2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b väčších ako 1 tak, aby ich súčet aj súčin boli mocniny prvočísel.* (Ján Mazák)

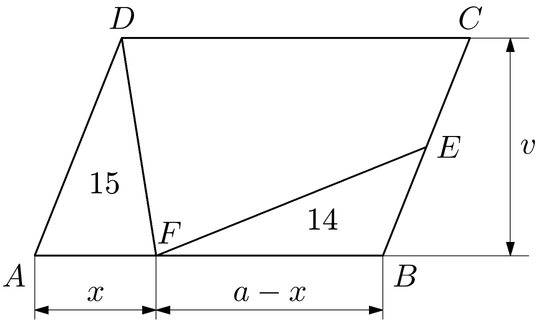
Riešenie. Z podmienky pre súčin vyplýva, že a aj b sú mocninami toho istého prvočísla p: $a = p^r$, $b = p^s$, pričom r, s sú celé kladné čísla. Keby bolo p nepárne, bol by súčet $a + b$ deliteľný okrem čísla p aj číslom 2, takže by nebol mocninou prvočísla. Ak $p = 2$ a $r < s$, je súčet $a + b = 2^r(1 + 2^{s-r})$ opäť číslo párne deliteľné nepárnym číslom väčším ako 1, nie je teda mocninou prvočísla. K rovnakému záveru dôjdeme aj v prípade, keď $r > s$. Ostáva preto jediná možnosť: $a = b = 2^r$, pričom r je celé kladné číslo. Skúška $a+b = 2^r+2^r = 2^{r+1}$ a $ab = 2^{2r}$ potvrdzuje, že riešením sú všetky dvojice $(a, b) = (2^r, 2^r)$, kde r je celé kladné číslo.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za zistenie, že a, b sú mocniny jedného prvočísla, dajte 1 bod, ďalší bod za zdôvodnenie, že $p = 2$. Ďalej potom 2 body za dôkaz $r = s$ (vzhľadom na symetriu možno priamo predpokladať $r \leqq s$) a 1 bod za skúšku.

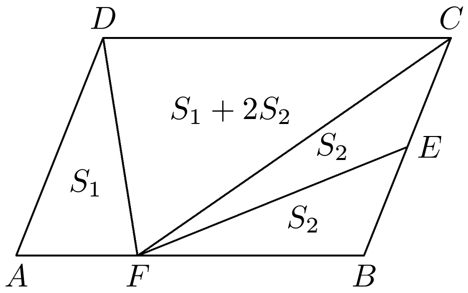
---

2. *V danom rovnobežníku $ABCD$ je bod E stred strany BC a bod F leží vnútri strany AB. Obsah trojuholníka AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojuholníka FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah štvoruholníka $FECD$.* (Peter Novotný)

Riešenie. Označme v vzdialenosť bodu C od priamky AB, $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pre obsahy trojuholníkov AFD a FBE (obr. 1) platí $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $\frac{1}{2}(a - x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtiaľ $xv = 30$, $av - xv = 56$. Sčítaním oboch rovností nájdeme obsah rovnobežníka $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86\,\mathrm{cm}^2$. Obsah štvoruholníka $FECD$ je teda $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57\,\mathrm{cm}^2$.



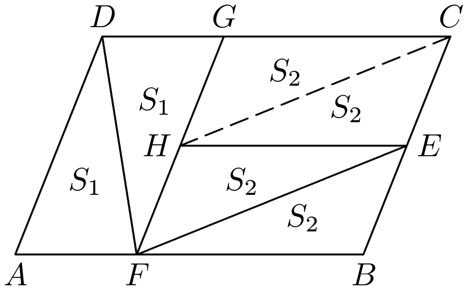
Obr. 1



Obr. 2

Iné riešenie. Trojuholníky BEF a ECF majú spoločnú výšku z vrcholu F a zhodné základne BE a EC. Preto sú obsahy oboch trojuholníkov rovnaké. Z obr. 2 vidíme, že obsah trojuholníka CDF je polovicou obsahu rovnobežníka $ABCD$ (oba útvary majú spoločnú základňu CD a rovnakú výšku). Druhú polovicu tvorí súčet obsahov trojuholníkov AFD a BCF. Odtiaľ $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Do rovnobežníka dokreslíme úsečky FG a EH rovnobežné so stranami BC a AB tak, ako znázorňuje obr. 3. Rovnobežníky $AFGD$ a $FBEH$ sú svojimi



Obr. 3

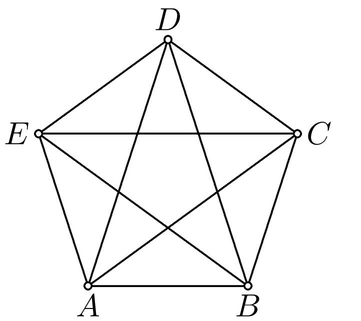
uhlopriečkami DF a EF rozdelené na dvojice zhodných trojuholníkov. Takže $S_{GDF} = S_{AFD} = 15\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14\,\mathrm{cm}^2$. Zo zhodnosti rovnobežníkov $HECG$ a $FBEH$ navyše ľahko nahliadneme, že všetky štyri trojuholníky FBE, EHF, HEC a CGH sú zhodné, takže obsah štvoruholníka $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za každú číselnú chybu alebo nepodstatnú chybu pri zdôvodňovaní výpočtu niektorého obsahu strhnite bod, za hrubú chybu pri zdôvodnení strhnite dva body. Ak je úloha nedoriešená, dajte dva body za každú správne vypočítanú časť obsahu štvoruholníka $FECD$.

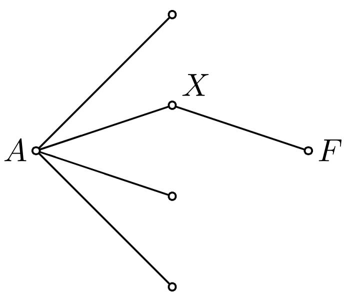
---

3. *V skupine šiestich ľudí existuje práve 11 dvojíc známych. Vzťah „poznať sa“ je vzájomný, t. j. ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A. Keď sa ktokoľvek zo skupiny dozvie nejakú správu, povie ju všetkým svojim známym. Dokážte, že sa týmto spôsobom nakoniec správu dozvedia všetci.* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Jednotlivé osoby označíme písmenami A, B, C, D, E a F. Aspoň jedna z nich (označme ju A) má aspoň štyroch známych (ak by mala každá osoba najviac troch známych, bolo by dvojíc známych menej ako desať). Keby mala dokonca päť známych, dozvie sa správu od každého v skupine a môže ju komukoľvek v skupine povedať.



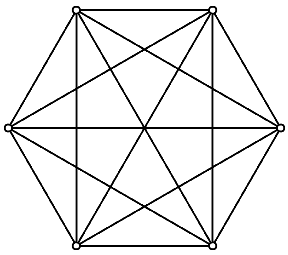
Obr. 4



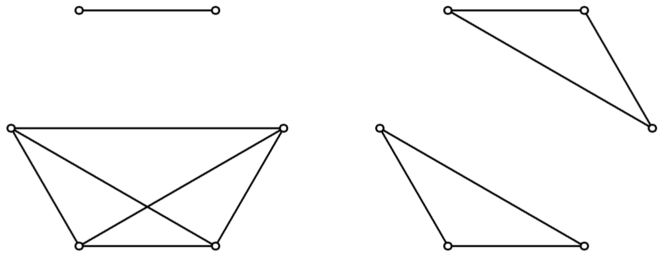
Obr. 5

Ak má osoba A práve štyroch známych, napríklad osoby B, C, D a E, existuje v skupine osôb A, B, C, D, E najviac 10 známostí (obr. 4, dvojice známych znázorňujú úsečky), a tak sa osoba F musí poznať s niektorou osobou $X \in \{B, C, D, E\}$. Možnosť šírenia správy od ľubovoľnej osoby ku ktorejkoľvek inej ľahko overíme podľa obr. 5.

Iné riešenie. Znázornenie ktorejkoľvek množiny práve jedenástich dvojíc známych v skupine šiestich osôb dostaneme odstránením štyroch z pätnástich hrán úplného grafu (obr. 6, v ňom z každého uzla vychádza práve päť hrán). Po odstránení iba štyroch hrán z grafu na obr. 6 musí teda z každého vrcholu vychádzať aspoň jedna hrana. V skupine teda neexistuje človek, ktorý by nikoho nepoznal. Aby sa preto správa nemohla od niektorej z osôb rozšíriť ku všetkým ostatným, musela by v príslušnom grafe existovať buď aspoň jedna oddelená dvojica, alebo dve oddelené trojice, v ktorých sa osoby môžu poznať navzájom. V žiadnej z týchto situácií však počet dvojíc známych neprevyšuje sedem, ako vidíme z obr. 7. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.



Obr. 6



Obr. 7

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za dôkaz tvrdenia, že niektorá osoba má aspoň štyroch známych, a 1 bod za vysvetlenie, že neexistuje osoba, ktorá by nemala známeho.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.