2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *Určte všetky reálne čísla s, pre ktoré má rovnica*

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$$

štyri rôzne reálne korene, pričom súčin dvoch z nich je rovný číslu -2.

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Predpokladajme, že číslo s vyhovuje zadaniu úlohy a označme korene x_1, x_2, x_3, x_4 danej rovnice tak, aby platilo

$$x_1x_2 = -2. \tag{1}$$

Z rozkladu na koreňové činitele

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

po roznásobení a porovnaní koeficientov pri rovnakých mocninách x dostaneme Viètove vzťahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \tag{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{s}{4}, \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \tag{4}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Z rovností (1) a (5) ihneď vyplýva

$$x_3x_4 = \frac{1}{4}.$$

Z rovnosti (4) upravenej na tvar

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2}$$

po dosadení hodnôt x_1x_2 a x_3x_4 vychádza rovnica

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2) - 2(x_3 + x_4) = -\frac{11}{2},$$

ktorá spolu s rovnicou (2) tvorí sústavu dvoch lineárnych rovníc pre neznáme súčty $x_1 + x_2$ a $x_3 + x_4$. Jednoduchým výpočtom zistíme, že riešením tejto sústavy je dvojica hodnôt

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_3 + x_4 = 3.$$

Ak dosadíme všetko, čo sme už zistili, do rovnosti (3) upravenej na tvar

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = \frac{s}{4},$$

zistíme, že nutne $s = 17$.

Teraz musíme urobiť skúšku: z rovností

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_1x_2 = -2$$

vyplýva, že čísla $x_{1,2}$ sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad \text{teda} \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}; \tag{6}$$

z rovností

$$x_3 + x_4 = 3 \quad \text{a} \quad x_3x_4 = \frac{1}{4}$$

zase vyplýva, že čísla $x_{3,4}$ sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0, \quad \text{teda} \quad x_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}. \tag{7}$$

Vidíme, že $x_{1,2,3,4}$ sú skutočne štyri navzájom rôzne reálne čísla, ktoré spĺňajú sústavu rovníc (2)–(5) pre hodnotu $s = 17$, takže to sú korene rovnice zo zadania. Zdôraznime, že úlohou nebolo tieto korene vypočítať. Nestačilo by však len overiť, že každá z kvadratických rovníc v (6) a (7) má dva rôzne reálne korene (to nastane práve vtedy, keď ich diskriminanty sú kladné čísla), okrem toho by bolo nutné ešte ukázať, že tieto dve rovnice nemajú spoločný koreň.

Hľadané číslo s je jediné a má hodnotu $s = 17$.

Iné riešenie. Označme $x_{1,2}$ tie korene danej rovnice, pre ktoré má platiť $x_1x_2 = -2$. Mnohočlen z ľavej strany rovnice je deliteľný mnohočlenom $(x - x_1)(x - x_2)$, teda mnohočlenom tvaru $x^2 + px - 2$ (kde $p = -x_1 - x_2$), existuje teda rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = (x^2 + px - 2)(4x^2 + qx + r).$$

Roznásobením a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách x dostaneme sústavu

$$-20 = 4p + q, \;\; s = -8 + pq + r, \;\; 22 = -2q + pr, \;\; -2 = -2r.$$

Zo štvrtej rovnice máme $r = 1$, po dosadení do tretej $22 = -2q + p$, čo spolu s prvou rovnicou dáva $p = -2$ a $q = -12$. Zo zvyšnej (druhej) rovnice potom určíme hodnotu $s = 17$. Vieme, že pre ňu má mnohočlen zo zadanej rovnice rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + 17x^2 + 22x - 2 = (x^2 - 2x - 2)(4x^2 - 12x + 1),$$

ostáva urobiť skúšku (rovnako ako pri prvom postupe).

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za nájdenie hodnoty $s = 17$, pritom 1 bod za nájdenie oboch trojčlenov s koreňmi $x_{1,2}$ resp. $x_{3,4}$ a 1 bod za skúšku. Pokiaľ riešiteľ iba správne vypíše sústavu Viètových vzťahov (a z nej prípadne ešte určí hodnotu súčinu x_3x_4), dajte 2 body.

2. *Uvažujme množinu* $\{1,2,4,5,8,10,16,20,32,40,80,160\}$ *a všetky jej trojprvkové podmnožiny. Rozhodnite, či je viac tých, ktoré majú súčin svojich prvkov väčší ako* 2 006, *alebo tých, ktoré majú súčin svojich prvkov menší ako* 2 006. (Peter Novotný)

Riešenie. Uvažovaná množina je množinou práve *všetkých (prirodzených) deliteľov* čísla $160 = 2^5 \cdot 5$. Jej prvky môžeme združiť do dvojíc tak, aby súčin čísel v každej dvojici bol rovný číslu 160:

$$1 \cdot 160 = 2 \cdot 80 = 4 \cdot 40 = 5 \cdot 32 = 8 \cdot 20 = 10 \cdot 16.$$

To znamená, že ak $A = \{a,b,c\}$ je trojica navzájom rôznych deliteľov čísla 160, je aj $A' = \{160/a, 160/b, 160/c\}$ trojica navzájom rôznych deliteľov čísla 160.

Súčin abc prvkov trojice A sa dá vyjadriť v tvare

$$2^k 5^l, \quad \text{pričom } k \in \{0,1,2,\dots,14\},\ l \in \{0,1,2,3\} \tag{1}$$

(číslo 160 má len dva delitele, ktoré sú násobkom 2^5, preto sa v rozklade súčinu abc nemôže objaviť 2^{15}). Nie je ťažké zistiť, že najväčšie prirodzené číslo tvaru (1), ktoré je menšie ako 2 006, je číslo $2\,000 = 2^4 \cdot 5^3$ a najmenšie prirodzené číslo, ktoré je tvaru (1) a je väčšie ako 2 006, je číslo $2\,048 = 2^{11}$ (samotné číslo 2 006 tvaru (1) nie je). Pritom $2\,000 \cdot 2\,048 = 160^3$.

Ak je teda súčin prvkov trojice A menší ako 2 006, je nutne $abc \leqq 2\,000$ a súčin $160^3/(abc)$ prvkov zodpovedajúcej trojice A' je najmenej $160^3/2\,000 = 2\,048$. Naopak, ak je súčin prvkov trojice A väčší ako číslo 2 006, je $abc \geqq 2\,048$ a súčin prvkov trojice A' je najviac $160^3/2\,048 = 2\,000$. Inými slovami *trojprvkových podmnožín so súčinom prvkov menším ako* 2 006 *je práve toľko ako trojprvkových podmnožín so súčinom prvkov väčším ako* 2 006.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za zistenie, že uvažovaná množina je množinou deliteľov čísla 160, ďalšie 2 body za následné párovanie trojprvkových podmnožín. Ak riešiteľ uvedie fakt $abc \notin \langle 2\,001, 2\,047\rangle$ bez dôkazu, nestrhnite žiadny bod (celé čísla z tohto intervalu možno na deliteľnosť prvočíslami rýchlo jednotlivo otestovať). Riešenie, v ktorom sa žiak iba zaoberá otázkou, aké konkrétne hodnoty môže súčin abc nadobúdať (nie však koľkokrát sa tak pre jednotlivé hodnoty stane), oceňte najviac 2 bodmi.

3. *Daný je lichobežník $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole A a základňou AB, v ktorom platí $|AB| > |CD| \geqq |DA|$. Označme S priesečník osí jeho vnútorných uhlov pri vrcholoch A, B a T priesečník osí vnútorných uhlov pri vrcholoch C, D. Podobne označme U, V priesečníky osí vnútorných uhlov pri vrcholoch A, D, resp. B, C.*

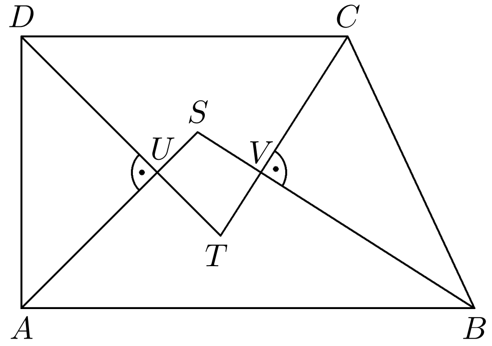
a) Dokážte, že priamky UV a AB sú rovnobežné.

b) Dokážte, že priesečník E polpriamky DT s priamkou AB a body S, T, B ležia na jednej kružnici.

(J. Švrček, P. Calábek)

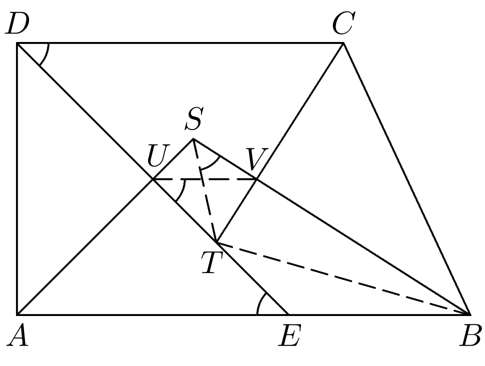
Riešenie. Bod U ako priesečník osí vnútorných uhlov pri vrcholoch A a D daného lichobežníka má rovnakú vzdialenosť od strán AB, AD a zároveň aj od strán AD, DC. To znamená, že má rovnakú vzdialenosť od oboch základní AB, CD lichobežníka $ABCD$. Podobne aj bod V, ktorý je priesečníkom osí uhlov pri vrcholoch B a C, má od oboch základní rovnakú vzdialenosť. Priamky UV a AB sú teda rovnobežné. Tým je vyriešená časť a).

Keďže súčet vnútorných uhlov ako pri vrcholoch A a D, tak pri vrcholoch B a C je $180°$, je súčet vnútorných uhlov trojuholníka ADU pri strane AD rovný $90°$ rovnako ako súčet vnútorných uhlov trojuholníka BCV pri strane BC. To znamená, že oba uvedené trojuholníky sú pravouhlé (s pravým uhlom pri vrchole U, resp. V, obr. 1). Štvoruholník $UTVS$ je teda tetivový (z predpokladu úlohy $|AB| > |CD| \geqq |DA|$ vyplýva, že polpriamky AU a CV sa nepretínajú, body S a T preto ležia v opačných polrovinách určených priamkou UV a body U, T, V, S ležia na kružnici v uvedenom poradí).

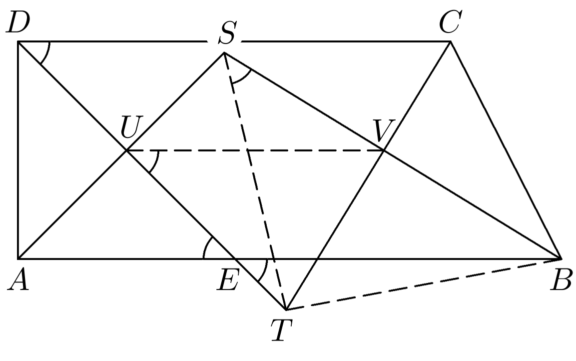


Obr. 1

Ako už vieme, priamky UV, AB a CD sú rovnobežné, teda $|\measuredangle VUT| = |\measuredangle CDT| = 45°$. Z rovnosti obvodových uhlov nad stranou TV tetivového štvoruholníka $UTVS$ tak vyplýva $|\measuredangle VST| = |\measuredangle VUT| = 45°$. To je zároveň aj veľkosť obvodového uhla TSB prislúchajúceho tetive TB kružnice opísanej trojuholníku STB (obr. 2). Ostáva ukázať, že na rovnakej kružnici leží aj bod E. To je zrejmé, pokiaľ $E = T$. V opačnom prípade stačí zistiť, že veľkosť uhla TEB je $180° - 45°$ alebo $45°$ podľa toho, či priamka BT body S, E oddeľuje alebo nie, čo okamžite vyplýva z toho, že priamka DT zviera so základňou AB uhol $45°$ (obr. 2 a 3). Tým je vyriešená časť b).



Obr. 2



Obr. 3

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za dôkaz rovnobežnosti $UV \parallel AB$, ďalej 1 bod za objav pravých uhlov AUD a BVC a 1 bod za dôsledok, že štvoruholník $UTVS$ je tetivový. Nemožno očakávať, že žiaci dokážu cyklickosť štyroch bodov pomocou orientovaných uhlov priamok, ich riešenie by teda malo pamätať prinajmenšom na dve možné vzájomné polohy bodov E a T (zabudnutie na triviálny prípad $E = T$ stratou bodu netrestajte). Pokiaľ bude dôkaz urobený len pre jednu z možných polôh, strhnite 1 bod.