66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

---

1. *Nájdite všetky trojice celých čísel* (a, b, c) *také, že každý zo zlomkov*

$$\frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}, \quad \frac{c}{a+b}$$

má celočíselnú hodnotu. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Uvažovaná trojica zlomkov je symetrická v tom zmysle, že ak nahradíme trojicu celých čísel (a, b, c) ich ľubovoľnou permutáciou, dostaneme zasa (až na poradie) tú istú trojicu zlomkov. To isté platí, keď nahradíme čísla a, b, c číslami opačnými. Táto skutočnosť nám v ďalšom zjednoduší rozbor prípadov.

Predpokladajme teda, že čísla a, b, c sú také, že všetky tri uvažované zlomky majú celočíselnú hodnotu. Ak sa medzi nimi nachádza nula, stačí bez ujmy na všeobecnosti vyšetriť prípad $a = 0$. Po dosadení do uvažovaných zlomkov dostávame, že zlomky b/c a c/b majú celočíselnú hodnotu. Z toho vyplýva, že b aj c sú nenulové a $|b| \geqq |c|$ a zároveň aj $|c| \geqq |b|$, preto $c = \pm b$. Navyše číslo $b + c$ je menovateľom prvého zlomku, preto $b + c \neq 0$, takže musí byť $b = c$. Celkovo tak dostávame (zjavne vyhovujúce) trojice $(0, c, c)$ a ich permutácie pre každé nenulové celé číslo c.

Ostáva vyriešiť prípad, keď $abc \neq 0$.

Vzhľadom na pozorovanie z prvého odseku budeme predpokladať, že aspoň dve z čísel a, b, c sú kladné. Keby boli kladné všetky tri, ležal by zlomok, ktorý má v čitateli najmenšie z čísel a, b, c, medzi 0 a 1, takže by nemohol mať celočíselnú hodnotu.

Nech teda a, b sú kladné čísla a $c = -d$ pre kladné d. Po dosadení do zadania dostaneme, že zlomky

$$\frac{a}{d-b}, \quad \frac{b}{d-a}, \quad \frac{d}{a+b}$$

majú celočíselnú hodnotu. Z posledného z nich je jasné, že $d \geqq a + b$. Preto má prvý zlomok kladný menovateľ, a keďže jeho hodnota je celé číslo, musí platiť $a \geqq d - b$, čiže $d \leqq a + b$. Odtiaľ nutne $d = a + b$, čiže $c = -a - b$ a dostávame tak v súhrne trojice (a, b, c) nenulových čísel, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Všetky také trojice vyhovujú, lebo hodnota všetkých troch uvažovaných zlomkov je pre ne rovná -1.

Odpoveď. Úlohe vyhovujú všetky trojice $(0, c, c)$, $(c, 0, c)$ a $(c, c, 0)$, pričom c je nenulové celé číslo, a všetky trojice (a, b, c) nenulových celých čísel, pre ktoré platí $a + b + c = 0$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak chýba zmienka o niektorej z vyhovujúcich trojíc (napr. sa nikde nespomína iná permutácia trojice $(0, c, c)$), dajte nanajvýš 5 bodov. Neúplné riešenie: za úplné riešenie prípadu, keď je jedno z čísel a, b, c rovné 0, dajte 2 body; za vyriešenie prípadu, keď a, b, c sú nenulové, dajte 4 body, z toho 1 bod za púhe vylúčenie prípadov, keď všetky čísla a, b, c sú kladné, či záporné. Za pozorovanie z prvého odseku o permutáciách trojíc a zmene znamienok, ak nevedú k vyriešeniu jedného z uvedených dvoch prípadov, body nedávajte. Za nájdenie všetkých riešení (bez zdôvodnenia, prečo iné už neexistujú) dajte 1 bod.

2. *Daná je kružnica p so stredom K prechádzajúca bodom M a polkružnica q nad priemerom KM. Ľubovoľným bodom L vnútri úsečky KM vedieme kolmicu na KM. Tá pretne polkružnicu q v bode Q a kružnicu p v bodoch P_1, P_2 tak, že $|P_1Q| > |P_2Q|$. Priamka MQ pretína kružnicu p ešte v bode $R \neq M$. Dokážte, že pre obsahy S_1 a S_2 trojuholníkov MP_1Q a P_2RQ platí $1 < S_1 : S_2 < 3 + \sqrt{8}$.* (Šárka Gergelitsová)

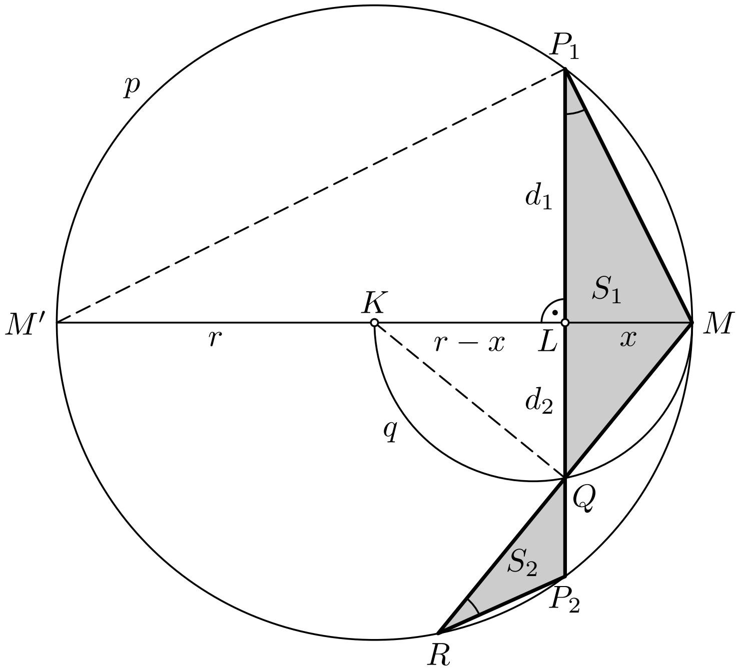
Riešenie. Kružnica, ktorej časťou je polkružnica q, je obrazom kružnice p v rovnoľahlosti so stredom M a koeficientom $1/2$, takže bod Q je stredom úsečky RM. Keďže oba trojuholníky, pomer ktorých obsahov nás zaujíma, majú navyše zhodné uhly pri spoločnom vrchole Q, je

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}|P_1Q| \cdot |MQ| \sin|\measuredangle P_1QM|}{\frac{1}{2}|P_2Q| \cdot |RQ| \sin|\measuredangle P_2QR|} = \frac{|P_1Q|}{|P_2Q|}.$$

Označme $|KM| = r$, $|ML| = x$, $|P_1L| = d_1$, $|QL| = d_2$ (obr. 1). Zo súmernosti bodov P_1, P_2 podľa KM potom vyplýva $|P_1L| = |P_2L|$, takže $|P_2Q| = d_1 - d_2$. Ak označíme M' druhý krajný bod priemeru kružnice p s krajným bodom M, je trojuholník $M'MP_1$ pravouhlý. Z Euklidovej vety pre jeho výšku P_1L dostávame $d_1^2 = x(2r - x)$ a podobne pre výšku QL pravouhlého trojuholníka KQM platí $d_2^2 = x(r - x)$. Odtiaľ

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{|P_1Q|}{|P_2Q|} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} = \frac{(d_1 + d_2)^2}{d_1^2 - d_2^2} =$$
$$= \frac{x(2r-x) + x(r-x) + 2\sqrt{x(2r-x) \cdot x(r-x)}}{rx} = \frac{3r - 2x + 2\sqrt{(2r-x)(r-x)}}{r}.$$

Na výsledný výraz sa možno pozerať ako na funkciu premennej x s parametrom r. Na intervale $\langle 0, r\rangle$ je táto funkcia klesajúca (obe funkcie $3r - 2x$ aj $(2r - x)(r - x)$ sú klesajúce), preto nadobúda maximum $3+2\sqrt{2}$ pre $x = 0$ a minimum 1 pre $x = r$. Keďže podľa zadania $x \in (0, r)$, platí $1 < S_1 : S_2 < 3 + 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{8}$.



Obr. 1

Iné riešenie. Body P_2, R, P_1, M ležia v tomto poradí na kružnici p, preto majú uhly MP_1P_2 a MRP_2 rovnakú veľkosť. Zhodné sú aj vrcholové uhly P_1QM a P_2QR. Podľa vety *uu* sú teda trojuholníky MP_1Q a P_2RQ podobné, takže pomer ich obsahov je štvorcom pomeru dĺžok prislúchajúcich si strán MQ a P_2Q. Keďže $3+\sqrt{8}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$, je naším cieľom dokázať nerovnosti

$$1<\frac{|MQ|}{|P_2Q|}<1+\sqrt{2}. \tag{1}$$

Označme opäť $x=|LM|$ a r polomer kružnice p, takže $|KL|=r-x$ (obr. 1). Využijeme to, že trojuholník KQM je pravouhlý, preto pre jeho výšku LQ a odvesnu MQ podľa Euklidových viet platí $|LQ|=\sqrt{x(r-x)}$ a $|MQ|=\sqrt{rx}$. Aj trojuholník KLP_2 je pravouhlý, preto podľa Pytagorovej vety $|LP_2|=\sqrt{r^2-(r-x)^2}=\sqrt{x(2r-x)}$. Dostávame tak

$$\frac{|MQ|}{|P_2Q|}=\frac{|MQ|}{|LP_2|-|LQ|}=\frac{\sqrt{rx}}{\sqrt{x(2r-x)}-\sqrt{x(r-x)}}=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2r-x}-\sqrt{r-x}}=$$
$$=\frac{\sqrt{2r-x}+\sqrt{r-x}}{\sqrt{r}}.$$

Vďaka nerovnostiam $0<x<r$ pre čitateľ posledného zlomku platia odhady

$$\sqrt{2r-r}+\sqrt{r-r}<\sqrt{2r-x}+\sqrt{r-x}<\sqrt{2r}+\sqrt{r},$$

ktoré už bezprostredne vedú k nerovnostiam (1).

Poznámka. Nerovnosť $S_1:S_2>1$ vyplýva rovno z predpokladanej nerovnosti $|P_1Q|>|P_2Q|$, pretože potom zrejme platí $S_1>S_{LMP_1}=S_{LMP_2}>S_{MQP_2}=S_2$, lebo $|RQ|=|QM|$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za dôkaz nerovnosti $1<S_1:S_2$ a 4 body za dôkaz druhej nerovnosti $S_1:S_2<3+\sqrt{8}$. Riešenia s drobnými nedostatkami v dôkazoch (chýba potrebná zmienka o ekvivalencii nerovností; numerická chyba v závere dôkazu a pod.) hodnoťte 5 bodmi.

Hodnotenie neúplných riešení:

- ▷ 1 bod za vyjadrenie hodnoty $S_1:S_2$ pomocou dĺžok úsečiek – či už úvahou o rovnoľahlosti (prvé riešenie), na základe podobnosti trojuholníkov MP_1Q a P_2RQ (druhé riešenie) alebo inak (ak chýba zmienka o dôsledkoch podobnosti či rovnoľahlosti pre výpočet pomeru obsahov, body nedávajte);
- ▷ ďalší 1 bod za vyjadrenie pomeru $S_1:S_2$ ako funkcie jednej reálnej premennej;
- ▷ nanajvýš 2 body za riešenie, kde nie je preukázaná ani jedna zo zadaných nerovností.

---

3. *V závislosti od reálneho parametra k určte počet riešení sústavy rovníc*

$$x^2+kxy+y^2=z,$$
$$y^2+kyz+z^2=x,$$
$$z^2+kzx+x^2=y$$

v obore reálnych čísel. (*Patrik Bak*)

Riešenie. Danú sústavu vyriešime a vypíšeme všetky riešenia, aby sme niektoré riešenia nepočítali viackrát.

Najskôr zvážime možnosť $x = y = z$. V takom prípade sa sústava redukuje na jedinú rovnicu $(k+2)x^2 = x$. Riešením danej sústavy je trojica $(0,0,0)$ pre ľubovoľné k a navyše trojica $\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)$ v prípade $k \neq -2$.

Vráťme sa k danej sústave rovníc. Odčítaním druhej rovnice od prvej dostávame

$$(x^2 - z^2) + ky(x - z) = z - x,$$

čiže

$$(x - z)(x + z + ky + 1) = 0. \tag{1}$$

Podobne odčítaním tretej rovnice od druhej vyjde

$$(y - x)(y + x + kz + 1) = 0. \tag{2}$$

V prípade $x \neq y \neq z \neq x$ sa tak rovnice (1) a (2) redukujú na

$$\begin{aligned} x + z + ky + 1 &= 0, \\ y + x + kz + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Odčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme $(y - z)(k - 1) = 0$, takže musí byť $k = 1$ a $x + y + z = -1$. To však nemôže platiť, keďže pre $k = 1$ vychádza

$$z = x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geqq 0$$

a podobne $x \geqq 0$ a $y \geqq 0$, takže spolu $x + y + z \geqq 0$.

Zistili sme, že v každom riešení zadanej sústavy majú niektoré dve neznáme rovnakú hodnotu. Keďže sústava je cyklická, budeme ďalej predpokladať $x \neq y = z$, pretože prípad $x = y = z$ sme už vyriešili. Z rovnice (1) za týchto predpokladov vyplýva, že $x + y + ky + 1 = 0$, čiže $x = -(k+1)y - 1$, a pôvodná sústava sa tým redukuje na jedinú rovnicu

$$(k + 2)y^2 + (k + 1)y + 1 = 0. \tag{3}$$

Ešte dodajme, že riešením rovnice (3) nedostaneme žiadne z už nájdených riešení, pretože rovnosť $x = y$, čiže $y = -(k+1)y - 1$ je možná len pre $k \neq -2$ a dáva $x = y = z = -1/(k+2)$, čo medzi riešenia danej sústavy nepatrí.

Pre $k = -2$ je rovnica (3) lineárna s jediným riešením $y = 1$, pre ktoré dopočítame $x = 0$. Riešeniami danej sústavy sú tri permutácie trojice $(0, 1, 1)$.

Pre $k \neq -2$ je rovnica (3) kvadratická a má reálne riešenie práve vtedy, keď

$$D = (k + 1)^2 - 4(k + 2) = k^2 - 2k - 7 \geqq 0,$$

čiže práve vtedy, keď $k \notin (1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$, ako zistíme vyriešením výslednej kvadratickej nerovnice pre k. Riešenie je teda jediné pre $k = 1 \pm 2\sqrt{2}$, pričom

$$y_0 = -\frac{k+1}{2(k+2)} = 1 \mp \sqrt{2} \qquad \text{a} \qquad x_0 = \frac{(k+1)^2}{2(k+2)} - 1 = 1.$$

Riešením pôvodnej sústavy tak sú tri permutácie trojice (x_0, y_0, y_0).

Pre $k \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1-2\sqrt{2}) \cup (1+2\sqrt{2}, \infty)$ má kvadratická rovnica (3) dve rôzne riešenia

$$y_{1,2} = \frac{-k-1 \pm \sqrt{k^2-2k-7}}{2(k+2)},$$

pre ktoré dostaneme dve rôzne hodnoty $x_{1,2} = -(k+1)y_{1,2} - 1$. Riešením pôvodnej sústavy tak sú tri permutácie trojice (x_1, y_1, y_1) a tri permutácie trojice (x_2, y_2, y_2).

V záverečnej tabuľke uvádzame celkový počet riešení danej sústavy v závislosti od k:

interval pre k	$(0,0,0)$	$\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)$	rovnica (3)	celkom
$(-\infty, -2)$	1	1	6	8
-2	1	0	3	4
$(-2, 1-2\sqrt{2})$	1	1	6	8
$1-2\sqrt{2}$	1	1	3	5
$(1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$	1	1	0	2
$1+2\sqrt{2}$	1	1	3	5
$(1+2\sqrt{2}, \infty)$	1	1	6	8

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za vyriešenie prípadu $x = y = z$, 2 body za dôkaz neexistencie riešenia v prípade $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$ a 3 body za zvyšný prípad (z toho 1 bod za vyriešenie situácie $k = -2$). Za drobné nedostatky (nesprávne určené korene trojčlena $k^2 - 2k - 7$, nesprávne dopočítaná hodnota x z hodnoty y a pod.) strhnite dokopy iba 1 bod. Vypisovať všetky trojice riešiace danú sústavu nie je v úplnom riešení nevyhnutné, ak je v postupe zdôvodnené, že trojice zodpovedajúce riešeniam rovnice (3) nie sú tvorené tromi rovnakými číslami. Ak toto zdôvodnenie v inak úplnom riešení chýba, dajte 5 bodov. Ak jediná chyba pri určení počtu riešení je zabudnutie permutácií premenných, strhnite 1 bod.

Za uhádnutie riešenia (i keď overené skúškou) nedávajte žiadne body, ak nie je úplne vyriešený ani jeden zo spomenutých troch prípadov (vrátane zdôvodnenia, že iné riešenia už neexistujú). Postup, keď riešiteľ pre niektorú hodnotu k uhádne množinu riešení a dokáže, že viac riešení pre dané k neexistuje (napr. pomocou redukcie sústavy na polynomickú rovnicu pre jednu z neznámych): ak nie je ani naznačené, ako možno pomocou tohto postupu určiť, ako sa mení počet riešení sústavy v závislosti od k, dajte 1 bod; inak nanajvýš 6 bodov v závislosti na tom, koľko z podstatných intervalov pre k (pozri tabuľku v závere uvedeného riešenia) umožnil tento postup vyriešiť.

---

4. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s výškou AD. Osi uhlov BAD, CAD pretínajú stranu BC postupne v bodoch E, F. Kružnica opísaná trojuholníku AEF pretína strany AB, AC postupne v bodoch G, H. Dokážte, že priamky EH, FG a AD sa pretínajú v jednom bode.* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Označme K priesečník úsečiek FG a AE a L priesečník EH a AF (obr. 2). Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou AF (body A, G, E, F ležia v tomto poradí na kružnici opísanej trojuholníku AEF) vyplýva, že

$$|\measuredangle AGF| = |\measuredangle AEF| = 90^\circ - |\measuredangle DAE| = 90^\circ - |\measuredangle GAE|,$$

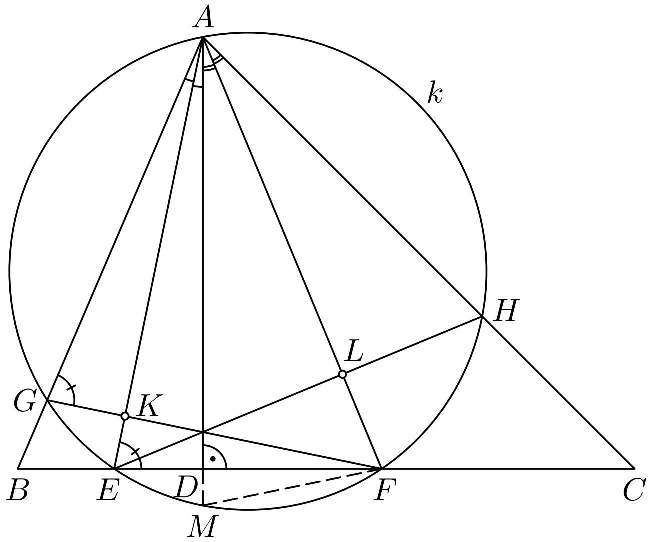
čiže

$$|\measuredangle AGF| + |\measuredangle GAE| = 90^\circ,$$

takže

$$|\measuredangle AKG| = 180^\circ - (|\measuredangle AGF| + |\measuredangle GAE|) = 90^\circ.$$

Úsečka FK je teda výškou trojuholníka AEF. Analogicky dokážeme, že aj EL je jeho výškou, a preto priesečník priamok FK a EL je ortocentrom trojuholníka AEF, ktorým prirodzene prechádza aj jeho tretia výška AD.



Obr. 2

Iné riešenie. Označme M ďalší priesečník polpriamky AD s kružnicou k opísanou trojuholníku AEF (obr. 2). Keďže AE je osou uhla GAM, sú zhodné obvodové uhly GAE a EAM v kružnici k, a preto sú zhodné aj jej tetivy GE a EM, a teda aj obvodové uhly GFE a EFM. Priesečník priamok FG a AM je teda obrazom bodu M v osovej súmernosti s osou EF. Rovnakú úvahu môžeme spraviť aj pre priesečník priamok EH a AM, preto musia byť oba priesečníky totožné.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Okrem postupu v prvom riešení možno využiť aj rovnosť obvodových uhlov nad tetivou GE a ukázať, že body A, K, D, F ležia na kružnici s priemerom AF. Za hypotézu (nezdôvodnené pozorovanie), že $FG \perp AE$ (resp. $EH \perp AF$), dávajte 2 body, ak riešiteľ zdôvodní, že to stačí na vyriešenie úlohy (napr. úvahou o priesečníku výšok trojuholníka AEF), inak iba 1 bod. Riešiteľovi, ktorý pracuje s bodom M z druhého riešenia a zdôvodní, že E je stred oblúka GM (alebo že F je stredom oblúka HM), nedostane sa však ďalej, dajte 2 body (samotné zavedenie bodu M nebodujte).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Patrik Bak, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017