2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

---

1. *Určte reálne čísla a, b, c tak, aby polynóm x^4+ax^2+bx+c bol deliteľný polynómom x^2+x+1 a pritom súčet $a^2+b^2+c^2$ bol čo najmenší.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Delením polynómu x^4+ax^2+bx+c polynómom x^2+x+1 zistíme, že platí

$$x^4+ax^2+bx+c=(x^2+x+1)(x^2-x+a)+(b-a+1)x+(c-a).$$

Polynóm x^4+ax^2+bx+c je deliteľný polynómom x^2+x+1 práve vtedy, keď je zvyšok pri delení nulový polynóm, teda $b-a+1=0$ a súčasne $c-a=0$; odtiaľ $b=a-1$, $c=a$. Potom

$$a^2+b^2+c^2=a^2+(a-1)^2+a^2=3a^2-2a+1=3\left(a-\tfrac{1}{3}\right)^2+\tfrac{2}{3}.$$

Tento výraz má najmenšiu hodnotu pre $a=\frac{1}{3}$; ľahko dopočítame $b=a-1=-\frac{2}{3}$, $c=a=\frac{1}{3}$.

Iné riešenie. Polynóm x^4+ax^2+bx+c je deliteľný polynómom x^2+x+1 práve vtedy, keď existujú reálne čísla p, q, pre ktoré

$$x^4+ax^2+bx+c=(x^2+x+1)(x^2+px+q).$$

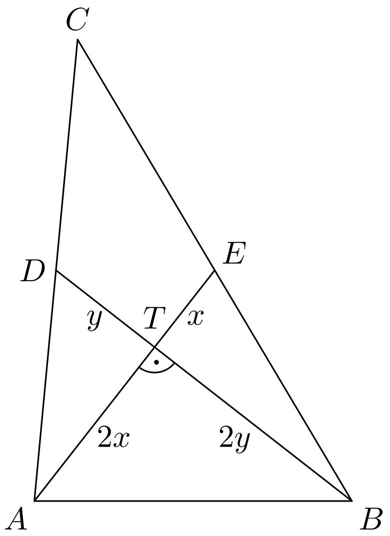
Roznásobením pravej strany a porovnaním koeficientov dostaneme štyri rovnice $p+1=0$, $q+p+1=a$, $q+p=b$, $q=c$. Z nich vyjadríme $p=-1$, $q=a$, $c=a$, $b=a-1$ a pokračujeme ako v prvom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Dajte dva body za rovnosť $x^4+ax^2+bx+c=(x^2+x+1)(x^2-x+a)+(b-a+1)x+(c-a)$, jeden bod za vyjadrenie dvoch z neznámych a, b, c pomocou tretej z nich, dva body za úpravu výrazu $a^2+b^2+c^2$ na tvar $3a^2-2a+1=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$ (alebo $3\left(b+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$) a jeden bod za správne určenie čísel a, b, c. Podobne dajte jeden bod za rovnosť $x^4+ax^2+bx+c=(x^2+x+1)(x^2+px+q)$, jeden bod za sústavu rovníc $p+1=0$, $q+p+1=a$, $q+p=b$, $q=c$, jeden bod za vyjadrenie $c=a$, $b=a-1$ a ďalej ako v prvom riešení.

---

2. *Daný je trojuholník ABC so stranou BC dĺžky 22 cm a stranou AC dĺžky 19 cm, ktorého ťažnice t_a, t_b sú navzájom kolmé. Vypočítajte dĺžku strany AB.*
(Pavel Novotný)

Riešenie. Označme D stred strany AC, E stred strany BC a T ťažisko trojuholníka



Obr. 1

ABC (obr. 1). Ak ďalej označíme $3x$ a $3y$ dĺžky ťažníc t_a a t_b, máme $|AT| = 2x, |ET| = x, |BT| = 2y, |DT| = y$. Podľa Pytagorovej vety pre trojuholníky ATD, BET, ABT platí

$$(2x)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$
$$x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$
$$(2x)^2 + (2y)^2 = c^2.$$

Sčítaním prvých dvoch rovníc dostaneme $5(x^2+y^2) = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$ a po dosadení do tretej rovnice máme $c^2 = 4(x^2+y^2) = \frac{1}{5}(a^2+b^2)$. Numericky potom $c^2 = \frac{1}{5}(22^2+19^2) = 169$, a teda $c = 13\,\mathrm{cm}$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Jeden bod dajte za využitie toho, že ťažisko delí ťažnicu v pomere 1 : 2, po jednom bode za použitie Pytagorovej vety pre trojuholníky ATD, BET, ABT a dva body za výpočet dĺžky strany AB.

---

3. *Prirodzené číslo nazveme vlnitým, ak pre každé tri po sebe idúce číslice a, b, c jeho dekadického zápisu platí* $(a-b)(b-c) < 0$. *Dokážte, že z číslic* $0, 1, \ldots, 9$ *je možné zostaviť viac ako* 25 000 *desaťciferných vlnitých čísel, z ktorých každé obsahuje všetky číslice od nuly po deviatku (číslica* 0 *nesmie byť na prvom mieste).* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Číslice 0, 1, 2, 3 a 4 nazvime malé (skrátene m), číslice 5, 6, 7, 8 a 9 veľké (skrátene v). Pravidelným striedaním malých a veľkých číslic vznikne vždy vlnité číslo.

Čísel tvaru $vmvmvmvmvm$ je $(5!)^2$, čísel tvaru $mvmvmvmvmv$ je $4 \cdot 4! \cdot 5!$ (na prvom mieste nesmie byť 0). Tých vlnitých čísel, ktoré vzniknú pravidelným striedaním malých a veľkých číslic, je teda $5! \cdot 5! + 4 \cdot 4! \cdot 5! = 9 \cdot 24 \cdot 120 = 25\,920 > 25\,000$.

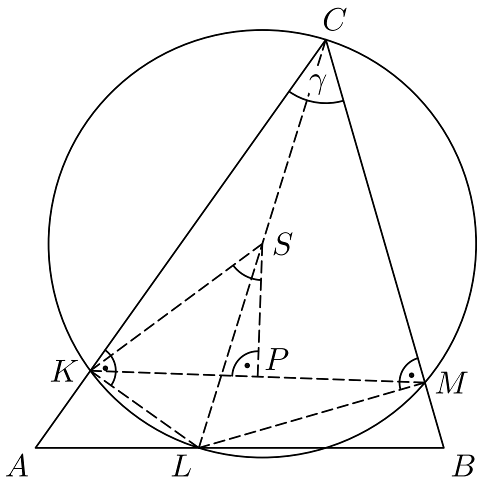
Poznámka. Všetkých desaťciferných vlnitých čísel s rôznymi číslicami je 93 106.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Jeden bod dajte za poznatok, že pravidelným striedaním malých a veľkých číslic vznikne vlnité číslo. Po dvoch bodoch za správne určenie počtu vlnitých čísel tvaru *vmvmvmvmvm* a tvaru *mvmvmvmvmv* a jeden bod za dokončenie dôkazu.

---

4. *Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Pre ľubovoľný bod L jeho strany AB označme K, M päty kolmíc z bodu L na strany AC, BC. Zistite, pre ktorú polohu bodu L je úsečka KM najkratšia.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Keďže sú uhly LKC a LMC pravé, ležia body K a M na Tálesovej kružnici nad priemerom CL (obr. 2). Podľa vety o obvodovom uhle prislúcha tetive KM stredový



Obr. 2

uhol veľkosti 2γ, a preto $|KM| = |CL| \sin\gamma$ (v pravouhlom trojuholníku KPS, kde P je stred úsečky KM a S stred úsečky CL, je totiž $|KS| = \frac{1}{2}|CL|, |\measuredangle KSP| = \gamma$). Úsečka KM je teda najkratšia práve vtedy, keď je najkratšia úsečka CL; to nastáva práve vtedy, keď L je päta kolmice z bodu C na stranu AB.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Dva body dajte za poznatok, že body K a M ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom LC, dva body za dôkaz rovnosti $|KM| = |LC| \sin\gamma$ a dva body za z toho vyplývajúcu polohu bodu L.