2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu*

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

keď viete, že má štyri rôzne reálne korene, pričom súčet dvoch z nich sa rovná číslu 1.
(Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme hľadané korene x_1, x_2, x_3, x_4 tak, aby platilo $x_1 + x_2 = 1$. Potom

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Porovnaním koeficientov pri zodpovedajúcich mocninách x dostaneme známe Viètove vzťahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -\frac{7}{4}, \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{7}{2}. \tag{4}$$

Keďže $x_1 + x_2 = 1$, z (1) vyplýva $x_3 + x_4 = 2$. Rovnice (2) a (3) prepíšeme na tvar

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{7}{4},$$
$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2},$$

čo po dosadení hodnôt $x_1 + x_2 = 1$ a $x_3 + x_4 = 2$ dáva

$$x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{15}{4},$$
$$2x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{11}{2}.$$

Z tejto sústavy dvoch lineárnych rovníc už ľahko dostaneme

$$x_1x_2 = -\frac{7}{4}, \qquad x_3x_4 = -2.$$

Všimnime si, že pre tieto hodnoty súčinov x_1x_2 a x_3x_4 je splnená aj rovnica (4), ktorú sme zatiaľ nevyužili. Z podmienok $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -\frac{7}{4}$ vyplýva, že x_1 a x_2 sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - x - \frac{7}{4} = 0, \qquad \text{teda} \quad x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}.$$

Podobne z podmienok $x_3 + x_4 = 2$ a $x_3 x_4 = -2$ dostaneme

$$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Skúšku nájdených koreňov netreba robiť, pretože je splnená, ako sme zdôraznili, celá sústava rovníc (1) až (4).

Záver. Daná rovnica má korene $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$.

Iné riešenie. Z podmienok úlohy vyplýva, že ľavá strana rovnice je súčinom mnohočlenov

$$x^2 - x + p \qquad \text{a} \qquad 4x^2 + qx + r,$$

pričom p, q a r sú reálne čísla. Po ich vynásobení a porovnaní koeficientov pri zodpovedajúcich mocninách x dostaneme sústavu štyroch rovníc o troch neznámych

$$\begin{aligned} r - 4 &= -12, \\ 4p + q - r &= -7, \\ pr - q &= 22, \\ pq &= 14. \end{aligned}$$

Prvé tri rovnice majú jediné riešenie $r = -8$, $p = -\frac{7}{4}$ a $q = -8$, ktoré vyhovuje aj štvrtej rovnici. Platí teda rozklad

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = \left(x^2 - x - \tfrac{7}{4}\right)\left(4x^2 - 8x - 8\right).$$

Rovnica $x^2 - x - \frac{7}{4} = 0$ má korene $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$, rovnica $4x^2 - 8x - 8 = 0$ má korene $1 \pm \sqrt{3}$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Uvažujme rovnicu

$$x^5 - 9x^4 + kx^3 - 3x^2 - \tfrac{92}{3}x + 20 = 0,$$

pričom k je reálny parameter. Určte všetky jej korene a hodnotu parametra k, ak viete, že táto rovnica má aspoň dva reálne korene, ktoré sa líšia iba znamienkom. [Využite Vièteove vzťahy, korene sú $\pm 2\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 3, 5$, $k = \frac{65}{3}$.]

N2. Nech P, Q sú také kvadratické mnohočleny, že čísla -22, 7, 13 sú tri z koreňov rovnice $P(Q(x)) = 0$. Určte štvrtý koreň tejto rovnice. [49–A–I–1]

N3. Nech P je kvadratický trojčlen. Určte všetky korene rovnice

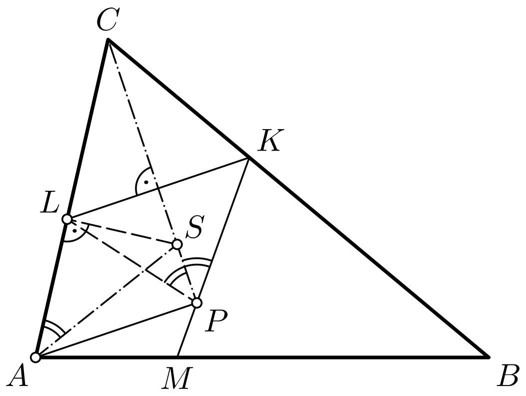
$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$

ak viete, že medzi nimi je číslo 1 a aspoň jeden koreň je dvojnásobný. [49–A–II–1]

---

2. *Kružnica vpísaná do daného trojuholníka ABC sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch K, L, M. Označme P priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s priamkou MK. Dokážte, že priamky AP a LK sú rovnobežné.* (Peter Novotný)

Riešenie. Označme k kružnicu vpísanú do trojuholníka ABC a S jej stred. Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC označme zvyčajným spôsobom α, β, γ. Keďže body K, L sú súmerne združené podľa osi vnútorného uhla pri vrchole C, sú priamky KL a CP na seba kolmé a $|\measuredangle LPC| = |\measuredangle KPC|$ (obr. 1).



Obr. 1

Keď vyjadríme veľkosti vnútorných uhlov pri základniach KM a LK v rovnoramenných trojuholníkoch KMB a LKC, dostaneme $|\measuredangle MKB| = 90° - \beta/2$, $|\measuredangle LKC| = 90° - \gamma/2$. Z priamosti uhla BKC tak vyplýva $|\measuredangle MKL| = 90° - \alpha/2$. Analogicky vyjde $|\measuredangle KLM| = 90° - \beta/2$, $|\measuredangle LMK| = 90° - \gamma/2$.

Keďže $|\measuredangle KPC| + \gamma/2 = |\measuredangle BKP| = 90° - \beta/2$, dostaneme pre veľkosť súmerne združených uhlov LPC a KPC rovnosť

$$|\measuredangle LPC| = |\measuredangle KPC| = 90° - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Kružnica k vpísaná do trojuholníka ABC je súčasne kružnicou opísanou trojuholníku KLM, ktorý je – ako sme zistili výpočtom jeho uhlov – ostrouhlý. Jej stred S je preto vnútorným bodom tohto trojuholníka, a teda aj vnútorným bodom úsečky CP. Keďže

$$|\measuredangle LPC| = |\measuredangle LPS| = |\measuredangle LAS| = \frac{\alpha}{2},$$

$APSL$ je tetivový štvoruholník. Vzhľadom na to, že uhol ALS je pravý, je aj uhol APS pravý (priamky AP a CP sú na seba kolmé). Preto sú priamky KL a AP rovnobežné, čo bolo treba dokázať.

Poznámka. Keďže kružnica k je opísaná trojuholníku KLM, môžeme jeho vnútorné uhly ľahko vyjadriť z príslušných stredových uhlov: $|\measuredangle KSL| = 180° - \gamma$, takže $|\measuredangle KML| = 90° - \gamma/2$, atď.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V rovine je daný štvorec $ABCD$. Vnútri jeho strán BC, CD sú postupne zvolené body P, Q také, že $|\measuredangle PAQ| = 45°$. Označme ďalej R, S priesečníky jeho uhlopriečky BD postupne s priamkami AP, AQ. Dokážte, že body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici. [Ukážte, že uhly PSQ a PRQ sú pravé.]

N2. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad priemerom AD a k_2 kružnicu prechádzajúcu vrcholmi B, C a dotýkajúcu sa priamky AB. Ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, je priamka BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. Dokážte. [52–B–II–4]

N3. Nech L je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme K priesečník priamok AL a CD, M priesečník priamok AD a CL a napokon N priesečník priamok MK a BC. Dokážte, že body B, L, M, N ležia na jednej kružnici. [53–A–III–5]

3. *Ak x, y, z sú reálne čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ spĺňajúce podmienku $xy+yz+zx=1$, tak platí*

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leqq 1+(x+y+z)^2.$$

Dokážte a zistite, kedy nastáva rovnosť. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Pre ľubovoľné reálne čísla $x, y, z \in \langle -1, 1\rangle$ platí $1-x^2 \geqq 0$, $1-y^2 \geqq 0$, $1-z^2 \geqq 0$. Použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre trojicu nezáporných reálnych čísel $1-x^2$, $1-y^2$, $1-z^2$ tak dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} &\leqq \frac{(1-x^2)+(1-y^2)+(1-z^2)}{3} = \\ &= \frac{3-(x^2+y^2+z^2)}{3},\end{aligned}$$

takže

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leqq 6-2(x^2+y^2+z^2). \tag{1}$$

Ak reálne čísla $x, y, z \in \langle -1, 1\rangle$ vyhovujú podmienke $xy+yz+zx=1$, ukážeme, že spĺňajú aj nerovnosť

$$6-2(x^2+y^2+z^2) \leqq 1+(x+y+z)^2. \tag{2}$$

Pravú stranu tejto nerovnosti upravíme na tvar

$$1+x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 3+(x^2+y^2+z^2),$$

čo po dosadení do (2) vedie k ekvivalentnej nerovnosti

$$x^2+y^2+z^2 \geqq 1.$$

Jej platnosť overíme ľahko. Stačí totiž dokázať, že pre reálne čísla x, y, z, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, platí nerovnosť

$$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx,$$

čo je však ekvivalentné s nerovnosťou

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0,$$

ktorá platí pre všetky reálne čísla x, y, z.

Záver. Nerovnosť, ktorú sme mali dokázať, vyplýva z dokázaných nerovností (1) a (2). Rovnosť v nej pritom nastane práve vtedy, keď nastane súčasne v oboch spomenutých nerovnostiach. To nastane práve vtedy, keď $x=y=z$, čo vzhľadom na podmienku $xy+yz+zx=1$ dáva iba dve možnosti $x=y=z=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$, pre ktoré v dokázanej nerovnosti platí rovnosť.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí nerovnosť

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geqq (a + b + c)^2.$$

Dokážte a zistite, kedy nastane rovnosť. [Upravte danú nerovnosť tak, aby na jednej strane bol súčet troch druhých mocnín reálnych čísel a na druhej strane nula.]

N2. Dokážte, že pre ľubovoľné tri nezáporné čísla x, y, z platí nerovnosť

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{zx}) + z(z - \sqrt{xy}) \geqq 0.$$

Zistite, v ktorých prípadoch nastane rovnosť. [17–A–II–2]

N3. Dokážte, že pre ľubovoľné tri nezáporné čísla x, y, z platí nerovnosť

$$(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)(z^2 + z + 1) \geqq 27xyz.$$

[Pre každý z činiteľov na ľavej strane nerovnosti použite nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice nezáporných čísel.]

N4. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$1 \leqq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq 9.$$

[55–B–II–4]

---

4. *Určte, pre ktoré prirodzené čísla n sa množina $\mathsf{M} = \{1, 2, \dots, n\}$ dá rozdeliť*

a) na dve,

b) na tri

navzájom disjunktné podmnožiny s rovnakým počtom prvkov tak, aby každá z nich obsahovala aj aritmetický priemer všetkých svojich prvkov. (*Peter Novotný*)

Riešenie. a) Označme A a B hľadané podmnožiny. Keďže obe majú rovnaký počet prvkov, je počet prvkov množiny M nutne párny. Teda $n = 2k$, pričom k je vhodné prirodzené číslo.

Pre $n = 4$ neexistuje rozklad množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ na dve podmnožiny daných vlastností, pretože aritmetický priemer ľubovoľných dvoch rôznych čísel z množiny M sa nemôže rovnať žiadnemu z týchto čísel. Zostrojme vyhovujúci rozklad množiny M pre niekoľko prvých párnych čísel n (aritmetický priemer prvkov podmnožín vyznačíme tučne).

$n = 2$:	$\mathsf{A} = \{\mathbf{1}\}$	$\mathsf{B} = \{\mathbf{2}\}$
$n = 4$:	rozklad neexistuje	
$n = 6$:	$\mathsf{A} = \{1, \mathbf{2}, 3\}$	$\mathsf{B} = \{4, \mathbf{5}, 6\}$
$n = 8$:	$\mathsf{A} = \{2, 3, \mathbf{4}, 7\}$	$\mathsf{B} = \{1, \mathbf{5}, 6, 8\}$
$n = 10$:	$\mathsf{A} = \{1, 2, \mathbf{3}, 4, 5\}$	$\mathsf{B} = \{6, 7, \mathbf{8}, 9, 10\}$
$n = 12$:	$\mathsf{A} = \{1, 2, 3, \mathbf{4}, 6, 8\}$	$\mathsf{B} = \{5, 7, \mathbf{9}, 10, 11, 12\}$

Teraz ukážeme, že hľadaný rozklad množiny M existuje pre ľubovoľné $n = 2k$ také, že $k \neq 2$.

Pre nepárne čísla k vyhovuje napríklad rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \dots, k\}, \qquad \mathsf{B} = \{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}.$$

Súčet všetkých prvkov množiny A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}(k+1)$, čo je prirodzené číslo. Keďže $1 \leqq \frac{1}{2}(k+1) \leqq k$, aritmetický priemer všetkých prvkov množiny A je prvkom množiny A. Podobne aritmetický priemer $\frac{1}{2}(3k+1)$ všetkých prvkov množiny B je prvkom množiny B.

Pre $k=4$ sme existenciu rozkladu ukázali v tabuľke, pre párne čísla $k \geqq 6$ vyhovuje napríklad rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \dots, k-2, k, \tfrac{1}{2}(3k-2)\}, \qquad \mathsf{B} = \mathsf{M} \setminus \mathsf{A}.$$

Platí $k < \frac{1}{2}(3k-2) \leqq 2k$ a $\frac{1}{2}(3k-2)$ je prirodzené číslo. Množina A teda obsahuje k prirodzených čísel z množiny M. Súčet všetkých prvkov množiny A je

$$1 + 2 + \ldots + (k-2) + k + \tfrac{1}{2}(3k-2) = \tfrac{1}{2}(k-2)(k-1) + k + \tfrac{1}{2}(3k-2)\tfrac{1}{2}k(k+2).$$

Ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}(k+2)$, čo je prirodzené číslo. Keďže $1 \leqq \frac{1}{2}(k+2) \leqq k - {}$ $- 2$, aritmetický priemer všetkých prvkov množiny A je prvkom množiny A. Podobne ukážeme, že aritmetický priemer $\frac{3}{2}k$ všetkých prvkov množiny B je prvkom množiny B.

Poznámka. Pre párne k nevyhovuje napríklad rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \dots, k-1, \tfrac{3}{2}k\}, \qquad \mathsf{B} = \mathsf{M} \setminus \mathsf{A},$$

pretože priemer $\frac{3}{2}k$ všetkých prvkov množiny B je prvkom množiny A.

b) Označme A, B a C hľadané podmnožiny množiny M. Keďže všetky majú rovnaký počet prvkov, je číslo n nutne deliteľné tromi, má teda tvar $n = 3k$, pričom k je vhodné prirodzené číslo. Pre súčet s všetkých prvkov množiny M platí $s = \frac{1}{2}3k(3k+1)$. Súčet troch aritmetických priemerov všetkých prvkov jednotlivých množín A, B a C je potom rovný s/k, teda $\frac{3}{2}(3k+1)$. Tento súčet musí byť podľa podmienok úlohy prirodzené číslo, preto je k nutne nepárne.

Pre čísla $n = 3k$, pričom k je nepárne, ukážeme, že zadaniu vyhovuje napríklad rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \dots, k\}, \quad \mathsf{B} = \{k+1, k+2, \dots, 2k\} \quad \text{a} \quad \mathsf{C} = \{2k+1, 2k+2, \dots, 3k\}.$$

Súčet všetkých prvkov A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}(k+1)$, čo je prirodzené číslo. Keďže $1 \leqq \frac{1}{2}(k+1) \leqq k$, aritmetický priemer všetkých prvkov množiny A je prvkom množiny A. Podobne ukážeme, že aritmetický priemer $\frac{1}{2}(3k+1)$ všetkých prvkov množiny B je prvkom množiny B a aritmetický priemer $\frac{1}{2}(5k+1)$ všetkých prvkov množiny C je prvkom množiny C.

Záver. Podmienkam úlohy v prípade a) vyhovujú všetky párne čísla n rôzne od 4, v prípade b) všetky nepárne čísla n deliteľné tromi.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Na stole leží k kôpok s $1, 2, 3, \dots, k$ kameňmi, pričom $k \geqq 3$. V každom kroku vyberieme tri ľubovoľné kôpky na stole, zlúčime ich do jednej a pridáme k nej jeden kameň, ktorý na stole doposiaľ neležal. Ak po niekoľkých krokoch vznikne jediná kôpka, nie je výsledný počet kameňov deliteľný tromi. Dokážte. [54–B–I–3]

N2. Na stole leží 54 kôpok s $1, 2, 3, \dots, 54$ kameňmi. V každom kroku vyberieme ľubovoľnú kôpku, povedzme s k kameňmi, a odoberieme ju celú zo stola spolu s k kameňmi z každej tej kôpky, v ktorej je aspoň k kameňov. Napríklad po prvom kroku, pri ktorom vyberieme kôpku s 52 kameňmi, zostanú na stole kôpky s $1, 2, 3, \dots , 51, 1$ a 2 kameňmi. Predpokladajme, že po určitom počte krokov zostane na stole jediná kôpka. Zdôvodnite, koľko kameňov v nej môže byť. [54–B–S–1]

N3. Rozhodnite, či je možné rozložiť množinu čísel $\{1, 2, \dots , 1995\}$ na dve podmnožiny tak, aby v prvej podmnožine bolo a) dvakrát, b) trikrát, c) štyrikrát viac čísel ako v druhej a aby súčty čísel v oboch podmnožinách boli rovnaké. [45–C–I–2]

N4. Určte, pre ktoré prirodzené čísla n je možné rozdeliť množinu $\{1, 2, \dots , n\}$ na dve podmnožiny tak, aby v prvej bolo trikrát viac čísel ako v druhej a aby súčty všetkých čísel v oboch podmnožinách boli rovnaké. [45–C–II–1]

---

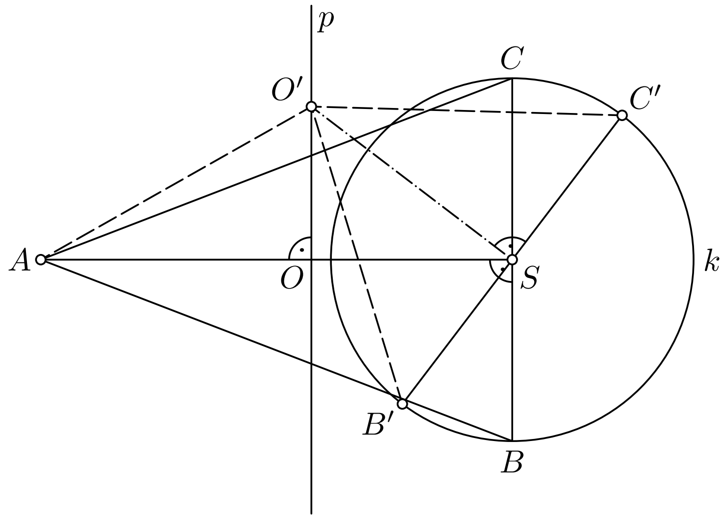
5. *V rovine je daná kružnica k so stredom S a bod $A \neq S$. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým trojuholníkom ABC, ktorých strana BC je priemerom kružnice k.*

(*Jiří Dula*)

Riešenie. Polomer danej kružnice k označme r. Ak bod A leží na kružnici k, je bod S stredom každej kružnice opísanej niektorému z uvažovaných trojuholníkov ABC a hľadanou množinou je jednobodová množina $\{S\}$. Ďalej rozlíšime dva prípady:

a) Nech $|AS| > r$. Uvažujme najskôr rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy. Stred O kružnice jemu opísanej je vnútorným bodom úsečky AS a pritom platí $|AO| = |BO| = |CO|$.

Teraz ukážeme, že hľadanou množinou O stredov kružníc opísaných všetkým trojuholníkom ABC, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, je priamka p, ktorá je kolmá na AS a prechádza bodom O (obr. 2).



Obr. 2

Uvažujme ľubovoľný trojuholník $AB'C'$, pričom $B'C'$ je priemer kružnice k, a označme O' priesečník osi jeho strany $B'C'$ s priamkou p, takže $|O'B'| = |O'C'|$ (bod O' leží na osi $B'C'$). Podľa Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku $C'O'S$ platí

$$|O'B'| = |O'C'| = \sqrt{|O'S|^2 + r^2} = \sqrt{|OO'|^2 + |OS|^2 + r^2}.$$

Pre veľkosť úsečky $O'A$ pritom máme

$$|O'A| = \sqrt{|AO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|BO|^2 + |OO'|^2}\sqrt{|OS|^2 + r^2 + |OO'|^2}.$$

Odtiaľ $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, čiže bod O' je stredom kružnice opísanej trojuholníku $AB'C'$ a podľa konštrukcie leží na priamke p.

Naopak, pre ľubovoľný bod O' priamky p možno zostrojiť priemer $B'C'$ kružnice k, ktorý je kolmý na priamku $O'S$. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, takže sme našli trojuholník $AB'C'$ s požadovanými vlastnosťami, ktorého opísaná kružnica má stred O'.

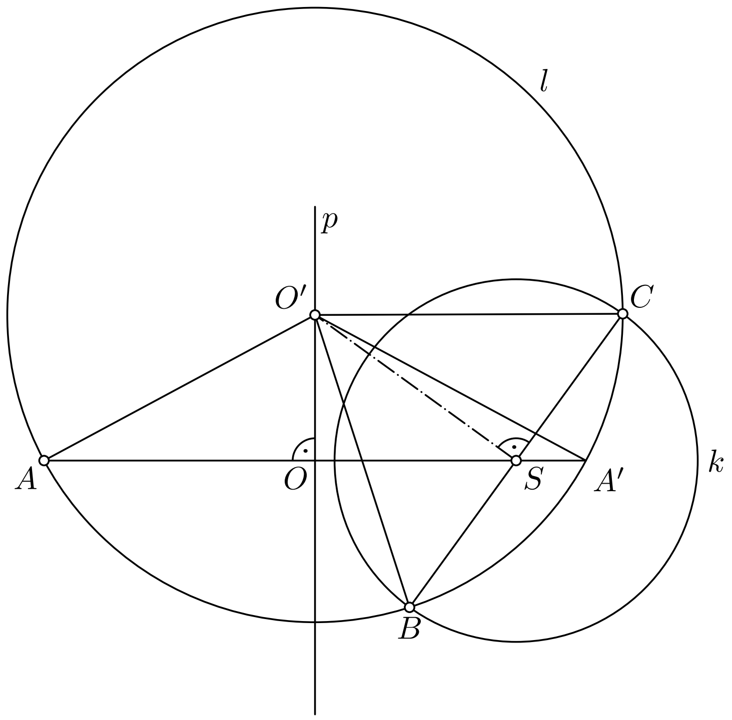
b) Nech $|AS| < r$. V tomto prípade možno postupovať analogicky. Stred O je teraz vnútorným bodom polpriamky opačnej k polpriamke SA. Dostaneme pritom rovnaký výsledok ako v prípade a).

Záver. Ak bod A nie je bodom kružnice k, hľadanou množinou O je priamka p, ktorá je kolmá na AS a súčasne prechádza stredom O kružnice opísanej rovnoramennému trojuholníku ABC so základňou BC, ktorá je priemerom kružnice k kolmým na AS. Ak A je bodom kružnice k, tak $\mathsf{O} = \{S\}$.

Iné riešenie. Pre daný bod A, ktorý neleží na kružnici k, uvažujme trojuholník ABC s danými vlastnosťami. Označme l kružnicu opísanú trojuholníku ABC (obr. 3). Keďže bod S je stredom spoločnej tetivy BC kružníc k a l, pretne kružnica l polpriamku opačnú k polpriamke SA vo vnútornom bode, ktorý označíme A'. Pre mocnosť $m_l(S)$ bodu S ku kružnici l pritom platí

$$m_l(S) = -|BS| \cdot |CS| = -r^2 = -|AS| \cdot |A'S|, \tag{1}$$

pričom r je polomer kružnice k. Odtiaľ vyplýva, že vzdialenosť $|A'S|$, a teda aj poloha bodu A' na polpriamke opačnej k SA, sú jednoznačne určené polohou bodu A. Pre všetky trojuholníky ABC vyhovujúce podmienkam úlohy je teda AA' pevná úsečka. Kružnice opísané všetkým uvažovaným trojuholníkom ABC preto majú spoločnú tetivu AA', takže ich stredy ležia na osi p úsečky AA'. V prípade, že ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou BC, je úsečka AA' priemerom kružnice l a jej stred O je súčasne stredom úsečky AA'. Priamka p prechádza týmto bodom O kolmo na priamku AS.



Obr. 3

Naopak, ku každému bodu O' priamky p nájdeme trojuholník ABC s požadovanými vlastnosťami, ktorý má stred opísanej kružnice v bode O'. Stačí zostrojiť priemer BC kružnice k, ktorý je kolmý na priamku $O'S$. Pre pevne uvažované body A, A' a S sme tak zostrojili body B, C, pre ktoré platí vzťah (1). To znamená, že body A, B, C a A' ležia na jednej kružnici l. Vzhľadom na to, že bod O' je priesečníkom osí tetív AA' a BC tejto kružnice, ktoré nie sú rovnobežné, je bod O' stredom kružnice l, teda stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V rovine je daný štvorec $ABCD$. Uvažujme štvorec $KLMN$, ktorého uhlopriečka je zhodná so stranou štvorca $ABCD$ a jeho vrcholy K a M ležia na stranách štvorca $ABCD$. Určte množinu vrcholov L všetkých takých štvorcov $KLMN$. [19–B–I–5]

N2. V rovine je daná priamka q a bod A, ktorý na nej neleží. Určte v tejto rovine množinu stredov S všetkých štvorcov $ABCD$ takých, že bod B leží na priamke q. [47–B–I–2]

N3. V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte množinu ťažísk všetkých ostrouhlých trojuholníkov ABC, pre ktoré platí: Vrcholy A a B, priesečník výšok V a stred S kružnice vpísanej do trojuholníka ABC ležia na jednej kružnici. [55–A–III–4]

---

6. *Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí*

$$f\bigl(f(x)+y\bigr) = x + f(y + 2\,006).$$

(*Petr Kaňovský*)

Riešenie. Nech f je ľubovoľná funkcia s požadovanými vlastnosťami. Najskôr ukážeme, že je prostá. Predpokladajme, že existujú dve celé čísla x_1 a x_2, pre ktoré $f(x_1) = f(x_2)$. Potom pre všetky celé čísla y platí

$$x_1 + f(y + 2006) = f\bigl(f(x_1) + y\bigr) = f\bigl(f(x_2) + y\bigr)x_2 + f(y + 2006).$$

Preto $x_1 = x_2$, funkcia f je teda prostá.

Voľbou $x = 0$ v danej rovnici dostaneme

$$f\bigl(f(0) + y\bigr) = f(y + 2006),$$

odkiaľ vzhľadom na to, že funkcia f je prostá, vyplýva $f(0) + y = y + 2006$, čiže $f(0) = 2006$.

Ak daný vzťah platí pre všetky celé čísla x, y, platí aj pre $y = 0$. Takže

$$f\bigl(f(x)\bigr) = x + f(2006).$$

Položme v tejto rovnosti $x = z$, pričom z je ľubovoľné celé číslo, pripočítajme potom k obom stranám y a aplikujme na ne funkciu f. Dostaneme

$$f\bigl(y + z + f(2006)\bigr) = f\bigl(f(f(z)) + y\bigr) = f(z) + f(y + 2006),$$

pričom sme využili rovnosť zo zadania pre $x = f(z)$. Ak v odvodenom vzťahu zameníme dvojicu (y, z) dvojicou $(y + 1, z - 1)$, dostaneme

$$f\bigl(y + z + f(2006)\bigr) = f\bigl((y + 1) + (z - 1) + f(2006)\bigr) = f(z - 1) + f(y + 2007).$$

Preto pre ľubovoľné celé čísla y a z platí

$$f(z) + f(y + 2006) = f(z - 1) + f(y + 2007),$$

čiže

$$f(z) - f(z - 1) = f(y + 2007) - f(y + 2006).$$

Položme teraz v poslednej rovnosti $y = 0$ a označme $d = f(2007) - f(2006)$, čo je nutne celé číslo. Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že pre každé celé číslo z platí

$$f(z) - f(z - 1) = d. \tag{1}$$

Vzťah (1) hovorí, že pre celé nezáporné čísla z tvoria hodnoty $f(z)$ aritmetickú postupnosť s diferenciou d, takže $f(z) = f(0) + dz$.

Ostatný vzťah platí aj pre záporné čísla z, čo možno z (1) ľahko odvodiť matematickou indukciou. Keďže $f(0) = 2006$, pre všetky celé čísla z nutne platí

$$f(z) = 2006 + dz. \tag{2}$$

Teraz zistíme, ktoré funkcie tvaru (2) vyhovujú zadaniu úlohy. Pre všetky celé čísla x a y musí platiť

$$2006 + d(2006 + dx + y) = f\big(2006 + dx + y\big) = f\big(f(x) + y\big) = x + f(y + 2006) = \\ = x + 2006 + d(y + 2006).$$

Oba krajné výrazy sa rovnajú práve vtedy, keď pre všetky celé čísla x platí

$$d^2 x = x.$$

Odtiaľ $d = 1$ alebo $d = -1$.

Záver. Danej úlohe vyhovujú iba dve funkcie, a to

$$f_1(x) = 2006 - x \qquad \text{a} \qquad f_2(x) = 2006 + x.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je ľubovoľná funkcia spĺňajúca nerovnosť

$$f(n) + f(n + 2) \leqq 2f(n + 1)$$

pre každé prirodzené číslo n. Ukážte, že potom v rovine existuje priamka, na ktorej leží nekonečne veľa bodov s karteziánskymi súradnicami $[k, f(k)]$, $k \in \mathbb{N}$. [43–A–III–1]

N2. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že

$$f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy)$$

platí pre každé x, y celé a navyše $f(-1) = f(1)$. [42–A–3–5]

N3. Uvažujme funkciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktorá je rýdzo rastúca a pre každé dve prirodzené čísla m, n spĺňa rovnosť

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Určte $f(30)$, ak viete, že $f(2) = 4$. [40–A–2–4]

N4. Nech f je zobrazenie množiny $\{1, 2, \dots, 1988\}$ do seba. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n položme $x_1 = f(1)$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Zistite, či existuje také číslo m, že platí $x_m = x_{2m}$. [37–A–III–1]