2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Zistite, aký je najmenší možný obsah trojuholníka ABC, ktorého výšky spĺňajú nerovnosti $v_a \geqq 3\,\mathrm{cm}$, $v_b \geqq 4\,\mathrm{cm}$, $v_c \geqq 5\,\mathrm{cm}$.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Označme a, b, c veľkosti strán trojuholníka ABC. Pre jeho výšku v_b platí nerovnosť

$$c \geqq v_b,$$

pretože v_b je dĺžka najkratšej úsečky spájajúcej vrchol B s bodom priamky AC. Pre obsah S trojuholníka ABC tak platí

$$S = \frac{cv_c}{2} \geqq \frac{v_b v_c}{2} \geqq 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Ak existuje trojuholník ABC vyhovujúci podmienkam úlohy, ktorého obsah je práve $10\,\mathrm{cm}^2$, potom v oboch nerovnostiach $S = \frac{1}{2}cv_c \geqq \frac{1}{2}v_b v_c \geqq 10\,\mathrm{cm}^2$ nastáva rovnosť. Vychádza teda $c = v_b = 4\,\mathrm{cm}$ a súčasne $v_c = 5\,\mathrm{cm}$. Z prvej rovnosti vyplýva, že taký trojuholník musí byť pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A. Pre dĺžku jeho odvesny AC teda platí $b = v_c = 5\,\mathrm{cm}$ a dĺžka a jeho prepony BC je rovná $\sqrt{41}\,\mathrm{cm}$. Zo vzorca $S = \frac{1}{2}av_a$ pre jeho výšku v_a vyplýva

$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{20}{\sqrt{41}}\,\mathrm{cm} > 3\,\mathrm{cm}.$$

Pravouhlý trojuholník ABC s odvesnami $b = 5\,\mathrm{cm}$ a $c = 4\,\mathrm{cm}$ teda vyhovuje podmienkam úlohy.

Najmenší možný obsah trojuholníka ABC, ktorého výšky vyhovujú podmienkam úlohy, je $10\,\mathrm{cm}^2$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, pritom 4 body dajte za dôkaz nerovnosti $S \geqq 10\,\mathrm{cm}^2$ a zostávajúce 2 body za uvedenie príkladu vyhovujúceho trojuholníku ABC s obsahom $10\,\mathrm{cm}^2$. Zrejmé nerovnosti typu $b \geqq v_c$ (rovnako dobrý odhad dostaneme aj z tejto nerovnosti) nie je nutné dokazovať, ani nie je nutné zdôvodňovať, kedy v nich nastane rovnosť.

---

2. *Nech a, b sú reálne čísla. Ak má rovnica*

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$$

dva rôzne reálne korene také, že ich súčet sa rovná ich súčinu, tak platí $a + b > 0$ a pritom daná rovnica nemá žiadne iné reálne korene. Dokážte. (*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Predpokladajme, že rovnica

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

má dva rôzne reálne korene x_1 a x_2, pre ktoré platí $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = p$. Potom polynóm na jej ľavej strane je deliteľný polynómom $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - px + p$ a má rozklad

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - px + p)(x^2 + rx + s),$$

pričom r a s sú reálne čísla. Roznásobením výrazu na pravej strane poslednej rovnosti a porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách x polynómov na oboch stranách dostaneme

$$
\begin{aligned}
-4 &= -p + r, && (2)\\
4 &= p + s - pr, && (3)\\
a &= -ps + pr, && (4)\\
b &= ps. && (5)
\end{aligned}
$$

Zo vzťahu (2) vyplýva

$$r = p - 4. \tag{6}$$

Dosadením za r do vzťahu (3) dostaneme

$$s = 4 - p + p(p-4) = (p-4)(p-1). \tag{7}$$

Keďže kvadratická rovnica $x^2 - px + p = 0$ má dva rôzne reálne korene x_1 a x_2, je jej diskriminant kladné číslo, takže

$$p^2 - 4p > 0. \tag{8}$$

Keď sčítame rovnice (4) a (5) a dosadíme za r podľa (6), vyjde podľa predchádzajúceho vzťahu

$$a + b = pr = p(p-4) = p^2 - 4p > 0,$$

čo sme chceli dokázať.

Pre diskriminant D rovnice

$$x^2 + rx + s = 0$$

podľa vzťahov (6), (7) a (8) platí

$$D = r^2 - 4s = (p-4)^2 - 4(p-4)(p-1) = -3p(p-4) = -3(p^2 - 4p) < 0.$$

Rovnica teda nemá reálne korene. Daná rovnice (1) preto nemá iné reálne korene ako x_1 a x_2.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, pritom 2 body dajte za správny rozklad polynómu na ľavej strane rovnice na súčin dvoch polynómov stupňa 2 a porovnanie ich koeficientov, t. j. za správne uvedenie vzťahov (2), (3), (4), (5). Ďalšie 2 body dajte za dôkaz nerovnosti $a + b > 0$ a zostávajúce 2 body za dôkaz neexistencie ďalších koreňov danej rovnice.

---

3. *Nech M je ľubovoľný vnútorný bod prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC. Označme S, S_1, S_2 stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ABC, AMC, BMC.*

a) Dokážte, že body M, C, S_1, S_2 a S ležia na jednej kružnici.

b) Pre ktorú polohu bodu M má táto kružnica najmenší polomer?

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Označme postupne α a β veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A a B uvažovaného pravouhlého trojuholníka ABC.

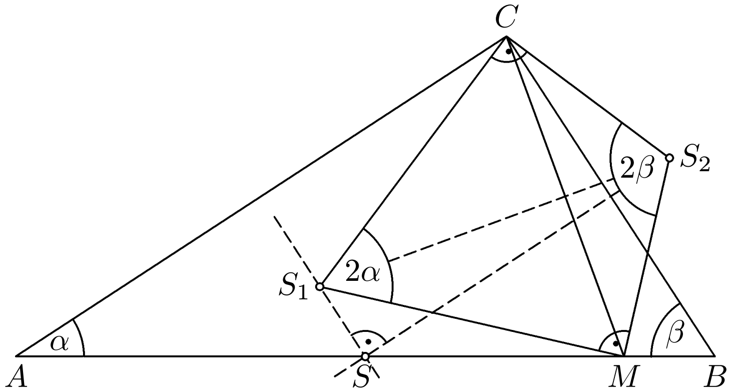
a) Zo vzťahu medzi obvodovým a stredovým uhlom pre spoločnú tetivu CM kružníc k_1 a k_2 opísaných postupne trojuholníkom AMC a BMC vyplýva (obr. 1)

$$|\measuredangle MS_1C| + |\measuredangle MS_2C| = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Štvoruholník CS_1MS_2 je teda tetivový. Keďže body M a C sú súmerne združené podľa osi úsečky CM, na ktorej súčasne leží úsečka S_1S_2, platí ďalej

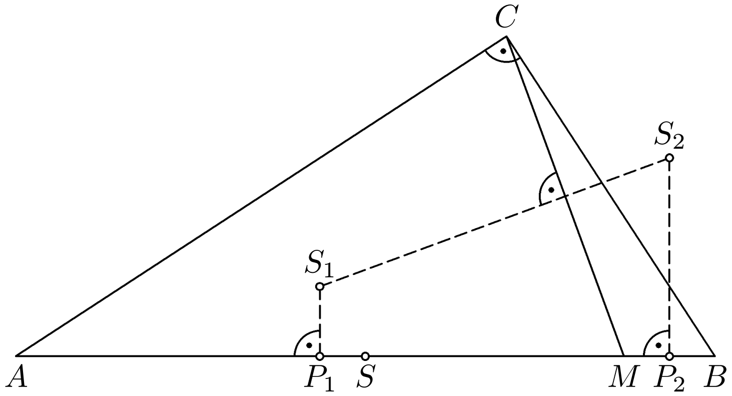
$$|\measuredangle S_1MS_2| = |\measuredangle S_1CS_2| = 90^\circ.$$

Kružnica opísaná štvoruholníku CS_1MS_2 je teda Tálesovou kružnicou zostrojenou nad priemerom S_1S_2. Body S a S_1 však ležia súčasne na osi odvesny AC, podobne body S a S_2 ležia na osi odvesny BC uvažovaného trojuholníka. Takže $|\measuredangle S_1SS_2| = 90^\circ$ a bod S leží tiež na Tálesovej kružnici opísanej štvoruholníku CS_1MS_2. (Ak $M = S$, platí toto tvrdenie triviálne.) Tým je dokázaná časť a).



Obr. 1

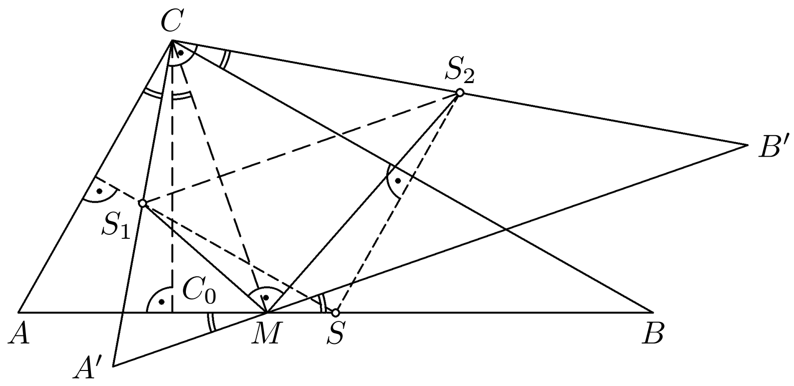
b) Označme P_1 a P_2 postupne stredy úsečiek AM a BM (obr. 2). Platí $|S_1S_2| \geqq |P_1P_2| = \frac{1}{2}|AB|$. Kružnica opísaná štvoruholníku CS_1MS_2 má preto najmenší



Obr. 2

priemer $\frac{1}{2}|AB|$ práve vtedy, keď $S_1S_2 \parallel AB$, čo vzhľadom na kolmosť úsečky CM a jej osi S_1S_2 nastane práve vtedy, keď M je pätou výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC. (Polomer r tejto kružnice má potom veľkosť $r = \frac{1}{4}|AB|$.)

Iné riešenie. Označme C_0 pätu výšky z vrcholu C a uvažujme podobné zobrazenie zložené z otočenia o uhol $\varphi = |\measuredangle C_0CM|$ a rovnoľahlosti so stredom C, ktoré zobrazí bod C_0 na bod M. Daný trojuholník ABC sa tak zobrazí na trojuholník $A'B'C$ (obr. 3) s výškou CM. Keďže $|\measuredangle AMA'| = |\measuredangle ACA'| = \varphi$, ležia body A, A', M a C na kružnici



Obr. 3

s priemerom $A'C$ opísanej trojuholníku AMC. Podobne stred S_2 strany $B'C$ je stredom kružnice opísanej trojuholníku BMC. Keďže S_1S_2 je stredná priečka pravouhlého trojuholníka $A'CB'$, ležia body M a C na Tálesovej kružnici s priemerom S_1S_2. Na tejto kružnici leží aj stred S prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC, pretože SS_1 je os strany AC a SS_2 os strany BC, takže aj trojuholník S_1S_2S je pravouhlý.

Tým je dokázaná časť a). Časť b) vyriešime rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za úplné riešenie časti a) pritom dajte 4 body, z toho 2 body za dôkaz, že štvoruholník CS_1MS_2 je tetivový. Za úplné riešenie časti b) dajte 2 body. Vyjadrenie najmenšieho polomeru, napr. pomocou $|AB|$, sa nevyžaduje.

---

4. *Nech p, q sú dané prirodzené čísla, pričom $p < q$. Určte najmenšie prirodzené číslo m s vlastnosťou: Súčet všetkých zlomkov v základnom tvare, ktoré majú menovateľa m a ktorých hodnoty ležia v otvorenom intervale (p, q), je aspoň $56(q^2 - p^2)$.*
(*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Ukážeme, že najmenšie m je 113 (nezávisle na hodnotách p, q). Zrejme $m > > 1$. Pre ľubovoľné prirodzené čísla $c < d$ a $m > 1$ označme $S_m(c, d)$ súčet všetkých zlomkov v základnom tvare, ktoré ležia v otvorenom intervale (c, d) a ktorých menovateľ je m. Potom platí nerovnosť

$$S_m(c, c+1) \leqq \left(c + \frac{1}{m}\right) + \left(c + \frac{2}{m}\right) + \ldots + \left(c + \frac{m-1}{m}\right) = (m-1)c + \frac{m-1}{2},$$

v ktorej rovnosť nastane práve vtedy, keď všetky čísla $1, 2, \ldots, m-1$ sú nesúdeliteľné s m, t. j. práve vtedy, keď m je prvočíslo.

Pre dané prirodzené čísla p, q a $m > 1$ platí

$$\begin{aligned}
S_m(p,q) &= S_m(p,p+1) + S_m(p+1,p+2) + \ldots + S_m(q-1,q) \leqq \\
&\leqq \Big((m-1)p + \frac{m-1}{2}\Big) + \Big((m-1)(p+1) + \frac{m-1}{2}\Big) + \ldots \\
&\quad + \Big((m-1)(q-1) + \frac{m-1}{2}\Big) = \\
&= (m-1)\frac{(q-p)(p+q-1)}{2} + (m-1)\frac{q-p}{2} = \\
&= (m-1)\frac{q-p}{2}(p+q-1+1) = \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2},
\end{aligned}$$

teda

$$S_m(p,q) \leqq \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2}. \tag{1}$$

Rovnosť vo vzťahu (1) pritom nastane práve vtedy, keď m je prvočíslo. Podľa zadania však platí

$$S_m(p,q) \geqq 56(q^2-p^2).$$

Zo vzťahu (1) vidíme, že nutne platí $\frac{1}{2}(m-1) \geqq 56$, t. j. $m \geqq 113$. Vzhľadom na to, že číslo 113 je prvočíslo, je najmenšie hľadané číslo $m = 113$.

Iné riešenie. Súčet všetkých zlomkov, ktoré majú menovateľa m, nie sú celé čísla a ležia v intervale (p,q), môžeme tiež určiť ako rozdiel súčtu všetkých zlomkov s menovateľom m ležiacich v uzavretom intervale $\langle p,q\rangle$ a súčtu všetkých prirodzených čísel z tohto intervalu. Pre uvažovaný rozdiel d potom platí

$$d = \sum_{j=pm}^{qm} \frac{j}{m} - \sum_{j=p}^{q} j.$$

Menšenec aj menšiteľ v uvažovanom rozdiele sa dajú vyjadriť ako súčty členov aritmetických postupností. Pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti (a_i) využijeme známy vzťah

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

Pre hľadaný rozdiel d tak platí

$$\begin{aligned}
d &= \tfrac{1}{2}(p+q)\big((q-p)m+1\big) - \tfrac{1}{2}(p+q)(q-p+1) = \\
&= \tfrac{1}{2}(p+q)\big[\big((q-p)m+1\big) - (q-p+1)\big]\,\tfrac{1}{2}(m-1)(q^2-p^2).
\end{aligned}$$

Ďalej budeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcom spôsobe riešenia.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za odvodenie nerovnosti (1) alebo nejakého ekvivalentného odhadu, ďalej 1 bod za odvodenie podmienky $m \geqq 113$ a 1 bod za zdôvodnenie skutočnosti, že najmenšie m je práve 113.