2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

1. *Určte najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré aj čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ sú prirodzené.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Vysvetlíme, prečo prvočíselný rozklad hľadaného čísla musí obsahovať len vhodné mocniny prvočísel 2, 3 a 5. Každé prípadné ďalšie prvočíslo by sa v rozklade čísla n muselo vyskytovať v mocnine, ktorej exponent je deliteľný dvoma, tromi aj piatimi zároveň (viď návodná úloha 1). Po vyškrtnutí takého prvočísla by sa číslo n zmenšilo a skúmané odmocniny by pritom ostali celočíselné.

Položme preto $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pričom a, b, c sú prirodzené čísla. Čísla $\sqrt[3]{3n}$ a $\sqrt[5]{5n}$ sú celé, preto je exponent a násobkom troch a piatich. Aj $\sqrt{2n}$ je celé číslo, preto musí byť číslo a nepárne. Je teda nepárnym násobkom pätnástich: $a \in \{15, 45, 75, \dots\}$. Analogicky je exponent b taký násobok desiatich, ktorý po delení tromi dáva zvyšok 2: $b \in \{20, 50, 80, \dots\}$. Napokon c je násobok šiestich, ktorý po delení piatimi dáva zvyšok 4: $c \in \{24, 54, 84, \dots\}$. Z podmienky, že n je najmenšie, dostávame $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$.

Presvedčíme sa ešte, že dané odmocniny sú prirodzené čísla:

$$\sqrt{2n} = 2^8 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12}, \quad \sqrt[3]{3n} = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^8, \quad \sqrt[5]{5n} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5.$$

Záver. Hľadaným číslom je $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Ak m, k a $\sqrt[k]{m}$ sú celé čísla väčšie ako 1, tak v rozklade čísla m na súčin prvočísel sa každé prvočíslo vyskytuje v mocnine, ktorej exponent je násobkom čísla k. Dokážte. [Rozklad čísla m dostaneme, keď rozklad čísla $\sqrt[k]{m}$ umocníme na k-tu.]

D1. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré súčasne platí

$$n(ab, c) = 2^8, \quad n(bc, a) = 2^9, \quad n(ca, b) = 2^{11},$$

pričom $n(x, y)$ označuje najmenší spoločný násobok prirodzených čísel x, y. [50–C–S–1]

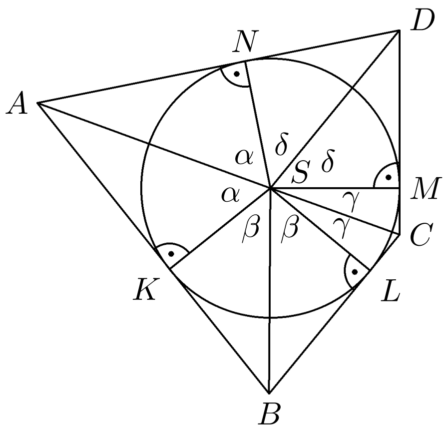
D2. Pre koľko usporiadaných trojíc prirodzených čísel x, y, z platí $xyz = 1\,000\,000$? [Návod: $1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6$. Položme $x = 2^a \cdot 5^p$, $y = 2^b \cdot 5^q$, $z = 2^c \cdot 5^r$ a preskúmajme všetky možnosti pre $a + b + c = 6$ a pre $p + q + r = 6$. Nakoniec zistíme hľadaný počet: $28 \cdot 28 = 784$.]

---

2. *Štvoruholníku $ABCD$ je vpísaná kružnica so stredom S. Určte rozdiel $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD|$, ak $|\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40°$.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Päty kolmíc spustených zo stredu S vpísanej kružnice na strany AB, BC, CD a DA označme postupne K, L, M a N (obr. 1). Pravouhlé trojuholníky ASK a ASN sú zhodné podľa vety Ssu. Majú totiž spoločnú preponu AS a zhodné odvesny SK a SL, ktorých dĺžka je rovná polomeru vpísanej kružnice. Zo zhodnosti týchto trojuholníkov vyplýva jednak známe tvrdenie o dĺžkach dotyčníc ($|AK| = |AN|$), jednak zhodnosť uhlov ASK a ASN, ktorých spoločnú veľkosť označíme α:

$$|\measuredangle ASK| = |\measuredangle ASN| = \alpha.$$



Obr. 1

Analogicky zistíme zhodnosť trojuholníkov SBK a SBL, ďalej SCL a SCM, a nakoniec SDM a SDN. Na základe uvedených zhodností môžeme položiť

$$|\measuredangle BSK| = |\measuredangle BSL| = \beta, \quad |\measuredangle CSL| = |\measuredangle CSM| = \gamma, \quad |\measuredangle DSM| = |\measuredangle DSN| = \delta.$$

Odtiaľ a z obr. 1 potom dostávame

$$\begin{aligned} |\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| &= (\alpha + \delta) - (\gamma + \delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha + \beta) - (\gamma + \beta) = |\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40°. \end{aligned}$$

Záver. $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| = 40°$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dotyčnice vedené ku kružnici $k(O, r)$ z bodu A sa dotýkajú kružnice k v bodoch T a U. Dokážte, že a) $|AT| = |AU|$, b) $|\measuredangle AOT| = |\measuredangle AOU|$.

N2. Lichobežníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) je vpísaná kružnica so stredom O. Dokážte, že a) $|\measuredangle AOD| = 90°$, b) $|\measuredangle DOC| = |\measuredangle DAO| + |\measuredangle ABO|$.

N3. Dotyčnice vedené ku kružnici $k(O, r)$ z bodu A sa dotýkajú kružnice k v bodoch T a U. Tretia dotyčnica pretína úsečky AT a AU postupne v bodoch B a C. Určte obvod trojuholníka ABC, ak $|AT| = 12\,\text{cm}$. [24 cm; pre bod V dotyku dotyčnice BC platí $|CV| = |CT|$ a $|BV| = |BU|$, takže $|BC| = |CT| + |BU|$.]

---

3. *Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Keď označíme x počet krabičiek a y počet guľôčok, dostaneme zo zadania sústavu rovníc

$$x + n = y \qquad \text{a} \qquad (x - n) \cdot n = y \tag{1}$$

s neznámymi x, y a n z oboru prirodzených čísel. Vylúčením neznámej y dostaneme rovnicu $x + n = (x - n) \cdot n$, ktorá pre $n = 1$ nemá riešenie. Pre $n \geqq 2$ dostaneme

$$x = \frac{n^2 + n}{n - 1} = n + 2 + \frac{2}{n - 1}, \tag{2}$$

odkiaľ vidíme, že (prirodzené) číslo $n-1$ musí byť deliteľom čísla 2. Teda $n \in \{2,3\}$. Prípustné hodnoty n dosadíme do (1) a sústavu vyriešime (možno tiež využiť vzťah (2)). Pre $n=2$ dostaneme $x=6$, $y=8$ a pre $n=3$ určíme $x=6$ a $y=9$.

Skúška. Majme šesť krabičiek a osem guľôčok. Keď do každej krabičky dáme práve jednu guľôčku, ostane $n=2$ guľôčok. Keď však odoberieme dve krabičky, môžeme do zostávajúcich štyroch rozdeliť guľôčky práve po dvoch. Podmienky úlohy sú teda splnené. Pre šesť krabičiek a deväť guľôčok urobíme skúšku rovnako ľahko.

Záver. Buď máme šesť krabičiek a osem guľôčok, alebo šesť krabičiek a deväť guľôčok.

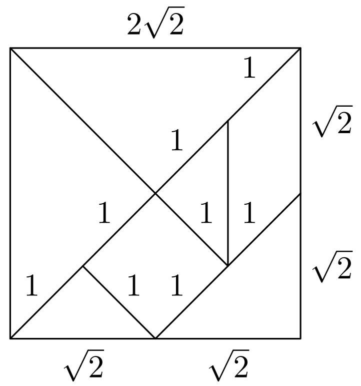
Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky celé čísla n, pre ktoré nadobúda zlomok $(4n+27)/(n+3)$ celočíselné hodnoty. [$n \in \{-18,-8,-6,-4,-2,0,2,12\}$, číslo $n+3$ je deliteľom čísla 15.]

N2. Nováková, Vašková a Sudková vyhrali štafetu a okrem diplomov dostali aj bonboniéru, ktorú hneď po pretekoch zjedli. Keby zjedla Petra o 3 bonbóny viac, zjedla by ich práve toľko, koľko Miška s Janou dokopy. A keby si Jana pochutnala ešte na siedmich bonbónoch, tiež by ich mala toľko, ako druhé dve spolu. Ešte vieme, že počet bonbónov, ktoré zjedla Vašková, je deliteľný tromi a že Sudková si pochutila na siedmich bonbónoch. Ako sa volali dievčatá? Koľko bonbónov zjedla každá z nich? [56–Z9–II–3]

---

4. *Tangram je skladačka, ktorú možno vyrobiť z papiera rozrezaním vystrihnutého štvorca na sedem dielov podľa čiar vyznačených na obr. 2. Predpokladajme, že dĺžka*



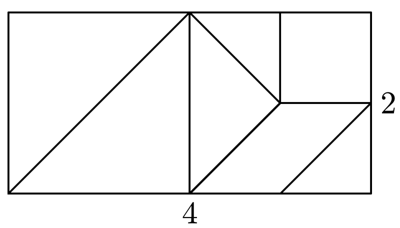
Obr. 2

strany štvorca je $2\sqrt{2}$ cm. *Rozhodnite, či možno z dielov tangramu zložiť:*

a) obdĺžnik $2\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$*,*

b) obdĺžnik $\sqrt{2}\,\text{cm} \times 4\sqrt{2}\,\text{cm}$. (*Pavel Leischner*)

Riešenie. a) Daný obdĺžnik sa zložiť dá (obr. 3).



Obr. 3

b) Celková dĺžka „iracionálnych“ strán všetkých dielov tangramu je $10\sqrt{2}$ cm. Je teda rovná obvodu obdĺžnika, ktorý máme zložiť. Odtiaľ a z textu návodnej úlohy 1 vyplýva, že všetky „iracionálne“ strany dielov tangramu musia byť umiestnené na hranici skladaného obdĺžnika. To však nie je možné, lebo protiľahlé „iracionálne“ strany kosodĺžnikového dielu majú vzdialenosť menšiu ako 1 cm, ale najmenšia vzdialenosť protiľahlých strán obdĺžnika je $\sqrt{2}$ cm.

Záver. Obdĺžnik 2 cm × 4 cm sa z tangramu zložiť dá, obdĺžnik $\sqrt{2}\,\text{cm} \times 4\sqrt{2}\,\text{cm}$ sa zložiť nedá.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte, že pre celé nezáporné čísla a, b, c, d platí: Dĺžku úsečky možno vyjadriť v tvare $a + b\sqrt{2}$ a súčasne v tvare $c + d\sqrt{2}$ práve vtedy, keď $a = c$ a $b = d$. [Rovnosť $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ je ekvivalentná so vzťahom $a - c = (d - b)\sqrt{2}$, ktorého ľavá strana je celé číslo, ale pravá strana je pre $b \neq d$ iracionálna. Rovnosť nastáva, len keď $b = d$ a $a = c$.]

D1. Dokážte, že z tangramu nemožno zložiť kosodĺžnik so základňou dĺžky 2 cm a výškou 4 cm. [Z dielov tangramu sa dajú zostaviť iba tie uhly, ktorých veľkosť je násobkom 45°. Preto musí mať skladaný kosodĺžnik veľkosti vnútorných uhlov 45° a 135°. Keďže má výšku 4 cm, má jeho dlhšia strana dĺžku $4\sqrt{2}$ cm. Tangram má sedem dielov, z ktorých jedine štvorec má všetky strany celočíselnej dĺžky. Pozdĺž oboch dlhších strán kosodĺžnika je preto nutné umiestniť po jednej „iracionálnej“ strane každého zo šiestich zvyšných „iracionálnych“ dielov. Ostanú tak práve dve strany dĺžky $\sqrt{2}$ cm, ktoré musia byť vnútri skladaného kosodĺžnika. Jedna z nich zrejme patrí dielu tvaru kosodĺžnika (lebo ten nemôže mať kvôli svojej malej výške obe protiľahlé „iracionálne“ strany na hranici skladaného obrazca), druhá dielu tvaru trojuholníka s „iracionálnymi“ odvesnami. V dôsledku vety z predošlej úlohy musia byť tieto strany umiestnené pozdĺž jednej priamky. To však nie je možné, pretože môžu byť umiestnené jedine v smeroch navzájom kolmých.]

D2. Určte všetky dvojice (a, b) prirodzených čísel, pre ktoré platí $a + b\sqrt{5} = b + a\sqrt{5}$. [56–C–I–1]

D3. Určte všetky dvojice (a, b) prirodzených čísel, ktorých rozdiel $a - b$ je piatou mocninou niektorého prvočísla a pre ktoré platí $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$. [56–C–S–3]

D4. Nájdite všetky dvojice (a, b) nezáporných reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{b^2 + a} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a + b}.$$

[48–C–S–1]

---

5. *V skupine n ľudí ($n \geqq 4$) sa niektorí poznajú. Vzťah „poznať sa“ je vzájomný: ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A a nazývame ich dvojicou známych.*

a) Dokážte, že ak medzi každými štyrmi osobami sú aspoň štyri dvojice známych, tak každé dve osoby, ktoré sa nepoznajú, majú spoločného známeho.

b) Zistite, pre ktoré $n \geqq 4$ existuje skupina osôb, v ktorej sú medzi každými štyrmi osobami aspoň tri dvojice známych a súčasne sa niektoré dve osoby ani nepoznajú, ani nemajú spoločného známeho.

c) Rozhodnite, či v skupine šiestich osôb môžu byť v každej štvorici práve tri dvojice známych a práve tri dvojice neznámych.

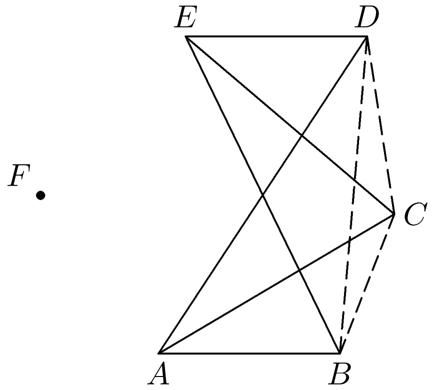
(*Ján Mazák*)

Riešenie. a) Označme A, B dve osoby, ktoré sa nepoznajú, a pridajme k nim ľubovoľné ďalšie dve osoby X a Y. Keby ani osoba X, ani osoba Y nebola spoločným známym osôb A a B, mali by sme zo všetkých šiestich dvojíc vo štvorici $ABXY$ aspoň tri dvojice neznámych: dvojicu AB, dvojicu AX alebo BX a dvojicu AY alebo BY. Dvojice známych vo štvorici $ABXY$ by tak boli najviac tri, čo odporuje predpokladu zo zadania časti a). Tým je časť a) dokázaná.

b) Skupina požadovaných vlastností existuje pre všetky $n \geqq 4$. Ako príklad stačí zvoliť skupinu, v ktorej sa osoba A nepozná s nikým a ostatní sa poznajú navzájom. Potom existuje dokonca $n-1$ dvojíc osôb, ktoré sa ani nepoznajú, ani nemajú spoločného známeho, a medzi každými štyrmi osobami sú aspoň tri dvojice známych.

c) Budeme predpokladať, že šestica osôb s opísanou vlastnosťou existuje. Využijeme grafické znázornenie, v ktorom osoby zakreslíme ako body. Plnou (resp. prerušovanou) úsečkou, ktorou niektoré dva z týchto bodov spojíme, vyznačíme dvojicu známych (resp. dvojicu neznámych).

Z každého bodu grafického znázornenia skupiny šiestich osôb vychádza práve päť úsečiek. Podľa Dirichletovho princípu preto aspoň tri úsečky, ktoré vychádzajú z jedného bodu, majú rovnaký typ (sú buď prerušované, alebo plné). Označme body A, B, C, D, E a F tak, aby mali rovnaký typ úsečky AB, AC a AD, a predpokladajme najskôr, že označujú dvojice známych. Vo štvorici $ABCD$ sú však podľa predpokladu práve tri dvojice neznámych, a preto je trojuholník BCD v grafickom znázornení zakreslený prerušovane. Vo štvorici $BCDE$ potom úsečky EB, EC, ED nutne predstavujú dvojice známych (obr. 4). Odtiaľ vyplýva, že vo štvorici $ABDE$ sú aspoň štyri dvojice známych, ktoré na obr. 4 znázorňujú úsečky AB, AD, EB a ED, čo je v rozpore s naším predpokladom. Prípad, keď úsečky AB, AC a AD predstavujú dvojice neznámych, vedie ku sporu analogicky (v predchádzajúcich úvahách stačí zameniť vzťahy *poznať sa* a *nepoznať sa* a samozrejme aj prerušované a plné úsečky).



Obr. 4

Záver. Neexistuje skupina šiestich osôb, ktorá má v každej svojej štvorici práve tri dvojice známych a práve tri dvojice neznámych.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. V skupine piatich osôb sa v každej štvorici vyskytujú práve tri dvojice známych.

a) Dokážte, že v skupine nemôže byť trojica osôb, ktoré sa poznajú navzájom (tzv. trojuholník známych), ani osoba, ktorá má aspoň troch známych.

b) Dokážte, že tu nemôže byť trojuholník neznámych ani osoba, ktorá sa nepozná aspoň s tromi osobami.

c) Nakreslite graf známostí v takej skupine osôb.

6. *Klárka mala na papieri napísané trojciferné číslo. Keď ho správne vynásobila deviatimi, dostala štvorciferné číslo, ktoré začínalo rovnakou číslicou ako pôvodné číslo, prostredné dve číslice sa rovnali a posledná číslica bola súčtom číslic pôvodného čísla. Ktoré štvorciferné číslo mohla Klárka dostať?* (Peter Novotný)

Riešenie. Hľadajme pôvodné číslo $x = 100a + 10b + c$, ktorého cifry sú a, b, c. Cifru, ktorá sa vyskytuje na prostredných dvoch miestach výsledného súčinu, označme d. Zo zadania vyplýva

$$9(100a + 10b + c) = 1\,000a + 100d + 10d + (a + b + c), \qquad (1)$$

pričom výraz v poslednej zátvorke predstavuje cifru zhodnú s poslednou cifrou súčinu $9c$. To však znamená, že nemôže byť $c \geqq 5$: pre také c totiž končí číslo $9c$ cifrou neprevyšujúcou 5, a pretože $a \neq 0$, platí naopak $a + b + c > c \geqq 5$.

Zrejme tiež $c \neq 0$ (v opačnom prípade by platilo $a = b = c = x = 0$). Ostatné možnosti vyšetríme zostavením nasledujúcej tabuľky.

c	$9c$	$a+b+c$	$a+b$
1	9	9	8
2	18	8	6
3	27	7	4
4	36	6	2

Rovnosť (1) možno prepísať na tvar

$$100(b - a - d) = 10d + a + 11b - 8c. \qquad (2)$$

Hodnota pravej strany je aspoň -72 a menšia ako 200, lebo každé z čísel a, b, c, d je najviac rovné deviatim. Takže buď $b - a - d = 0$, alebo $b - a - d = 1$.

V prvom prípade po substitúcii $d = b - a$ upravíme vzťah (2) na tvar $8c = 3(7b - 3a)$, z ktorého vidíme, že c je násobkom troch. Z prvej tabuľky potom vyplýva $c = 3$, $a = 4 - b$, čo po dosadení do rovnice $8c = 3(7b - 3a)$ vedie k riešeniu $a = b = 2$, $c = 3$. Pôvodné číslo je teda $x = 223$ a jeho deväťnásobok $9x = 2\,007$.

V druhom prípade dosadíme $d = b - a - 1$ do (2) a zistíme, že $8c + 110 = 3(7b - 3a)$. Výraz $8c+110$ je teda deliteľný tromi, preto číslo c dáva po delení tromi zvyšok 2. Dosadením jediných možných hodnôt $c = 2$ a $b = 6 - a$ do poslednej rovnice zistíme, že $a = 0$, čo je v rozpore s tým, že číslo $x = 100a + 10b + c$ je trojciferné.

Záver. Klárka dostala štvorciferné číslo 2 007.

Poznámka. Prvá tabuľka ponúka jednoduchší, ale numericky prácnejší postup priameho dosadzovania všetkých prípustných hodnôt čísel a, b, c do rovnice (1). Počet všetkých možností možno obmedziť na desať odhadom $b \geqq a$, ktorý zistíme pomocou vhodnej úpravy vzťahu (1) napríklad na tvar (2). Riešenie uvádzame v druhej tabuľke.

a	1	2	3	4	1	2	3	1	**2**	1
b	7	6	5	4	5	4	3	3	**2**	1
c	1	1	1	1	2	2	2	3	**3**	4
$9x$	1 539	2 349	3 159	3 969	1 368	2 178	2 988	1 197	**2 007**	1 026

Návodné a doplňajúce úlohy:

D1. K prirodzenému číslu m zapísanému rovnakými ciframi sme pripočítali štvorciferné prirodzené číslo n. Získali sme štvorciferné číslo s opačným poradím cifier, ako má číslo n. Určte všetky také dvojice čísel m a n. [52–C–I–5]

D2. Žiaci mali vypočítať príklad $x + y \cdot z$ pre trojciferné číslo x a dvojciferné čísla y, z. Martin vie násobiť a sčítať čísla zapísané v desiatkovej sústave, ale zabudol na pravidlo prednosti násobenia pred sčítaním. Preto mu vyšlo síce zaujímavé číslo, ktoré sa píše rovnako zľava doprava ako sprava doľava, správny výsledok bol ale o 2 004 menší. Určte čísla x, y, z. [53–C–II–4]