2016/2017
66. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 26. – 29. 3. 2017.*)

1. Na kôpke leží 100 diamantov, z ktorých 50 je pravých a 50 falošných. Pozvali sme svojrázneho znalca, ktorý jediný dokáže rozpoznať, ktoré sú ktoré. Zakaždým, keď mu ukážeme nejakú trojicu diamantov, dva vyberie a (pravdivo) povie, koľko z nich je pravých. Rozhodnite, či môžeme zaručene odhaliť všetky pravé diamanty bez ohľadu na to, ako znalec volí posudzované dvojice. (*Michal Rolínek, Josef Tkadlec*)

2. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel k, l také, že nerovnosť

$$ka^2 + lb^2 > c^2$$

platí pre dĺžky strán a, b, c ľubovoľného trojuholníka. (*Patrik Bak*)

3. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(y - xy) = f(x)y + (x - 1)^2 f(y).$$

(*Pavel Calábek*)

4. Každej postupnosti zloženej z n núl a n jednotiek priradíme číslo, ktoré je počtom úsekov rovnakých cifier v nej. (Napríklad postupnosť 00111001 má 4 také úseky 00, 111, 00, 1.) Pre dané n sčítame všetky čísla priradené jednotlivým takým postupnostiam. Dokážte, že výsledný súčet je rovný

$$(n + 1)\binom{2n}{n}.$$

(*Patrik Bak*)

5. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s priesečníkom výšok H. Os uhla BHC pretína stranu BC v bode D. Označme postupne E a F obrazy bodu D v osových súmernostiach podľa priamok AB a AC. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AEF prechádza stredom kružnicového oblúka BAC. (*Patrik Bak*)

6. Dané je nenulové celé číslo k. Dokážte, že rovnici

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

vyhovuje nepárny počet usporiadaných dvojíc celých čísel (x, y) práve vtedy, keď k je deliteľné siedmimi. (*Patrik Bak*)