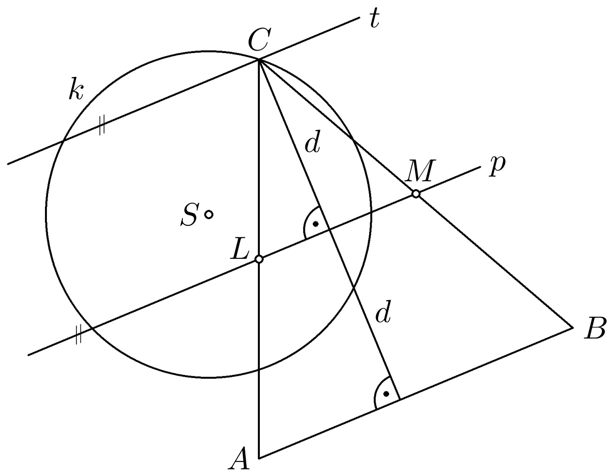
2006/2007
56. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

1. *V rovine sú dané dva rôzne body L, M a kružnica k. Zostrojte trojuholník ABC s čo najväčším obsahom tak, aby jeho vrchol C ležal na kružnici k, bod L bol stredom strany AC a bod M stredom strany BC.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Pri *rozbore* uvažujme ľubovoľný trojuholník ABC s vrcholom C na kružnici k, ktorého strany AC, BC majú stredy postupne v bodoch L, M (obr. 1). Keďže LM je strednou priečkou takého trojuholníka, je jeho obsah rovný štvornásobku obsahu trojuholníka LMC. Tento trojuholník má pevnú stranu LM, takže jeho obsah je najväčší práve vtedy, keď je najväčšia jeho výška z vrcholu C, teda vzdialenosť d bodu C od priamky p určenej bodmi L, M.



Obr. 1

Dodajme, že namiesto porovnania obsahov trojuholníkov ABC a LMC dôjdeme k rovnakej podmienke aj takto: trojuholník ABC má stranu AB pevnej dĺžky $c = 2|LM|$ a výšku $v_c = 2d$. Preto je jeho obsah $\frac{1}{2}cv_c$ rovný $2|LM| \cdot d$, takže je najväčší možný, keď je taká vzdialenosť d.

Pre ktorý bod $C \in k$ je vzdialenosť d najväčšia? Veďme bodom C priamku t rovnobežnú s priamkou p. Ak je vzdialenosť d najväčšia možná, musí celá kružnica k ležať v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou t ako priamka p (voľbou bodu $C \in k$ vnútri opačnej polroviny by sme vzdialenosť d zväčšili). Priamka t je preto nutne dotyčnicou kružnice k (rovnobežnou s danou priamkou p) a bod C je jej dotykovým bodom.

Odtiaľ už vyplýva *konštrukcia*: bod C určíme ako ten z dvoch priesečníkov kružnice k s kolmicou na priamku p vedenou stredom S kružnice k, ktorý má od priamky p väčšiu vzdialenosť (ak ju majú oba priesečníky rovnakú, vyberieme ktorýkoľvek z nich). Body A, B potom zostrojíme ako obrazy bodu C v súmernosti podľa stredu L, resp. M.

Diskusia. Dotyčnice kružnice k rovnobežné s priamkou LM majú od tejto priamky dve *rôzne* vzdialenosti práve vtedy, keď stred S kružnice k na priamke LM *neleží*; vtedy má úloha jediné riešenie. V opačnom prípade, keď stred S na priamke LM leží, má úloha dve riešenia.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za nájdenie podmienky maximálnej vzdialenosti C od LM, 2 body za postup konštrukcie a 1 bod za správne určenie oboch možných počtov riešení. Intuitívne jasné určenie najvzdialenejšieho bodu kružnice k od priamky LM nie je nutné zdôvodňovať (tretí odstavec uvedeného riešenia).

---

2. *Nech p, q, r sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $p + r\sqrt{p+q} + q = 2\,007$.*

a) Určte, aké hodnoty môže nadobúdať súčet $p + q + r$.

b) Určte počet všetkých usporiadaných trojíc (p, q, r) prirodzených čísel, ktoré vyhovujú danej rovnici.

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. a) Ak spĺňajú prirodzené čísla p, q, r danú rovnicu, dostaneme z nej vyjadrenie

$$\sqrt{p+q} = \frac{2\,007 - p - q}{r},$$

takže číslo $\sqrt{p+q}$ je racionálne, a teda celé (odmocnina z prirodzeného čísla je totiž buď číslo celé, alebo číslo iracionálne). Preto z rovností

$$2\,007 = p + r\sqrt{p+q} + q(p+q) + r\sqrt{p+q} = \sqrt{p+q}\left(\sqrt{p+q} + r\right)$$

dostávame rozklad čísla $2\,007$ na dva celočíselné činitele $\sqrt{p+q}$ a $\sqrt{p+q} + r$, pre ktoré zrejme platí

$$1 < \sqrt{p+q} < \sqrt{p+q} + r.$$

Z rozkladu na prvočísla $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ vidíme, že sú možné iba dva prípady, ktoré prehľadne zapíšeme do schémy:

$\sqrt{p+q}$	$\sqrt{p+q}+r$		$p+q$	r		$p+q+r$
3	669	$\iff$	9	666	$\implies$	675
9	223		81	214		295

Možné hodnoty súčtu $p + q + r$ sú teda iba dve čísla: 675 a 295. (Konkrétne trojice (p, q, r), ktoré to dokazujú, nebudeme uvádzať, pretože priamo určíme v časti b) ich počet.)

b) Rovnosť $p + q + r = 675$ nastane práve vtedy, keď bude trojica (p, q, r) spĺňať podmienky $p + q = 9$ a $r = 666$; takých trojíc je práve toľko, ako dvojíc (p, q), pre ktoré $p + q = 9$, teda 8.

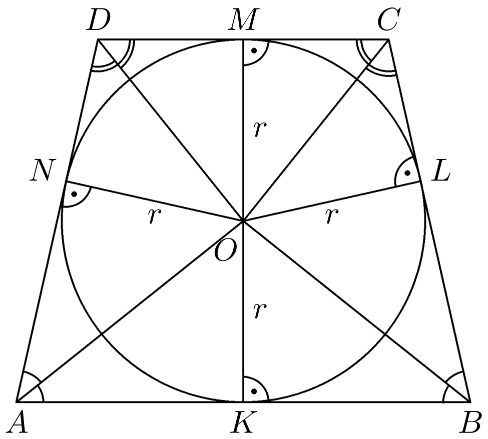
Rovnosť $p + q + r = 295$ nastane práve vtedy, keď bude trojica (p, q, r) spĺňať podmienky $p + q = 81$ a $r = 214$; takých trojíc je práve toľko, ako dvojíc (p, q), pre ktoré $p + q = 81$, teda 80.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 5 bodov za časť a) a 1 bod za časť b). Za časť a) riešenia dajte len 3 body, ak chýba v inak úplnom postupe zdôvodnenie, prečo je hodnota $\sqrt{p+q}$ celé číslo.

3. *Rovnoramennému lichobežníku $ABCD$ so základňami AB, CD sa dá vpísať kružnica so stredom O. Určte obsah S lichobežníka, ak sú dané dĺžky úsečiek OB a OC.*

(*Pavel Leischner*)

Riešenie. Označme postupne K, L, M, N body dotyku vpísanej kružnice so stranami AB, BC, CD, DA (obr. 2). Keďže $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník, jeho vnútorné uhly pri vrcholoch A, B, C, D majú postupne veľkosti α, α, $180° - \alpha$ a $180° -$



Obr. 2

$- \alpha$. Úsečky OA, OB, OC, OD ležiace na osiach týchto uhlov preto spolu so štyrmi navzájom zhodnými úsečkami OK, OL, OM, ON rozdeľujú celý lichobežník na osem pravouhlých trojuholníkov, ktoré sa zhodujú v jednej odvesne a majú ostré vnútorné uhly $\frac{1}{2}\alpha$ a $90° - \frac{1}{2}\alpha$. Týchto osem trojuholníkov možno preto rozdeliť na dve štvorice zhodných trojuholníkov: jednu z nich tvoria trojuholníky OAK, OAN, OBK, OBL a druhú trojuholníky OCL, OCM, ODM a ODN. Odtiaľ vyplýva, že obsah S lichobežníka $ABCD$ je rovný štvornásobku súčtu obsahov trojuholníkov OBL a OCL, teda štvornásobku obsahu trojuholníka OBC. Podľa vnútorných uhlov pri vrcholoch B a C vidíme, že trojuholník OBC je pravouhlý s odvesnami OB a OC, takže má obsah $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$ a hľadaný celkový obsah S je $S = 2|OB| \cdot |OC|$.

Poznámka. Malá obmena časti predchádzajúceho postupu: ak je O stred kružnice vpísanej dotyčnicovému štvoruholníku $ABCD$, je ľahké ukázať, že jeho obsah je rovný dvojnásobku súčtu obsahov trojuholníkov OAB a OCD rovnako ako trojuholníkov OBC a ODA. Ostatné dva trojuholníky sú pri našom rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ zhodné.

Iné riešenie. Pre výšku v a strany a, b, c, d lichobežníka $ABCD$ s vpísanou kružnicou $k(O, r)$ platia rovnosti $v = 2r$ a $a+c = b+d$. Z prvej z nich vyplýva, že stred O leží na strednej priečke lichobežníka, ktorej dĺžka $\frac{1}{2}(a+c)$ je podľa druhej rovnosti rovná $\frac{1}{2}(b + d)$. V našom prípade však platí $b = d$, takže stredná priečka je zhodná s oboma ramenami a bod O je jej stredom, lebo rovnoramenný lichobežník je osovo súmerný. Spolu dostávame, že bod O leží na kružnici zostrojenej nad priemerom BC, a preto je OBC pravouhlý trojuholník s obsahom $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$. Jeho výška na preponu BC je však polomerom r vpísanej kružnice k, takže obsah trojuholníka OBC je tiež rovný

$\frac{1}{2}b \cdot r$. Porovnaním oboch vyjadrení dostaneme rovnosť $|OB| \cdot |OC| = b \cdot r$. Pre hľadaný obsah S nášho lichobežníka preto platí

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = b \cdot 2r = 2 \cdot |OB| \cdot |OC|.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho pri prvom postupe 3 body za zdôvodnenie, že daný lichobežník je zložený z dvoch štvoríc zhodných trojuholníkov, alebo za rovnosť typu $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OBC} + S_{ODA}$. Za hlbší poznatok $S = 4 \cdot S_{OBC}$ už dajte 4 body. 1 bodom oceňte zistenie, že OBC je pravouhlý trojuholník, rovnako ako postup, keď riešiteľ iba rozdelí daný lichobežník na štyri dvojice zhodných trojuholníkov a ďalší pokrok v úvahách o ich obsahu nedosiahne.

---

4. *Určte najväčšie dvojciferné číslo k s nasledujúcou vlastnosťou: existuje prirodzené číslo N, z ktorého po škrtnutí prvej číslice zľava dostaneme číslo k-krát menšie. (Po škrtnutí číslice môže zápis čísla začínať jednou či niekoľkými nulami.) K určenému číslu k potom nájdite najmenšie vyhovujúce číslo N.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Ľubovoľné m-ciferné prirodzené číslo N s prvou číslicou c má vyjadrenie $N = c \cdot 10^m + x$, pričom x je práve to číslo, ktoré dostaneme z čísla N po škrtnutí prvej číslice c. Podľa zadania má platiť $N = c \cdot 10^m + x = kx$, čiže $c \cdot 10^m = (k-1)x$. Číslo $k-1$ teda musí byť deliteľom čísla $c \cdot 10^m$, ktoré má však iba jednociferné prvočinitele: prvočísla 2, 5 a prvočinitele z rozkladu číslice c. Budeme preto postupne testovať na prvočinitele čísla $k-1$ pre najväčšie dvojciferné k:

- ▷ $k = 99$: $k - 1 = 98 = 2 \cdot 7^2$ nevyhovuje, lebo $7^2 \nmid c \cdot 10^m$.
- ▷ $k = 98$: $k - 1 = 97$ nevyhovuje, lebo 97 je dvojciferné prvočíslo.
- ▷ $k = 97$: $k-1 = 96 = 2^5 \cdot 3$ vyhovuje, lebo napríklad $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ pre $c = 3$ a $m = 5$; aby sme dostali menšie N, môžeme však zvoliť menšie $m = 4$ a $c = 3 \cdot 2 = 6$ (iné c pre $m = 4$ nevyhovuje). Pre $m \leqq 3$ už vzťah $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ neplatí pre žiadnu nenulovú číslicu c.

Hľadané najväčšie dvojciferné k je teda 97. Podľa predchádzajúcej diskusie určíme najmenšie vyhovujúce N, ktorému prislúcha $m = 4$, $c = 6$ a $x = 6 \cdot 10^4 : 96 = 625$, takže $N = 6 \cdot 10^4 + 625 = 60\,625$.

Odpoveď. Hľadané k je rovné 97 a najmenšie vyhovujúce N je 60 625.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za všeobecné zistenie, že číslo $k-1$ musí byť deliteľom súčinu nenulovej číslice a mocniny čísla 10. Za úplné treba považovať aj riešenie, keď sú vylúčené hodnoty $k = 99$, $k = 98$ oddelenými postupmi a pre hodnotu $k = 97$ je určené (nie však uhádnuté) najmenšie vyhovujúce N. Pri inak úplnom riešení, keď je pre $k = 97$ uvedené síce vyhovujúce, nie však najmenšie možné N (napríklad $N = 303\,125$), dajte 5 bodov.