2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

1. *Určte počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné šiestimi a v ich zápise sa vyskytujú práve dve jednotky.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Aby číslo bolo deliteľné šiestimi, musí byť párne a mať ciferný súčet deliteľný tromi. Označme teda b číslicu na mieste jednotiek (tá musí byť párna, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$) a a tú číslicu, ktorá je spolu s číslicami 1, 1 ($a \neq 1$) na prvých troch miestach štvorciferného čísla, ktoré spĺňa požiadavky úlohy.

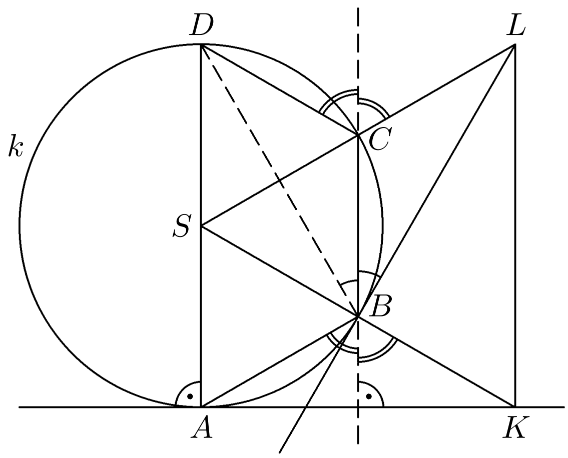
Aby bol súčet číslic $a+1+1+b$ takého čísla deliteľný tromi, musí číslo $a+b$ dávať po delení tromi zvyšok 1. Pre $b \in \{0, 6\}$ tak máme pre a možnosti $a \in \{4, 7\}$ ($a \neq 1$), pre $b \in \{2, 8\}$ máme $a \in \{2, 5, 8\}$ a konečne pre $b = 4$ máme $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Pre každé zvolené b a zodpovedajúce $a \neq 0$ sú zrejme tri možnosti, ako číslice 1, 1 a a na prvých troch miestach usporiadať, to je spolu $(2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3) \cdot 3 = 39$ možností, pre $a = 0$ (keď $b = 4$) potom sú len dve možnosti (číslica nula nemôže byť prvá číslica štvorciferného čísla).

Celkom existuje 41 štvorciferných prirodzených čísel, ktoré spĺňajú podmienky úlohy.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za využitie poznatku, že posledná číslica musí byť párna. Pokiaľ však niekto rozoberie všetkých 81 prípadov zostávajúcich dvoch číslic a k nim správne určí počet vyhovujúcich čísel, má tiež nárok na 6 bodov. Pri popísaní efektívneho postupu za prípadné aritmetické chyby pri určení konečného počtu nestrhávajte viac ako 2 body.

2. *Kružnica k so stredom S je opísaná pravidelnému šesťuholníku $ABCDEF$. Dotyčnica v bode A ku kružnici k pretína priamku SB v bode K a dotyčnica v bode B pretína priamku SC v bode L. Dokážte, že štvoruholníku $KLCB$ sa dá opísať kružnica, ktorá je zhodná s kružnicou k.* (Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Dotyčnica ku kružnici k v bode A je kolmá na priemer AD, a teda aj na stranu BC daného šesťuholníka (obr. 1). Zároveň priamky SB a AB zvierajú s BC šesťdesiatstupňový uhol, takže sú súmerne združené podľa osi BC. Bod K je preto súmerne združený s bodom A podľa osi BC.



Obr. 1

Podobne dotyčnica BL je kolmá na BS, takže zviera s priamkou BC uhol $30°$ rovnako ako priamka BD. Priamka BL je teda súmerne združená s priamkou BD podľa osi BC. Aj priamky SC a CD sú súmerne združené podľa osi BC, takže bod L je podľa tejto osi súmerne združený s bodom D.

Dostali sme tak, že štvoruholník $KLCB$ je súmerne združený s lichobežníkom $ADCB$, ktorému je opísaná kružnica k. Vrcholy štvoruholníka $KLCB$ preto ležia na kružnici súmerne združenej s kružnicou k podľa osi BC. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za rozhodnutie riešiteľa dokazovať hypotézu o zhodnosti štvoruholníkov $ABCD$ a $KLCB$. Pri využití osovej súmernosti dajte 2 body za dôkaz združenosti bodov A, K a 2 body za združenosť bodov D, L. Namiesto súmernosti možno dokazovať zhodnosť príslušných trojuholníkov. Možno tiež najskôr zostrojiť obrazy A', D' vrcholov A a D v súmernosti podľa osi BC a potom ukázať, že $A' = K$ a $D' = L$.

---

3. *Určte všetky dvojice (a, b) prirodzených čísel, ktorých rozdiel $a-b$ je piatou mocninou niektorého prvočísla a pre ktoré platí $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Z rovnosti $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$ vyplýva rovnosť $a - b = 4\bigl(\sqrt{a} + \sqrt{b}\bigr)$. Keďže

$$a - b = \bigl(\sqrt{a} - \sqrt{b}\bigr)\bigl(\sqrt{a} + \sqrt{b}\bigr),$$

dostávame po vydelení kladným číslom $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ rovnosť

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4, \tag{1}$$

čiže

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} + 4. \tag{2}$$

Jej umocnením vyjde $a = b + 16 + 8\sqrt{b}$. Keďže číslo $r = 8\sqrt{b}$ musí byť celé, je $\sqrt{b}$ racionálna odmocnina prirodzeného čísla, takže $b = n^2$ pre vhodné prirodzené číslo n. Z rovnosti (2) tak máme $a = (n + 4)^2$ a $a - b = (n + 4)^2 - n^2 = 2^3(n + 2)$. Číslo $a - b$ je teda piatou mocninou prvočísla len vtedy, keď $n + 2 = 2^2$, čiže $n = 2$.

Jedinou vyhovujúcou dvojicou (a, b) je dvojica $(36, 4)$.

Poznámka. Keď si po odvodení vzťahu (1) uvedomíme, že v zátvorke na pravej strane rovnosti $a - b = 4(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ je kladné racionálne, a teda prirodzené číslo, vidíme, že musí platiť $a - b = 2^5$. Pre odmocniny $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ tak dostaneme sústavu dvoch rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{b} &= 8,\\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= 4,\end{aligned}$$

ktorých sčítaním vyjde $\sqrt{a} = 6$ a odčítaním $\sqrt{b} = 2$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Poznatok, že odmocnina z prirodzeného čísla je buď iracionálne, alebo prirodzené číslo, nie je nutné dokazovať (poz. aj prvú pomocnú úlohu k 1. úlohe domáceho kola).