66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Nájdite všetky riešenia rovnice*

$$1 = \frac{|3x-7| - |9-2x|}{|x+2|}.$$

(*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Zo zadania vyplýva, že $x \neq -2$. Po vynásobení výrazom $|x+2|$ dostávame rovnicu $|x+2| = |3x-7| - |9-2x|$, ktorú teraz vyriešime. Nulové body troch absolútnych hodnôt s neznámou rozdeľujú reálnu os na štyri intervaly, v ktorých má každý z prislúchajúcich dvojčlenov stále rovnaké znamienko. V každom z týchto intervalov už teda môžeme riešiť zodpovedajúcu rovnicu bez absolútnych hodnôt.

- $x \in (-\infty, -2)$: dostávame rovnicu $-x-2 = -3x+7-(9-2x)$, ktorá po úprave prejde na identitu $0 = 0$. Všetky čísla zo skúmaného intervalu pôvodnej rovnici vyhovujú.
- $x \in \langle -2, \frac{7}{3})$: dostávame rovnicu $x+2 = -3x+7-(9-2x)$, čiže $2x = -4$ s jediným riešením $x = -2$, ktoré, ako už vieme, pôvodnej rovnici nevyhovuje.
- $x \in \langle \frac{7}{3}, \frac{9}{2})$: dostávame rovnicu $x+2 = 3x-7-(9-2x)$ s riešením $x = \frac{9}{2}$, ktoré však v uvažovanom intervale neleží.
- $x \in \langle \frac{9}{2}, \infty)$: dostávame rovnicu $x+2 = 3x-7-(-9+2x)$, ktorá po úprave prejde na identitu $0 = 0$. Vyhovujú všetky x z tohto intervalu.

Záver. Všetky riešenia úlohy tvoria množinu $(-\infty, -2) \cup \langle \frac{9}{2}, \infty)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za správny postup (snahu o odstraňovanie absolútnych hodnôt) dajte 1 bod. Za vyšetrenie rovnice v každom z intervalov 1 bod. Záver (explicitné uvedenie množiny riešení) 1 bod. Za každý zle spočítaný nulový bod strhnite 2 body (maximálne však 5 bodov). S rovnicou možno pracovať aj v pôvodnom tvare s neodstráneným zlomkom.

---

2. *Označme M množinu všetkých hodnôt výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$, pričom n je nepárne prirodzené číslo. Nájdite všetky možné zvyšky po delení číslom 48, ktoré dávajú prvky množiny M.* (*Aleš Kobza*)

Riešenie. Najskôr vypočítame prislúchajúce hodnoty výrazu V pre niekoľko prvých nepárnych čísel:

n	$V(n)$
1	0
3	$168 = 3 \cdot 48 + 24$
5	$888 = 18 \cdot 48 + 24$
7	$2\,928 = 61 \cdot 48$
9	$7\,440 = 155 \cdot 48$

Medzi hľadané zvyšky teda patria čísla 0 a 24. Ukážeme, že iné zvyšky už možné nie sú. Na to stačí dokázať, že pre každé nepárne číslo n platí $24 \mid V(n)$. Z domáceho kola vieme, že pre každé prirodzené číslo n platí $12 \mid V(n)$, teda aj $3 \mid V(n)$. Keďže čísla 3 a 8 sú nesúdeliteľné, stačí ukázať, že pre každé nepárne číslo n platí $8 \mid V(n)$. Využijeme pritom rozklad daného výrazu na súčin

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (n^2-1)(n^2+12) = (n-1)(n+1)(n^2+12). \qquad (1)$$

Ľubovoľné nepárne prirodzené číslo n možno zapísať v tvare $n = 2k - 1$, pričom $k \in \mathbb{N}$. Pre také n potom dostávame

$$V(2k-1) = [(2k-1)-1][(2k-1)+1][(2k-1)^2+12] = 4(k-1)k(4k^2-4k+13),$$

a keďže súčin $(k-1)k$ dvoch po sebe idúcich celých čísel je deliteľný dvoma, je celý výraz deliteľný ôsmimi.

Záver. Daný výraz môže dávať po delení číslom 48 práve len zvyšky 0 a 24.

Poznámka. Poznatok, že $8 \mid V(n)$ pre každé nepárne n, možno dokázať aj inak, bez použitia rozkladu (1). Ak je totiž $n = 2k-1$, pričom $k \in \mathbb{N}$, tak číslo

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1$$

dáva po delení ôsmimi (vďaka tomu, že jedno z čísel k, $k-1$ je párne) zvyšok 1, a teda rovnaký zvyšok dáva aj číslo n^4 (ako druhá mocnina nepárneho čísla n^2). Platí teda $n^2 = 8u+1$ a $n^4 = 8v+1$ pre vhodné celé u a v, takže hodnota výrazu

$$V(2k-1) = (8v+1) + 11(8u+1) - 12 = 8(v+11u)$$

je naozaj násobkom ôsmich.

Pripojme aj podobný dôkaz poznatku $3 \mid V(n)$ z domáceho kola. Pre čísla n deliteľné tromi je to zrejmé, ostatné n sú tvaru $n = 3k \pm 1$, takže číslo

$$n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3k(3k \pm 2) + 1$$

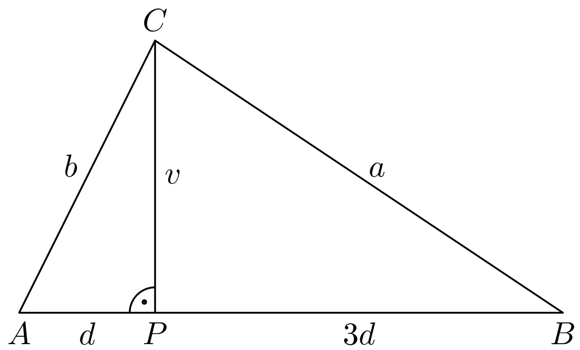
dáva po delení tromi zvyšok 1, rovnako tak aj číslo $n^4 = (n^2)^2$. Dosadenie $n^2 = 3u+1$ a $n^4 = 3v+1$ do výrazu $V(n)$ už priamo vedie k záveru, že $3 \mid V(n)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za využitie faktu z domáceho kola ($12 \mid V(n)$ pre ľubovoľné n) na odvodenie (konštatovanie) toho, že zvyšky môžu byť iba 0, 12, 24 a 36 dajte 1 bod. Za snahu dokázať, že $8 \mid V(n)$ pre n nepárne, dajte 1 bod, za dôkaz tohto tvrdenia dajte 2 body. Za záver, že z $3 \mid V(n)$ a $8 \mid V(n)$ vyplýva $24 \mid V(n)$ dajte 1 bod (nesúdeliteľnosť čísel 3 a 8 musí byť spomenutá; záver typu „z $12 \mid V(n)$ a $8 \mid V(n)$ zrejme vyplýva, že $24 \mid V(n)$" nestačí, ak nie je napr. dodané, že 24 je najmenší spoločný násobok čísel 8 a 12). Za overenie, že zvyšky 0 a 24 sú naozaj možné, dajte 1 bod (stačí uviesť napr. len hodnoty $V(1)$ a $V(3)$).

---

3. *Päta P výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere $|AP| : |PB| = 1 : 3$. V rovnakom pomere sú aj obsahy štvorcov nad jeho stranami AC a BC. Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý.* (*Leo Boček*)

Riešenie. Označme d dĺžku úsečky AP a v dĺžku výšky CP trojuholníka ABC. Dĺžky jeho strán označíme zvyčajným spôsobom a, b, c. Zo zadania teda vyplýva $|PB| = 3d$ (obr. 1).



Obr. 1

Použitím Pytagorovej vety v trojuholníkoch APC a PBC dostávame rovnosti $b^2 = d^2+v^2$ a $a^2 = 9d^2+v^2$. Z druhého predpokladu úlohy potom vyplýva rovnosť $a^2 = 3b^2$, čiže $9d^2 + v^2 = 3d^2 + 3v^2$, odkiaľ $v^2 = 3d^2$. Dosadením do prvých dvoch rovností tak dostávame $a^2 = 12d^2$ a $b^2 = 4d^2$. A keďže $c = 4d$, čiže $c^2 = 16d^2$, dokázali sme, že pre dĺžky strán trojuholníka ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Trojuholník ABC je preto podľa obrátenej Pytagorovej vety pravouhlý.

Poznámka. Ak zvážime pomocný pravouhlý trojuholník s odvesnami a a b, tak pre jeho preponu c' podľa Pytagorovej vety platí $c'^2 = a^2 + b^2$. Porovnaním s odvodenou rovnosťou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostávame $c' = c$, takže pôvodný trojuholník je podľa vety *sss* zhodný s trojuholníkom pomocným, a je teda skutočne pravouhlý. Môžeme tolerovať názor, že samotná Pytagorova veta udáva nielen nutnú, ale aj postačujúcu podmienku na to, aby bol daný trojuholník pravouhlý.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za napísanie Pytagorovej vety v oboch trojuholníkoch APC a PBC dajte jeden bod. Za odvodenie vzťahu $v^2 = 3d^2$ dajte 2 body, za jeho dôsledok $a^2+b^2 = c^2$ potom ďalší 1 bod. Za uvedenie záveru, že potom je trojuholník pravouhlý, dajte dva body. Za rôzne manipulácie s rovnicami bez dosiahnutia vzťahu vedúceho k správnemu dôkazu body neudeľujte.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 20. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Tomáš Jurík, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017