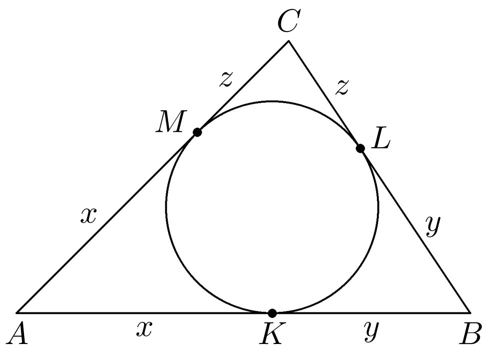
2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *Trojuholník ABC spĺňa pri zvyčajnom označení dĺžok strán podmienku $a \leqq b \leqq c$. Vpísaná kružnica sa dotýka strán AB, BC a AC postupne v bodoch K, L a M. Dokážte, že z úsečiek AK, BL a CM možno zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď platí $b + c < 3a$.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Označme $x = |AK| = |AM|$, $y = |BL| = |BK|$, $z = |CM| = |CL|$ (obr. 1) zhodné úseky dotyčníc z jednotlivých vrcholov trojuholníka ku vpísanej kružnici. Zrejme



Obr. 1

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \tag{1}$$

Z uvedených rovností vidíme, že daná podmienka

$$b + c < 3a \tag{2}$$

je ekvivalentná nerovnosti

$$x < y + z, \tag{3}$$

čo je nutná podmienka existencie trojuholníka so stranami dĺžok x, y a z.

Dosadením z (1) do podmienok $b \leqq c$ a $a \leqq b$ zistíme, že $z \leqq y$ a $y \leqq x$. To znamená, že ďalšie dve trojuholníkové nerovnosti $y < z + x$ a $z < x + y$ sú automaticky splnené, takže nerovnosť (3), a tým aj (2) je podmienkou postačujúcou. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za nájdenie rovností (1), 2 body za zistenie ekvivalencie vzťahov (2) a (3) a 3 body za dôkaz, že podmienka (3) je nielen nutná, ale aj postačujúca.

2. *Klárka urobila chybu pri písomnom násobení dvoch dvojciferných čísel, a tak jej vyšlo číslo o* 400 *menšie, ako bol správny výsledok. Pre kontrolu vydelila číslo, ktoré dostala, menším z násobených čísel. Tentoraz počítala správne a vyšiel jej neúplný podiel* 67 *a zvyšok* 56*. Ktoré čísla Klárka násobila?* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme x menšie a y väčšie z násobených čísel. Podľa zadania platí $xy - 400 = 67x + 56$, čiže

$$x(y - 67) = 456. \tag{1}$$

Číslo x je teda dvojciferný deliteľ čísla $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$. Zo zadania navyše vyplýva, že číslo x je väčšie ako príslušný zvyšok 56. Najmenšie také x je $x = 3 \cdot 19 = 57$. Pre každý ďalší taký deliteľ platí $x \geqq 4 \cdot 19 = 76$ a $y - 67 \leqq 2 \cdot 3 = 6$, takže $y \leqq 73 < x$, čo odporuje zvolenému označeniu $x < y$. Teda $x = 57$ a $y = 75$. Ľahko overíme, že tieto čísla vyhovujú zadaniu úlohy.

Záver. Klárka násobila čísla 57 a 75.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Také je samozrejme aj riešenie, v ktorom žiak preverí všetkých 16 deliteľov čísla 456 v (1). Za nájdenie rovnice (1) či iného ekvivalentného vzťahu dajte 3 body, 2 body za analýzu ich riešení a 1 bod za skúšku, t. j. overenie, že dvojica $(x, y) = (57, 75)$ spĺňa všetky podmienky úlohy. Iba za uhádnutie hľadaných čísel (bez zostavovania rovnice) dajte celkom 2 body.

3. *Dokážte, že pokiaľ v skupine šiestich osôb existuje aspoň desať dvojíc známych, tak v nej možno nájsť tri osoby, ktoré sa poznajú navzájom. Vzťah „poznať sa" je vzájomný, t. j. ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A. Ukážte, že taká trojica existovať nemusí, ak v skupine šiestich osôb je menej ako desať dvojíc známych.*

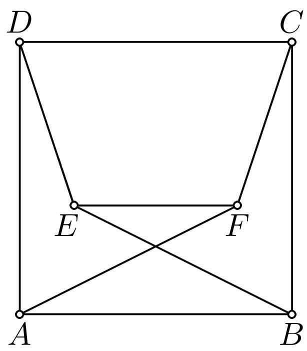
(*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Nazvime A osobu (prípadne jednu z osôb), ktorá má v danej skupine najviac známych, a tento počet známych označme n. Zrejme $n \leqq 5$.

Ak $n = 5$, existuje medzi zostávajúcimi osobami aspoň päť ďalších dvojíc známych. Ktorákoľvek z týchto dvojíc potom tvorí s osobou A trojicu známych.

Ak $n = 4$, existuje osoba B, ktorá sa s A nepozná, a tá má tiež najviac štyroch známych. Preto sa medzi známymi osoby A vyskytujú aspoň dve dvojice známych. Osoba A s jednou z týchto dvojíc tvorí opäť trojicu známych.

Situácia $n \leqq 3$ nemôže nastať, pretože celkový počet dvojíc známych v skupine by vtedy bol nanajvýš $\frac{1}{2} \cdot 6n \leqq 9$.



Obr. 2

Príklad skupiny šiestich osôb s deviatimi dvojicami, ale s žiadnou trojicou známych, je znázornený grafom na obr. 2. V ňom body A, B, C, D, E a F predstavujú jednotlivé osoby a dvojice známych sú vyznačené úsečkami. Pritom žiadne tri z úsečiek netvoria trojuholník. Pokiaľ je v skupine menej ako deväť dvojíc známych, zostrojíme vhodný príklad odstránením príslušného počtu úsečiek z obr. 2 (pritom určite žiadny trojuholník nevznikne).

Iné riešenie. Ak je v šestici osôb aspoň 10 dvojíc známych, je v nej najviac 5 dvojíc neznámych, lebo všetkých dvojíc je práve 15. Budeme preto naopak predpokladať, že v každej trojici sa nájde dvojica neznámych, a dokážeme, že v celej šestici je takých dvojíc aspoň 6. Pri uvedenom predpoklade môžeme označenie osôb zvoliť tak, aby v trojiciach ABC a DEF boli dvojice neznámych AB a DE. Potom ďalšie štyri rôzne dvojice neznámych nájdeme (po jednej) v trojiciach ACD, AEF, BCE, BDF (presvedčte sa, že každá dvojica sa vyskytuje najviac v jednej z uvedených štyroch trojíc a žiadna z týchto trojíc neobsahuje ani dvojicu AB, ani dvojicu DE).

Príklad pre menší počet dvojíc známych zostrojíme rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za dôkaz existencie trojice známych pre aspoň 10 dvojíc známych dajte 3 body. Ďalšie 3 body dajte, ak riešiteľ nájde pre 9 dvojíc známych príklad, v ktorom nie je trojica známych, a ukáže, ako postupovať pre menší počet dvojíc známych. Ak uvedie iba príklad pre 9 dvojíc známych, strhnite 1 bod. Ak uvedie iba príklady pre niektoré počty dvojíc menšie ako 9, strhnite 2 body.

---

4. *Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí*

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Rovnicu prepíšeme na tvar

$$x - y = (z - y)\sqrt{3} + (x - z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduchej úprave dostaneme

$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2(x - z)(z - y)\sqrt{21}. \qquad (1)$$

Pre $x \neq z$ a $y \neq z$ nemôže rovnosť (1) platiť, pretože jej pravá strana je v takom prípade číslo iracionálne, zatiaľ čo ľavá strana je číslo celé. Rovnosť teda môže nastať, len keď $x = z$ alebo $y = z$.

V prvom prípade po dosadení $x = z$ do pôvodnej rovnice dostaneme $z - y = \sqrt{3}(z - y)$. Odtiaľ $z = y = x$.

V druhom prípade, keď $y = z$, dôjdeme analogicky k rovnakému výsledku.

Záver. Riešením danej rovnice sú všetky trojice $(x, y, z) = (k, k, k)$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za uhádnutie koreňov $x = y = z \in \mathbb{Z}$ a 5 bodov za správny dôkaz, že iné riešenia rovnica nemá.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.