2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

1. *Určte všetky dvojice reálnych čísel a, b, pre ktoré je polynóm $x^4 + ax^2 + b$ deliteľný polynómom $x^2 + bx + a$.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Delením polynómu $x^4 + ax^2 + b$ polynómom $x^2 + bx + a$ zistíme, že

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + bx + a)(x^2 - bx + b^2) + (ab - b^3)x + (b - ab^2).$$

Polynóm $x^4 + ax^2 + b$ je deliteľný polynómom $x^2 + bx + a$ práve vtedy, keď je zvyšok $(ab - b^3)x + (b - ab^2)$ nulový polynóm, teda $ab - b^3 = b(a - b^2) = 0$ a súčasne $b - ab^2 = b(1 - ab) = 0$. Ak $b = 0$, sú obe podmienky splnené. Pre $b \neq 0$ musí platiť $a - b^2 = 0$ a $1 - ab = 0$. Odtiaľ $a = b^2$, $1 - b^3 = 0$, a teda $a = b = 1$.

Záver. Polynóm $x^4 + ax^2 + b$ je deliteľný polynómom $x^2 + bx + a$ práve vtedy, keď $b = 0$ (a a je ľubovoľné) alebo $a = b = 1$.

Iné riešenie. Polynóm $x^4 + ax^2 + b$ je deliteľný polynómom $x^2 + bx + a$ práve vtedy, keď existujú také reálne čísla p, q, že $x^4 + ax^2 + b = (x^2 + bx + a)(x^2 + px + q)$. Roznásobením a porovnaním koeficientov dostaneme sústavu rovníc

$$p + b = 0, \quad q + bp + a = a, \quad ap + bq = 0, \quad aq = b.$$

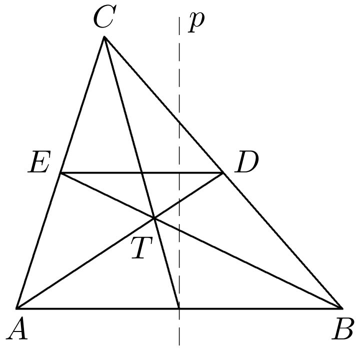
Z prvej rovnice vyjadríme $p = -b$ a z druhej $q = -bp = b^2$, dosadením do tretej a štvrtej máme $-ab + b^3 = 0$, $ab^2 = b$. Riešenie dokončíme rovnako ako v prvom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za správne určenie zvyšku pri delení dajte 2 body. Ďalšie 2 body za sústavu rovníc $ab - b^3 = 0$, $b - ab^2 = 0$ a 2 body za jej vyriešenie. Podobne dajte 2 body za rovnicu $x^4 + ax^2 + b = (x^2 + bx + a)(x^2 + px + q)$, 2 body za sústavu $p + b = 0$, $q + bp + a = a$, $ap + bq = 0$, $aq = b$ a 2 body za jej vyriešenie. Za uhádnutie riešenia $b = 0$ dajte jeden bod.

2. *V trojuholníku ABC označme D stred strany BC, E stred strany AC a T ťažisko. Dokážte, že ak je strana BC dlhšia ako strana AC, má kružnica vpísaná trojuholníku BDT menší polomer ako kružnica vpísaná trojuholníku ATE.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Polomer kružnice vpísanej trojuholníku je podielom jeho obsahu a polovice obvodu.

Trojuholníky ADE a BDE majú zrejme rovnaký obsah, pretože majú spoločnú stranu DE a zhodnú výšku na ňu (AB a DE sú rovnobežné). Rovnaký obsah teda majú aj trojuholníky ATE a BDT, pretože obsahy oboch trojuholníkov sa od obsahu spomenutých trojuholníkov líšia práve o obsah „spoločného“ trojuholníka DET (obr. 1).



Obr. 1

Označme p os úsečky AB. Ak je strana BC dlhšia ako strana AC, leží bod C v tej istej polrovine s hraničnou priamkou p ako bod A. Preto v tejto polrovine leží aj ťažisko T. Jeho vzdialenosť od bodu A je teda menšia ako vzdialenosť od bodu B. To znamená, že dĺžka t_a ťažnice AD je menšia ako dĺžka t_b ťažnice BE. Trojuholník ATE má obvod $o_1 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}t_b + \frac{2}{3}t_a$, trojuholník BDT má obvod $o_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b$. Z nerovností $b < a$ a $t_a < t_b$ preto vyplýva

$$o_2 - o_1 = \frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{3}(t_b - t_a) > 0,$$

čiže $o_1 < o_2$.

Trojuholníky AET a BDT majú rovnaký obsah a prvý z nich má menší obvod, preto má kružnica vpísaná trojuholníku AET väčší polomer ako kružnica vpísaná trojuholníku BDT.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. 1 bod dajte za vyjadrenie polomeru vpísanej kružnice pomocou obsahu a obvodu trojuholníka, 2 body za dôkaz rovnosti obsahov trojuholníkov AET a BDT, 2 body za dôkaz nerovnosti $o_1 < o_2$ a 1 bod za z toho vyplývajúcu nerovnosť medzi polomermi.

---

3. *Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré je podiel* $\dfrac{n^2+15n}{33\,000}$ *prirodzené číslo.*

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Číslo $n^2 + 15n = n(n+15)$ má byť deliteľné číslom $33\,000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$. Keby nebolo n deliteľné tromi, nebolo by tromi deliteľné ani číslo $n+15$, čiže ani súčin $n(n+15)$. Z rovnakého dôvodu musí byť n deliteľné piatimi, a teda aj pätnástimi. Píšme preto $n = 15k$. Aby bolo číslo $n(n+15) = 15^2k(k+1)$ deliteľné číslom $8 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$, musí byť súčin $k(k+1)$ dvoch po sebe idúcich prirodzených čísel deliteľný ôsmimi, piatimi a jedenástimi. Jeden z činiteľov k, $k+1$ musí byť deliteľný aspoň dvoma z týchto troch čísel, takže musí byť deliteľný niektorým z čísel 40, 55, 88. Najmenším takým číslom je 40. Jedenástimi ale nie je deliteľné ani číslo 40 ani žiaden z jeho susedov 39, 41. Ďalším kandidátom je číslo 55, súčin čísel 5 a 11. O jednotku väčšie číslo 56 je zase deliteľné ôsmimi. Preto súčin $55 \cdot 56$ je deliteľný ôsmimi, piatimi aj jedenástimi; máme teda $k = 55$. Hľadané najmenšie číslo je $n = 15k = 825$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. 2 body dajte za dôkaz toho, že n je deliteľné pätnástimi; 1 bod za zistenie, že je potrebné hľadať dve po sebe idúce prirodzené čísla, ktorých súčin je deliteľný piatimi, ôsmimi a jedenástimi; 1 bod za poznatok, že jedno z hľadaných čísel k a $k+1$ musí byť deliteľné dvoma z čísel 5, 8 a 11; 2 body potom za správne určenie najmenšieho n.