma = (n+k)^2 - k^2 + \gamma = (n+k)^2 + l$, pre nejaké pevné celé číslo l, nezávislé na n. Ak l je kladné, tak ľahko nájdeme také m, že $(m+k+1)^2 > (m+k)^2 + l$, a preto sa nemôžu nachádzať za sebou v postupnosti dva štvorce (to protirečí zadaniu). Ak by bolo l záporné, podobne existuje m také, že $(m + k - 1)^2 < (m+k)^2 + l$ a z podobných dôvodov dostávame spor. Preto musí byť $l = 0$, a teda $a_n = (n+k)^2$ pre vhodné celé k.

5.6 *(Peter Macák)* Označme rovnice v zadaní po rade (1) až (4). Do (4) dosadíme $x = 1$:

$$f(z, zy) = z^k f(1, y) = z^k y, \tag{5}$$

(nakoniec sme použili (2)). To znamená, že pre všetky $x \in \langle 0,1\rangle$ je $f(x,0) = f(xz,z) = z^k \cdot 0 = 0$. Špeciálne

$$f(0,0) = 0. \tag{6}$$

Pre všetky ostatné $1 \geqq X \geqq Y \geqq 0, x \neq 0$ platí

$$f(X,Y) = X^{k-1}Y, \tag{7}$$

pretože Y sa dá zapísať ako $z \cdot X$, kde $z \in \langle 0,1\rangle$ a možno teda použiť (5).

Podobne ak do (4) dosadíme za $y = 1$, tak môžme odvodiť pre $1 \geqq X \geqq Y \geqq 0, C \neq 0$:

$$f(Y,X) = X^{k-1}Y. \tag{8}$$

Zo (7) a (8) potom vyplýva, že pre všetky $1 \geqq X \geqq Y \geqq 0, X \neq 0$ platí

$$f(X,Y) = f(Y,X) = X^{k-1}. \tag{9}$$

Týmto sme jednoznačne definovali funkciu $f(x,y)$ na intervale $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$, pre dané k. Teraz budeme predpokladať, že $1 \geqq x \geqq y \geqq z > 0$. V podmienke (3) potom bude: $f(x,y) = x^{k-1}y$, $f(y,z) = y^{k-1}z$. Preto má platiť

$$f(x^{k-1}y, z) = f(x, y^{k-1}z). \tag{10}$$

Vzhľadom k (6), (9) je zrejmé, že nezáleží na poradí zložiek funkcie $f(x,y)$, ale iba na tom, ktoré z čísel x, y je menšie. V podmienke (10) môžeme pre každé $x \in \langle 0,1\rangle$ dostať $x^{k-1}y \geqq z, x \geqq y^{k-1}z$. Potom

$$\begin{aligned} (x^{k-1}y)^{k-1}z &= x^{k-1}y^{k-1}z \\ x^{(k-1)^2}y^{k-1}z &= x^{k-1}y^{k-1}z \qquad \Longrightarrow \qquad x^{(k-1)^2} = x^{k-1}. \end{aligned}$$

Ak by táto rovnosť platila pre všetky $x \in \langle 0,1\rangle$ (pre pevné x možno jednoducho zvoliť y, z také, aby platilo $x^{k-1}y \geqq z, \quad x \geqq y^{k-1}z$, stačí voliť dostatočne malé z), tak sa musia rovnať exponenty $(k-1)^2 = k-1$, preto $k = 1, 2$. Iné k preto nemôžu vyhovovať.

Pre $k = 1$ je $f(x,y) = \min(x,y)$ a zrejme sú potom splnené všetky podmienky (1) – (4).

Pre $k = 2$ je $f(x,y) = xy$ a opäť sú splnené všetky podmienky (1) – (4).

Úloha má dve riešenia.

5.7 *(Martin Pál)* Zo zadanej nerovnosti po dosadení $x = y$ dostávame: $f^2(x) \leqq 2x^2 f(\frac{x}{2}) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqq 0$, pre všetky $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Pre $x = 0$ máme $f^2(0) \leqq 20^2 f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$. Teraz predeľme danú nerovnosť výrazom x^2y^2 :

$$\frac{f(x)}{x^2} \cdot f(y)y^2 \leqq \left[\frac{f(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2} + \frac{f(\frac{y}{2})}{(\frac{y}{2})^2}\right] \cdot \frac{1}{4}$$

alebo (ak označíme $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$):

$$4g(x)g(y) \leqq g(\frac{x}{2}) + g(\frac{y}{2}). \tag{1}$$

Po dosadení $x = y$ do (1) máme:

$$2g^2(x) \leqq g(\frac{x}{2}). \tag{2}$$

Nech existuje číslo x_0 také, že $g(x_0) = h > 1$. Potom dokážeme, že $g(x_0 \cdot 2^{-i}) \geqq (2h)^{2^i} \frac{1}{2}$. Dôkaz prevedieme úplnou matematickou indukciou.

Prvý krok Pre $i = 1:$ $\quad 2h^2 \leqq g(x_0 2^{-i})$, platí (z (2)).

Druhý krok Nech

$$(2h)^{2^i} \frac{1}{2} \leqq g(x_0 \cdot 2^{-i}) \quad \Rightarrow \left((2h)^{2^i} \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \leqq 2g^2(x_0 \cdot 2^{-i}) \leqq g(x_0 \cdot 2^{-i-1})$$

$$(2h)^{2 \cdot 2^i} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \leqq g(x_0 \cdot 2^{-i-1})$$

Teda máme

$$f(x_0 \cdot 2^{-i}) \geqq x_0^2 \cdot 2^{2^i - 2i - 1} \cdot h^{2^i}.$$

Zrejme $2^i - 2i - 1 \to \infty$ pre $i \to \infty$, teda $f(x_0 \cdot 2^{-i}) \to \infty$ pre $i \to \infty$, čiže pre $x_0 \cdot 2^{-i} \to 0$, čo je spor so zadaním.

Preto platí $g(x) \leqq 1$, teda $f(x) \leqq x^2$ pre všetky $x \in \langle 0, \infty)$.

Obsah

RNDr. Karel Horák, CSc. –
Richard Kollár – Jana Višňovská –
Tomáš Vinař – Úlohová komisia MO

Štyridsiatyštvrtý ročník
matematickej olympiády
na stredných školách

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v roku 1995.
Sadzbu programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc. a Richard Kollár.
Grafická úprava obálky Michal Skála a Miroslav Oleárnik.
Vytlačilo Edičné centrum MFF UK, Mlynská dolina, Bratislava.
1.vydanie

ISBN 80–967454–1–7

NEPREDAJNÉ