2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *Nájdite všetky dvojice celých čísel (a, b), ktoré sú riešením rovnice*

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Rovnicu riešime ako kvadratickú s neznámou a a parametrom b. Jej diskriminant je

$$D = (7b + 5)^2 - 4(6b^2 + 4b + 3) = 25b^2 + 54b + 13$$

a korene

$$a_{1,2} = \frac{-7b - 5 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Ak sú a aj b celé čísla, musí byť aj $\sqrt{D} = \pm(2a + 7b + 5)$ celé číslo. Môžeme teda písať

$$D = 25b^2 + 54b + 13 = c^2,$$

pričom c je celé nezáporné. Rovnicu

$$25b^2 + 54b + 13 - c^2 = 0$$

opäť riešime ako kvadratickú. Jej korene sú

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 25 \cdot 13 + 25c^2}}{25}.$$

Ak sú b a c celé čísla, musí byť $\sqrt{404 + 25c^2}$ druhou mocninou nejakého celého nezáporného čísla d. Pre celé nezáporné čísla c, d teda platí $d^2 - 25c^2 = 404$, čiže

$$(d + 5c)(d - 5c) = 404.$$

Rozdiel $(d + 5c) - (d - 5c) = 10c$ je párny, takže čísla $d + 5c$ a $d - 5c$ majú rovnakú paritu. Navyše $d + 5c \geqq d - 5c$ a $d + 5c \geqq 0$, takže z rozkladov čísla 404 na súčin dvoch celých čísel vyhovuje jediný, a to

$$d + 5c = 202, \quad d - 5c = 2.$$

Odtiaľ $d = 102$, $c = 20$. Z koreňov

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm d}{25}$$

je celým číslom iba $b = 3$. Potom

$$a_{1,2} = \frac{-7b - 5 \pm c}{2},$$

teda $a_1 = -3$ a $a_2 = -23$.

Danej rovnici vyhovujú dve dvojice čísel (a, b), a to $(-3, 3)$ a $(-23, 3)$.

Iné riešenie. Trojčlen $a^2+7ab+6b^2$ sa dá rozložiť na súčin $(a+b)(a+6b)$. Pokúsme sa na súčin rozložiť aj výraz $a^2+7ab+6b^2+5a+4b+c$, pričom c je vhodná konštanta. Rozklad bude mať tvar

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + c = (a + b + x)(a + 6b + y).$$

Po roznásobení pravej strany a porovnaní koeficientov pri a a b dostaneme

$$x + y = 5, \quad 6x + y = 4,$$

čiže

$$x = -\frac{1}{5}, \quad y = \frac{26}{5}$$

a nakoniec

$$c = xy = -\frac{26}{25}.$$

Danú rovnicu teda môžeme postupne upraviť na tvar

$$\begin{aligned} a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b - \frac{26}{25} &= -3 - \frac{26}{25}, \\ \left(a + b - \frac{1}{5}\right)\left(a + 6b + \frac{26}{5}\right) &= -\frac{101}{25}, \\ (5a + 5b - 1)(5a + 30b + 26) &= -101. \end{aligned}$$

Keďže $5a + 5b - 1 \equiv -1 \pmod 5$, $5a + 30b + 26 \equiv 1 \pmod 5$, vyhovujú zo štyroch vyjadrení čísla -101 v tvare súčinu dvoch celých čísel len dve nasledovné:

$5a + 5b - 1 = -1$, $5a + 30b + 26 = 101$, a teda $a = -3$, $b = 3$;

$5a + 5b - 1 = -101$, $5a + 30b + 26 = 1$, a teda $a = -23$, $b = 3$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. V množine celých čísel vyriešte rovnicu $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 7x - 6y - 11 = 0$. [$x = 4 - 3n^2$, $y = 3 + n - 2n^2$, $n \in \mathbb{Z}$]

N2. Nájdite všetky celočíselné riešenia rovnice $2x^2 - 4xy + 3y^2 - x - 2y - 19 = 0$. [$x = 7$, $y = 6$; $x = 7$, $y = 4$; $x = 2$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 2$; $x = -2$, $y = -3$; $x = -2$, $y = 1$]

N3. V množine celých čísel vyriešte rovnicu

$$\frac{2x + 1}{y} + \frac{3y - 1}{x} = 5.$$

[$x = y = n$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$; $x = 3n - 2$, $y = 2n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$]

N4. Nájdite všetky dvojice celých čísel a, b takých, že súčet $a + b$ je koreňom rovnice $x^2 + ax + b = 0$. [$a = b = 0$; $a = 0$, $b = -1$; $a = -6$, $b = 8$; $a = -6$, $b = 9$; 55–A–II–1]

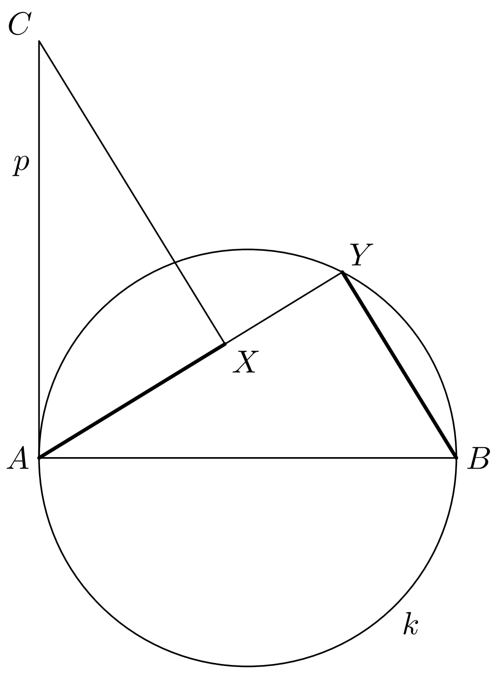
2. *Daná je kružnica k s priemerom AB. K ľubovoľnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, zostrojme na polpriamke AY bod X, pre ktorý platí $|AX| = |YB|$. Určte množinu všetkých takých bodov X.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Keď $Y = B$, potom $X = A$.

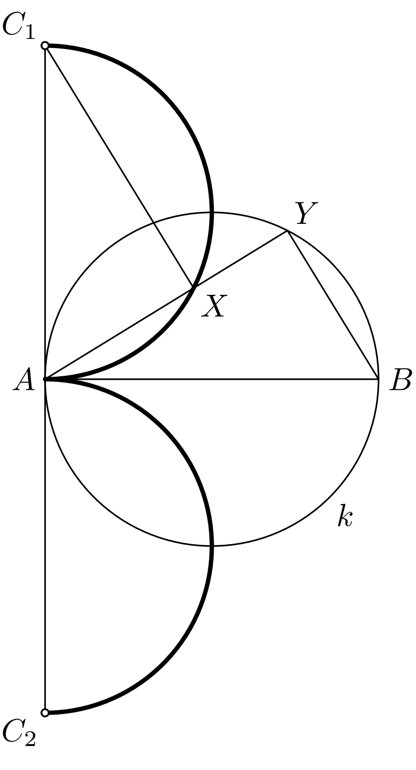
Nech $Y \neq B$. Nech p je priamka prechádzajúca bodom A kolmá na AB a C ten bod priamky p ležiaci v tej istej polrovine určenej priamkou AB ako bod Y, pre ktorý platí $|AC| = |AB|$ (obr. 1). Podľa zadania platí $|AX| = |BY|$. Uhol AYB je podľa Tálesovej vety pravý, preto $|\measuredangle ABY| = 90° - |\measuredangle YAB| = |\measuredangle CAX|$. Trojuholníky ABY a CAX sú teda zhodné podľa vety *sus*. Odtiaľ vyplýva, že $|\measuredangle CXA| = |\measuredangle AYB| = 90°$. Bod X teda leží na Tálesovej polkružnici nad priemerom AC.

Nech naopak X je ľubovoľný vnútorný bod tejto polkružnice a Y priesečník priamky AX s kružnicou k ($Y \neq A$). Trojuholníky CAX a ABY sú zhodné podľa vety *usu*, a preto $|AX| = |BY|$. Bod X teda patrí do hľadanej množiny.

Hľadanou množinou všetkých bodov X je zjednotenie dvoch polkružníc nad priemermi AC_1 a AC_2 ležiacich v tej istej polrovine ako bod B; C_1 a C_2 sú body ležiace na kolmici vedenej bodom A na priamku AB, pričom $|AC_1| = |AC_2| = |AB|$ (obr. 2). Bod A do hľadanej množiny patrí, body C_1 a C_2 nie.



Obr. 1



Obr. 2

Návodné a dopĺňajúce úlohy:

N1. Nech X je ľubovoľný vnútorný bod strany BC štvorca $ABCD$. Označíme P, Q päty kolmíc z bodov B a D na priamku AX. Dokážte, že trojuholníky ABP a DAQ sú zhodné.

N2. Je daný obdĺžnik $ABCD$. Dokážte, že priesečník P kružníc zostrojených nad priemermi AB a AD (pričom $P \neq A$) leží na úsečke BD.

3. *Nájdite najmenšie prirodzené číslo k také, že každá k-prvková množina trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Na konštrukciu množiny po dvoch nesúdeliteľných trojciferných zložených čísel s veľkým počtom prvkov môžeme využiť to, že mocniny dvoch rôznych prvočísel sú nesúdeliteľné. Množina

$$\{2^7, 3^5, 5^3, 7^3, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2\}$$

obsahuje 11 po dvoch nesúdeliteľných trojciferných čísel a nie je v nej žiadne prvočíslo.

Dokážeme, že každá aspoň dvanásťprvková množina po dvoch nesúdeliteľných trojciferných čísel obsahuje prvočíslo. Keďže $37^2 > 1000$, je každé zložené trojciferné číslo deliteľné aspoň jedným prvočíslom menším ako 37. Preto sa dá množina všetkých zložených trojciferných čísel rozdeliť na 11 podmnožín A_2, A_3, A_5, A_7, A_{11}, A_{13}, A_{17}, A_{19}, A_{23}, A_{29}, A_{31}, pričom A_i obsahuje tie čísla, ktorých najmenším prvočiniteľom je číslo i. Každé dve rôzne čísla z tej istej množiny A_i sú súdeliteľné. Nech množina B trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel má aspoň 12 prvkov. Keby v B boli iba zložené čísla, podľa Dirichletovho princípu by B obsahovala dve čísla z tej istej množiny A_i; tieto čísla by ale boli súdeliteľné. Preto množina B musí obsahovať aspoň jedno prvočíslo.

Hľadané najmenšie číslo k je teda 12.

Návodné a doplňajúce úlohy:

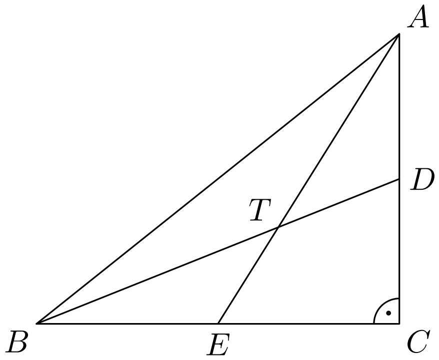
N1. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s nasledujúcou vlastnosťou: Ak zvolíme ľubovoľných n rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$, sú medzi nimi dve čísla s rozdielom a) 11; b) 13. [a) 56; b) 53]

N2. Na večierku je 20 ľudí. Dokážte, že sú medzi nimi dvaja, ktorí majú medzi ostatnými účastníkmi večierka rovnaký počet priateľov (priateľstvo je symetrické: ak A je priateľom B, potom B je priateľom A).

N3. Určte najmenšie prirodzené číslo n s nasledujúcou vlastnosťou: Ak zvolíme ľubovoľných n prirodzených čísel menších ako 2006, sú medzi nimi dve také, že podiel súčtu a rozdielu ich druhých mocnín je väčší ako 3. [21; 55-B-I-6]

4. *V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme T ťažisko, D stred strany AC a E stred strany BC. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky ABC s preponou AB, pre ktoré je štvoruholník $CDTE$ dotyčnicový.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Konvexný štvoruholník je dotyčnicový práve vtedy, keď súčty dĺžok jeho protiľahlých strán sú rovnaké.



Obr. 3

V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme $a = |BC|$, $b = |AC|$ (obr. 3). Podľa Pytagorovej vety platí

$$|BD| = \sqrt{|BC|^2 + |CD|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |AE| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Keďže ťažisko trojuholníka delí ťažnicu v pomere $1 : 2$, máme

$$|TD| = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |TE| = \frac{1}{3}|AE| = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Štvoruholník $CDTE$ je dotyčnicový práve vtedy, keď $|CD| + |TE| = |EC| + |TD|$, teda

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Ak $a = b$, potom rovnosť platí.
Ak $a > b$, potom $a^2 + \frac{1}{4}b^2 > b^2 + \frac{1}{4}a^2$, a teda

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} < \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Podobne, ak $a < b$, potom

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} > \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Štvoruholník $CDTE$ je teda dotyčnicový práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný.

Iné riešenie. Z rovnosti

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

postupne vyplýva

$$\begin{aligned}
3b + \sqrt{4b^2 + a^2} &= 3a + \sqrt{4a^2 + b^2},\\
3b - 3a &= \sqrt{4a^2 + b^2} - \sqrt{4b^2 + a^2},\\
9b^2 - 18ab + 9a^2 &= 5a^2 + 5b^2 - 2\sqrt{4a^4 + 17a^2b^2 + 4b^4},\\
2a^2 - 9ab + 2b^2 &= -\sqrt{4a^4 + 17a^2b^2 + 4b^4},\\
4a^4 + 81a^2b^2 + 4b^4 - 36a^3b - 36ab^3 + 8a^2b^2 &= 4a^4 + 17a^2b^2 + 4b^4,\\
72a^2b^2 - 36a^3b - 36ab^3 &= 0,\\
-36ab(a-b)^2 &= 0,\\
a &= b.
\end{aligned}$$

Naopak, z rovnosti $a = b$ vyplýva

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Štvoruholník $CDTE$ je teda dotyčnicový práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je dotyčnicový práve vtedy, keď $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$.

N2. Dokážte, že v trojuholníku ABC platí $v_a < v_b$ práve vtedy, keď $t_a < t_b$. [Obe nerovnosti sú ekvivalentné s $a > b$.]

N3. V rovnoramennom trojuholníku ABC má základňa AB dĺžku $c = 4$ a rameno AC dĺžku 7. Vypočítajte dĺžky ťažníc. [$t_a = t_b = \frac{9}{2}$, $t_c = \sqrt{45}$]

---

5. *Nájdite všetky dvojice reálnych čísel (p, q) také, že mnohočlen x^2+px+q je deliteľom mnohočlena $x^4 + px^2 + q$.* (*Jozef Moravčík*)

Riešenie. Delením polynómu $x^4 + px^2 + q$ polynómom $x^2 + px + q$ zistíme, že platí

$$x^4+px^2+q = (x^2+px+q)(x^2-px+p^2+p-q)+(2pq-p^3-p^2)x+q-p^2q-pq+q^2.$$

Polynóm $x^2 + px + q$ je deliteľom polynómu $x^4 + px^2 + q$ práve vtedy, keď je zvyšok $(2pq-p^3-p^2)x+q-p^2q-pq+q^2$ nulový polynóm, teda práve vtedy, ak súčasne platia rovnosti $2pq - p^3 - p^2 = 0$ a $q - p^2q - pq + q^2 = 0$. Tieto upravíme na tvar

$$p(2q - p^2 - p) = 0, \quad \text{a} \quad q(1 - p^2 - p + q) = 0.$$

Ak $p = 0$, potom $q = 0$ alebo $q = -1$.

Ak $q = 0$, potom $p = 0$ alebo $p = -1$.

Ak $p \neq 0$ a $q \neq 0$, potom musí platiť $2q - p^2 - p = 0$ a $1 - p^2 - p + q = 0$. Z druhej rovnice vyjadríme $q = p^2 + p - 1$. Po dosadení do prvej rovnice máme $2p^2 + 2p - 2 - p^2 - p = 0$ a odtiaľ $p = 1$, $q = 1$ alebo $p = -2$, $q = 1$.

Vyhovuje teda päť dvojíc (p, q), a to $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$.

Iné riešenie. Polynóm x^2+px+q je deliteľom polynómu x^4+px^2+q práve vtedy, keď existujú také reálne čísla a, b, že

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + q &= (x^2 + px + q)(x^2 + ax + b) = \\ &= x^4 + (a + p)x^3 + (b + ap + q)x^2 + (bp + aq)x + bq. \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov dostaneme podmienky

$$a + p = 0, \tag{1}$$
$$b + ap + q = p, \tag{2}$$
$$bp + aq = 0, \tag{3}$$
$$bq = q. \tag{4}$$

Ak $q = 0$, potom podľa (3) $p = 0$ alebo $b = 0$. Dosadením $b = 0$ do (2) s využitím (1) dostaneme $-p^2 = p$, a teda okrem $p = 0$ vyhovuje aj $p = -1$.

Ak $q \neq 0$, vyplýva zo (4) $b = 1$. Vzťahy (3) a (1) potom dávajú $p - pq = 0$, teda $p = 0$ alebo $q = 1$. V prvom prípade musí byť podľa (2) $q = -1$, v druhom $1-p^2+1 = p$ a odtiaľ $p = 1$ alebo $p = -2$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

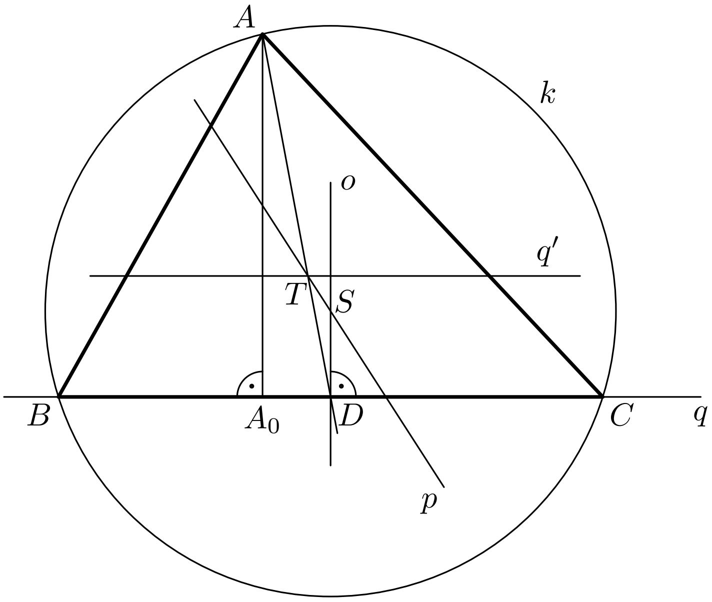
N1. Dokážte, že pre každé a je polynóm $x^4 + (1 - a)x^3 + x^2 + a$ deliteľný polynómom $x^2 - ax + a$.

N2. Zistite, pre ktorú hodnotu parametra a je polynóm $2x^3 + 4x^2 + 2ax + 9$ deliteľný polynómom $x^2 - x - a$. [$a = -\frac{3}{2}$]

N3. Nájdite spoločné korene polynómov $x^4+2x^3+x^2-9$ a x^4-3x^2+4x-3. [$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$]

6. *Daná je úsečka AA_0 a priamka p. Zostrojte trojuholník s vrcholom A a výškou AA_0, ktorého ťažisko a stred kružnice opísanej ležia na priamke p.* (Eva Řídká)

Riešenie. Strana BC hľadaného trojuholníka leží na priamke q, ktorá prechádza bodom A_0 a je kolmá na výšku AA_0. Na tejto priamke leží aj stred D strany BC. Ťažisko T je obrazom bodu D v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom $\frac{2}{3}$, leží preto na priamke q', ktorá je obrazom priamky q v uvedenej rovnoľahlosti. Stred S opísanej kružnice leží na osi o strany BC, čiže na priamke, ktorá prechádza bodom D a je rovnobežná s výškou AA_0 (obr. 4).



Obr. 4

Konštrukcia. Bodom A_0 vedieme priamku q kolmú na úsečku AA_0. Zostrojíme obraz q' priamky q v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom $\frac{2}{3}$. Označíme T priesečník priamky q' s priamkou p a D priesečník priamky AT s priamkou q. Bodom D vedieme rovnobežku o s AA_0 a jej priesečník s priamkou p označíme S. Priesečníky kružnice k so stredom S a polomerom $|SA|$ s priamkou q sú vrcholy B a C hľadaného trojuholníka.

Dôkaz správnosti. Úsečka AA_0 je kolmá na stranu BC, je to teda výška trojuholníka ABC. Bod S ležiaci na priamke p je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Zo zhodnosti trojuholníkov BDS a CDS (veta *Ssu*) vyplýva, že D je stred strany BC. Preto je AD ťažnica a T ťažisko trojuholníka ABC (platí totiž $|AT| = \frac{2}{3}|AD|$).

Diskusia. Ak priamka p nie je rovnobežná s úsečkou AA_0 ani nie je na ňu kolmá, sú body T a S jednoznačne určené. V tom prípade má úloha práve jedno riešenie (až na označenie bodov B a C), pokiaľ kružnica k pretína priamku q v dvoch rôznych bodoch; ak kružnica k nepretína priamku p v dvoch rôznych bodoch, nemá úloha riešenie.

Ak je úsečka AA_0 časťou priamky p, nie je bod S jednoznačne určený; vyhovujú všetky rovnoramenné trojuholníky so základňou BC, ktorá má stred v bode A_0. Ak je úsečka AA_0 rovnobežná s priamkou p, ale neleží na nej, nemá úloha riešenie.

Ak je priamka p kolmá na úsečku AA_0, má úloha riešenie len vtedy, keď sú priamky q' a p totožné. To nastane vtedy, keď priamka p pretína úsečku AA_0 v bode V, pre ktorý platí $|AV| = 2|A_0V|$. V takom prípade môžeme bod T zvoliť na p kdekoľvek a úloha má nekonečne veľa riešení.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že v každom nerovnostrannom trojuholníku leží ortocentrum V, ťažisko T a stred S opísanej kružnice na jednej priamke, pričom T leží medzi V a S a platí $|TV| = 2|ST|$. (Priamka, na ktorej ležia body S, T a V, sa nazýva *Eulerova priamka.*)

N2. Sú dané body A, D a V. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom D je stred strany BC a V priesečník výšok.