2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

---

1. *Uvažujme dve kvadratické rovnice*

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnymi parametrami a, b. Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet $a+b$, ak existuje práve jedno reálne číslo x, ktoré súčasne vyhovuje obom rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice (a,b) reálnych parametrov, pre ktoré tento súčet tieto hodnoty nadobúda. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Odčítaním oboch daných rovníc dostaneme rovnosť $(b-a)x+a-b=0$, čiže $(b-a)(x-1)=0$. Odtiaľ vyplýva, že $b=a$ alebo $x=1$.

Ak $b=a$, majú obidve rovnice tvar $x^2-ax-a=0$. Práve jedno riešenie existuje práve vtedy, keď diskriminant a^2+4a je nulový. To platí pre $a=0$ a pre $a=-4$. Pretože $b=a$, má súčet $a+b$ v prvom prípade hodnotu 0 a v druhom prípade hodnotu -8.

Ak $x=1$, dostaneme z daných rovníc $a+b=1$, teda $b=1-a$. Rovnice potom majú tvar

$$x^2-ax+a-1=0 \quad \text{a} \quad x^2+(a-1)x-a=0.$$

Prvá má korene 1 a $a-1$, druhá má korene 1 a $-a$. Práve jedno spoločné riešenie tak dostaneme vždy s výnimkou prípadu, keď $a-1=-a$, čiže $a=\frac{1}{2}$ – vtedy sú spoločné riešenia dve.

Záver. Najmenšia hodnota súčtu $a+b$ je -8 a je dosiahnutá pre $a=b=-4$. Najväčšia hodnota súčtu $a+b$ je 1; túto hodnotu má súčet $a+b$ pre všetky dvojice $(a, 1-a)$, kde $a \neq \frac{1}{2}$ je ľubovoľné reálne číslo.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Jeden bod dajte za odvodenie podmienky $(b=a) \vee (x=1)$, dva body za vyriešenie prípadu $b=a$, dva body za vyriešenie prípadu $x=1$, jeden bod za správny záver.

---

2. *V trojuholníku ABC má uhol α veľkosť $20°$. Vypočítajte veľkosti uhlov β a γ, ak platí rovnosť $a+2v_a=b+2v_b$.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Z dvojakého vyjadrenia obsahu trojuholníka ABC dostaneme rovnosť $av_a = bv_b$. Dosadením $b=a+2v_a-2v_b$ do tejto rovnosti dostaneme $av_a=av_b+2v_av_b-2v_b^2$ a po úprave $(a-2v_b)(v_a-v_b)=0$.

Sú dve možnosti: Ak $a=2v_b$, tak $\sin\gamma=\frac{v_b}{a}=\frac{1}{2}$, a teda $\gamma=30°$ alebo $\gamma=150°$; potom $\beta=180°-\alpha-\gamma$. Ak $v_a=v_b$, tak $a=b$, a teda $\beta=\alpha=20°$.

Úloha má tri riešenia: $\beta=130°$ a $\gamma=30°$, $\beta=10°$ a $\gamma=150°$ alebo $\beta=20°$ a $\gamma=140°$.

Iné riešenie. Z vyjadrenia výšok pomocou uhla γ, t. j. $v_a=b\sin\gamma$ a $v_b=a\sin\gamma$, dostaneme dosadením do zadaného vzťahu rovnosť $a+2b\sin\gamma=b+2a\sin\gamma$, ktorá platí práve vtedy, keď $(a-b)(1-2\sin\gamma)=0$.

Ak $a=b$, vychádza $\beta=\alpha=20°$, takže $\gamma=140°$. Inak musí byť $\sin\gamma=\frac{1}{2}$, takže $\gamma=30°$ alebo $\gamma=150°$; uhol β v oboch prípadoch dopočítame ako $\beta=180°-\alpha-\gamma$.

Dostaneme tak rovnakú trojicu riešení ako pri prvom postupe.

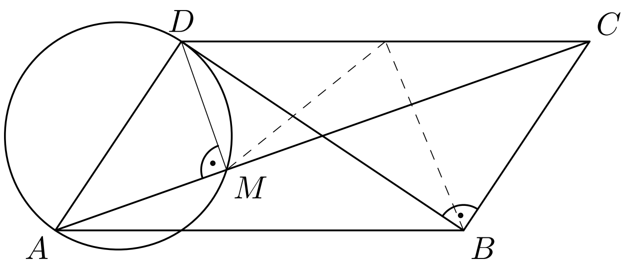
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri prvom uvedenom postupe dajte jeden bod za použitie rovnosti $av_a = bv_b$, ďalší bod za podmienku $(a - 2v_b)(v_a - v_b) = 0$. Za úplné vyriešenie prípadu $a = 2v_b$ tri body a za vyriešenie prípadu $v_a = v_b$ jeden bod. Pri druhom postupe dajte jeden bod za vyjadrenie výšok pomocou uhla γ, ďalšie dva body za podmienku $(a - b)(1 - 2\sin\gamma) = 0$, dva body za vyriešenie prípadu $1 - 2\sin\gamma = 0$ a jeden bod za vyriešenie prípadu $a = b$.

---

3. *V rovine je daný rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD je kolmá na stranu AD. Označme M ($M \neq A$) priesečník priamky AC s kružnicou majúcou priemer AD. Dokážte, že os úsečky BM prechádza stredom strany CD.*

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Podľa Tálesovej vety je uhol AMD pravý. Preto je aj uhol DMC pravý (obr. 1). Strany BC a AD sú rovnobežné, preto je uhlopriečka BD kolmá aj na stranu BC. Body M a B teda ležia na Tálesovej kružnici s priemerom CD. Od stredu úsečky CD majú potom rovnakú vzdialenosť, a preto tento stred leží na osi úsečky MB.



Obr. 1

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Dva body dajte za zistenie, že uhly DMC a DBC sú pravé, dva body za poznatok, že body M a B ležia na Tálesovej kružnici a dva body za z toho vyplývajúci záver.

---

4. *Hokejový turnaj sa hrá systémom „každý s každým“. V priebehu turnaja sa každá dvojica družstiev stretne práve raz. Turnaj sa odohráva po jednotlivých kolách. Pri párnom počte družstiev odohrá každé v jednom kole jedno stretnutie, pri nepárnom počte má v každom kole jedno družstvo voľno. Za remízu dostane každý zo súperov po jednom bode. Ak sa stretnutie neskončí remízou, dostane víťaz dva body, porazený nezíska žiadny bod. O poradí v tabuľke rozhoduje predovšetkým počet bodov, pri rovnosti bodov potom skóre. Po odohratí niekoľkých kôl nemala žiadna dvojica družstiev ten istý počet bodov. Dokážte, že v tom prípade už posledný v tabuľke stratil nádej na celkové prvenstvo. Úlohu riešte pre turnaj*

a) desiatich družstiev,

b) jedenástich družstiev.

(*Martin Panák*)

Riešenie. a) Turnaj sa skladá z deviatich kôl. Ak má každé družstvo iný počet bodov, musí mať prvý v tabuľke aspoň o 9 bodov viac ako posledný. Na zisk deviatich bodov je potrebné odohrať aspoň päť stretnutí; to znamená, že už muselo prebehnúť aspoň 5 kôl, takže do konca turnaja ostávajú nanajvýš štyri kolá. V nich môže posledný v tabuľke získať maximálne 8 bodov a prvého už nemôže dostihnúť.

b) V turnaji prebehne 11 kôl (každé družstvo desaťkrát hrá a raz má voľno). Ak má každé družstvo iný počet bodov, muselo už byť udelených aspoň $0+1+2+\ldots+10=55$ bodov. V jednom kole sa odohrá 5 stretnutí, takže sa rozdelí $5\cdot 2=10$ bodov. Preto už muselo byť odohraných aspoň 6 kôl a do konca ich ostáva nanajvýš 5.

Keby bol medzi niektorými susedmi v tabuľke väčší rozdiel ako jednobodový, mal by prvý aspoň o 11 bodov viac ako posledný a v zostávajúcich nanajvýš piatich kolách by ním nemohol byť dostihnutý. Pripusťme teda, že rozdiely medzi susedmi v tabuľke sú iba jednobodové. Ak má posledný b bodov (zrejme $0\leqq b<11$), je celkový počet udelených bodov $b+(b+1)+(b+2)+\ldots+(b+10)=11b+55$. Na to je potrebné odohrať

$$k=\frac{11b+55}{10}=b+5+\frac{b+5}{10}$$

kôl. Počet odohraných kôl je celé číslo, preto $10\mid b+5$. Odtiaľ vyplýva $b=5$, a teda $k=$ $=11$. To znamená, že sú odohrané všetky kolá a posledné miesto v tabuľke je definitívne.

Iné riešenie časti b). Rovnako ako v prvom riešení dokážeme, že už muselo prebehnúť aspoň 6 kôl. Medzi prvým a posledným v tabuľke je aspoň desaťbodový rozdiel. Keby prebehlo aspoň 7 kôl, ostávali by do konca najviac 4 kolá a v nich by nemohol posledný najmenej desaťbodový náskok prvého vyrovnať. Predpokladajme teda, že prebehlo presne 6 kôl, v ktorých bolo rozdelených $6\cdot 10=60$ bodov. Keby mal posledný v tabuľke aspoň jeden bod, bol by celkový počet udelených bodov aspoň $1+2+3+\ldots+11=66>60$. Posledný teda musel byť bez bodu. Potom ale prvý musel mať viac ako 10 bodov, pretože v opačnom prípade by bol bodový zisk všetkých družstiev $0+1+2+\ldots+10=55<60$ bodov. Prvý teda mal pred posledným aspoň jedenásťbodový náskok a ten nemôže byť v zostávajúcich piatich kolách vyrovnaný.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vyriešenie časti a) dajte 2 body, z toho jeden bod za zistenie, že už muselo prebehnúť aspoň 5 kôl. V časti b) jeden bod za dôkaz, že už prebehlo aspoň 6 kôl, jeden bod za vyriešenie úlohy za predpokladu, že medzi niektorými susedmi v tabuľke je väčší rozdiel ako jeden bod, dva body za vyriešenie úlohy v prípade jednobodových rozdielov medzi susedmi. Podobne dajte (pri druhom postupe) jeden bod za dôkaz, že už prebehlo aspoň 6 kôl; jeden bod za dôkaz, že posledný nemôže dostihnúť prvého, ak sa už odohralo viac ako 6 kôl; 2 body za dôkaz, že sa to nemôže stať ani vtedy, ak sa už odohralo presne 6 kôl.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.