66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z5

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov. Inými slovami, napr. nepíšte pri žiakovi, že skončil na 2. mieste, ak pred ním skončili traja žiaci s plným počtom bodov a on má o jeden bod menej – v takom prípade mu patrí 4. miesto.

---

1. *Otec hral so strýkom šachy. Za vyhranú partiu dostal víťaz od súpera 8 eur, za remízu nikto nič. Strýko vyhral štyrikrát, remíz bolo päť a otec nakoniec získal 24 eur. Koľko partií otec so strýkom zohrali?* (Marta Volfová)

Riešenie. Otec štyrikrát prehral, takže musel strýkovi zaplatiť $4 \cdot 8 = 32$ eur.

Otec však vyhral toľkokrát, že aj po zaplatení týchto 32 eur získal 24 eur. Jeho celková výhra bola $32 + 24 = 56$ eur, vyhral teda $56 : 8 = 7$ partií.

Otec sedemkrát vyhral, štyrikrát prehral a päťkrát remizoval, so strýkom teda zohral $7 + 4 + 5 = 16$ partií.

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie otcovej celkovej výhry; 2 body za počet otcových vyhraných partií; 2 body za počet všetkých zohraných partií.

---

2. *Veverička Hryzka ujedala oriešky zo svojich zásob nasledujúcim spôsobom:*

- *v diétny deň zjedla jeden oriešok,*
- *v normálny deň zjedla o dva oriešky viac ako v diétny deň.*

Istých 19 po sebe idúcich dní sa striedali dni diétne s dňami normálnymi. Zistite, koľko najviac a koľko najmenej orieškov mohla Hryzka počas týchto 19 dní zjesť. (Erika Novotná)

Riešenie. Veverička zjedla v diétny deň jeden oriešok, v normálny deň teda zjedla tri oriešky. Oba typy dní sa pravidelne striedali, preto sa typ dňa, ktorým 19-denné obdobie začínalo, opakoval celkom 10-krát, druhý typ sa opakoval 9-krát.

Keďže nevieme, či sledované obdobie začínalo diétnym, alebo normálnym dňom, musíme uvážiť obe možnosti:

a) ak sa začínalo diétnym dňom, zjedla veverička $10 \cdot 1 + 9 \cdot 3 = 37$ orieškov,
b) ak sa začínalo normálnym dňom, zjedla veverička $10 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 39$ orieškov.

Veverička zjedla najmenej 37 a najviac 39 orieškov.

Návrh hodnotenia. 1 bod za počet orieškov zjedených v normálny deň; po 2 bodoch za celkový počet zjedených orieškov pri každej z možností; 1 bod za záver.

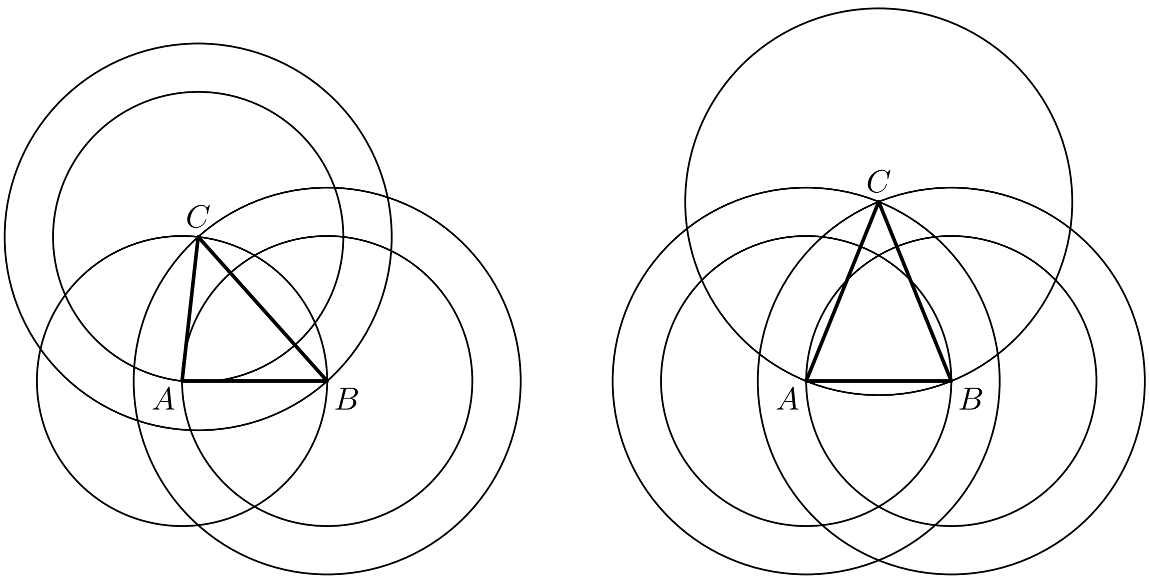
3. *Ema chce zostrojiť trojuholník ABC so stranami $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 4\,\mathrm{cm}$. Ďalej chce zostrojiť všetky kružnice, z ktorých každá bude mať stred v niektorom z vrcholov trojuholníka a bude prechádzať niektorým jeho iným vrcholom. Aká dlhá musí byť strana AC, aby takých kružníc bolo práve päť?* (Veronika Hucíková)

Riešenie. Keby strany AB a AC boli rovnako dlhé, kružnica so stredom v bode A prechádzajúca bodom B by prechádzala aj bodom C. V takom prípade by Ema zostrojila jedinú kružnicu so stredom v bode A.

Keby strany AB a AC boli rôzne dlhé, kružnica so stredom v bode A prechádzajúca jedným z bodov B a C by neprechádzala tým druhým. V takom prípade by Ema zostrojila dve kružnice so stredom v bode A.

Obdobné prípady môžu nastať aj pre kružnice so stredom v bode C. Kružnice so stredom v bode B budú určite dve, keďže zo zadania vieme, že strany BA a BC sú rôzne dlhé.

Ak by strany trojuholníka ABC boli navzájom rôzne, tak by Ema zostrojila $2 + 2 + 2 = 6$ kružníc. Ak by strana AC bola zhodná s jednou zo zvyšných dvoch strán, tak by Ema zostrojila $1 + 2 + 2 = 5$ kružníc. Strana AC preto musí byť dlhá buď 3 cm, alebo 4 cm.



Návrh hodnotenia. Po 1 bode za každú z dvoch vyhovujúcich možností; 3 body za zdôvodnenie správneho počtu kružníc; 1 bod za vysvetlenie, že iné možnosti nie sú.

Zdôvodnenie správneho počtu kružníc iba pri jednej z dvoch vyhovujúcich možností považujte za postačujúce.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017