66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

---

1. *Na kôpke leží 100 diamantov, z ktorých 50 je pravých a 50 falošných. Pozvali sme svojrázneho znalca, ktorý jediný dokáže rozpoznať, ktoré sú ktoré. Zakaždým, keď mu ukážeme nejakú trojicu diamantov, dva vyberie a (pravdivo) povie, koľko z nich je pravých. Rozhodnite, či môžeme zaručene odhaliť všetky pravé diamanty bez ohľadu na to, ako znalec volí posudzované dvojice.* (*Michal Rolínek, Josef Tkadlec*)

Riešenie. Ukážeme stratégiu znalca, pri ktorej sa nám odhaliť všetkých 50 pravých diamantov nepodarí. Znalec si zapamätá jeden pravý diamant P a jeden falošný diamant F (napríklad prvý pravý a prvý falošný diamant, ktoré sú mu predložené). Kedykoľvek sa ho pýtame na trojicu, v ktorej je práve jeden diamant z dvojice P a F, vyjadrí sa o zvyšných dvoch. Ak sú v trojici P aj F, tak ich oba vyberie a pravdivo o nich povie, že jeden z nich je pravý. Ak v trojici nie je ani P, ani F, postupuje ľubovoľne.

Pri opísanej stratégii sa nedá zistiť, ktorý z kameňov P a F je pravý a ktorý falošný, pretože ich žiadna zo znalcových odpovedí nerozlíši.

---

2. *Nájdite všetky dvojice reálnych čísel k, l také, že nerovnosť*

$$ka^2 + lb^2 > c^2$$

platí pre dĺžky strán a, b, c ľubovoľného trojuholníka. (*Patrik Bak*)

Riešenie. Predpokladajme, že daná nerovnosť pre nejakú dvojicu k, l platí pre dĺžky strán a, b, c ľubovoľného trojuholníka. Keď do nej dosadíme $a = 1$, $c = 1$ a ľubovoľné kladné $b < 2$ (trojuholník s takýmito dĺžkami strán zjavne existuje), dostaneme nerovnosť $k + lb^2 > 1$. Keby bolo $k < 1$, ľahko by sme našli $b > 0$ dostatočne malé na to, aby táto nerovnosť už neplatila, preto musí byť $k \geqq 1$. Analogicky musí byť $l \geqq 1$.

V karteziánskej súradnicovej sústave zvoľme body $A[-1, 0]$, $B[1, 0]$, $C[x, y]$; body A, B, C sú vrcholmi trojuholníka pre ľubovoľné reálne x a ľubovoľné reálne $y \neq 0$ a až na podobnosť tak možno umiestniť ľubovoľný trojuholník. Po dosadení dĺžok strán trojuholníka ABC (ľahko ich vypočítame z Pytagorovej vety) prejde zadaná nerovnosť na tvar

$$k\big((x-1)^2 + y^2\big) + l\big((x+1)^2 + y^2\big) > 4,$$

čiže

$$(k+l)x^2 + 2(l-k)x + k + l - 4 > -(k+l)y^2. \tag{1}$$

Tá musí platiť pre každé x a ľubovoľné $y \neq 0$. Pritom pre pevné x dokážeme voľbou hodnoty y dosiahnuť ľubovoľné záporné hodnoty výrazu $V(y) = -(k+l)y^2$ na pravej strane predchádzajúcej nerovnosti, lebo (ako už vieme) $k+l > 0$. Preto musí pre každé x platiť

$$(k+l)x^2 + 2(l-k)x + (k+l-4) \geqq 0, \tag{2}$$

čo vzhľadom na kladný koeficient pri mocnine x^2 na ľavej strane nastane práve vtedy, keď príslušný diskriminant $D = 4(l-k)^2 - 4(k+l-4)(k+l)$ nie je kladný. Nerovnosť $D \leqq 0$ ľahko upravíme na ekvivalentnú podmienku $kl \geqq k + l$.

Zistili sme teda, že ak daná nerovnosť platí pre ľubovoľnú trojicu dĺžok strán trojuholníka, spĺňajú čísla k a l okrem nerovností $k \geqq 1$ a $l \geqq 1$ aj podmienku

$$kl \geqq k + l. \tag{3}$$

Z úvahy o diskriminante naopak vyplýva, že ak čísla $k \geqq 1$ a $l \geqq 1$ podmienku (3) spĺňajú, platí nerovnosť (2) pre každé reálne x. Keďže pre také k, l je hodnota $V(y)$ pre každé $y \neq 0$ záporná, vyplýva z platnosti (2) pre ľubovoľné x nerovnosť (1) pre všetky prípustné dvojice x, y, a tá už je ekvivalentná zadanej vlastnosti. Uvedená podmienka je teda aj postačujúca.

Konjunkcia nerovností $k \geqq 1$, $l \geqq 1$ a $kl \geqq k + l$ je teda podmienka nutná i postačujúca. Keďže z tretej nerovnosti vyplýva $k \neq 1$ (rovnako ako $l \neq 1$), môžeme hľadanú množinu vyhovujúcich dvojíc (k, l) zapísať zrejme takto:

$$\{(k, l)\colon k > 1 \wedge l \geqq k/(k-1)\}.$$

Iné riešenie. Predpokladajme, že daná nerovnosť pre nejakú dvojicu k, l platí pre dĺžky strán a, b, c ľubovoľného trojuholníka. Z platnosti nerovnosti pre trojuholník, v ktorom $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$, vyplýva, že $k + l > 2$, čiže aspoň jedno z čísel k, l musí byť väčšie ako 1. Nech je teda napríklad $k > 1$ (prípad $l > 1$ sa posúdi analogicky).

Podľa kosínusovej vety platí $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Dosadením do zadanej nerovnosti dostaneme po úprave ekvivalentnú nerovnosť

$$a^2(k-1) + b^2(l-1) + 2ab\cos\gamma > 0.$$

Vďaka predpokladu $k > 1$ možno pre ľubovoľné $\gamma \in (90^\circ, 180^\circ)$ zvoliť trojuholník s tupým uhlom γ a so stranami $a = -\cos\gamma > 0$ a $b = k - 1$. Dosadením do poslednej nerovnosti po jednoduchej úprave vidíme, že pre čísla k a l musí platiť $(k-1)(l-1) > \cos^2\gamma$. Pritom pre $\gamma \in (90^\circ, 180^\circ)$ môže výraz $\cos^2\gamma$ nadobúdať každú hodnotu z intervalu $(0, 1)$. Aby posledná nerovnosť platila pre všetky uvedené hodnoty uhla γ, musí nutne platiť $(k-1)(l-1) \geqq 1$. A keďže $k > 1$, musí byť aj $l > 1$.

Dokážeme, že spolu s oboma podmienkami $k > 1$ a $l > 1$ je odvodená podmienka

$$(k-1)(l-1) \geqq 1 \tag{4}$$

aj postačujúca. Pri ich splnení sú čísla $a^2(k-1)$ a $b^2(l-1)$ kladné, a platí tak pre ne nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom, preto

$$\begin{aligned} a^2(k-1) + b^2(l-1) + 2ab\cos\gamma &\geqq 2ab\sqrt{(k-1)(l-1)} + 2ab\cos\gamma \geqq \\ &\geqq 2ab + 2ab\cos\gamma = 2ab(1 + \cos\gamma) > 0, \end{aligned}$$

čím je dôkaz ukončený.

Opíšme tentoraz hľadanú množinu vyhovujúcich dvojíc (k, l) geometricky, a to bodmi so súradnicami $[k, l]$ v karteziánskej sústave súradníc Okl. Rovnosť v (4) popisuje rovnoosovú hyperbolu so stredom v bode $[1, 1]$ a asymptotami s rovnicami $k = 1$ a $l = 1$. Preto nerovnosť (4) spolu s podmienkami $k > 1$ a $l > 1$ určuje časť prvého kvadrantu „nad“ tou vetvou hyperboly, ktorá v ňom celá leží, pritom samotné body vetvy do určenej množiny, ktorú sme mali nájsť, taktiež patria.

Iné riešenie. Vysvetlime najskôr, že dvojica reálnych čísel (k, l) má požadovanú vlastnosť práve vtedy, keď pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí

$$ka^2 + lb^2 \geqq (a+b)^2. \tag{5}$$

Táto podmienka je určite postačujúca, lebo pre strany a, b, c každého trojuholníka platí $a + b > c > 0$, a teda aj $(a+b)^2 > c^2$, čo spolu s (5) vedie na nerovnosť zo zadania úlohy. Keby naopak pre niektoré kladné čísla a, b nerovnosť (5) neplatila, bola by sústava nerovností

$$ka^2 + lb^2 < x^2 < (a+b)^2$$

splnená pre každé x z nejakého otvoreného intervalu s pravým krajným bodom $a + b$, a tak by sme v ňom určite našli $x = c$ väčšie ako $|a - b|$, pretože $|a - b| < a + b$. Trojuholník so stranami a, b, c by potom nespĺňal nerovnosť zo zadania úlohy. Naša podmienka spojená s nerovnosťou (5) je tak nielen postačujúca, ale aj nutná na to, aby dvojica čísel (k, l) vyhovovala zadaniu.

Ak upravíme nerovnosť (5), ktorá má platiť pre všetky $a, b > 0$, na tvar

$$(k-1)a^2 + (l-1)b^2 \geqq 2ab, \tag{6}$$

vidíme, že je nutne $k > 1$, pretože v prípade $k \leqq 1$ by ľavá strana (6) pri pevnom $b > 0$ bola v premennej $a \in (0, \infty)$ zhora ohraničená, zatiaľ čo pravá strana nie. Rovnako tak je nutne $l > 1$. Preto možno nerovnosť (6) upraviť na tvar

$$\left(a\sqrt{k-1} - b\sqrt{l-1}\right)^2 \geqq 2\left(1 - \sqrt{(k-1)(l-1)}\right)ab.$$

Ukážeme, že za predpokladu $k, l > 1$ posledná nerovnosť platí pre všetky $a, b > 0$ práve vtedy, keď je $(k-1)(l-1) \geqq 1$. Nutnosť tejto podmienky vyplýva po dosadení (kladných) hodnôt $a = \sqrt{l-1}$ a $b = \sqrt{k-1}$, jej postačujúcosť je zrejmá z toho, že pravá strana potom bude nekladná, zatiaľ čo ľavá strana je nezáporná. Dospeli sme tak k rovnakému vymedzeniu vyhovujúcich dvojíc (k, l) ako v predchádzajúcom riešení.

---

3. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí*

$$f(y - xy) = f(x)y + (x-1)^2 f(y).$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Dosadením $x = 1$ dostaneme, že pre všetky reálne y platí $f(0) = f(1)y$, teda nutne $f(0) = f(1) = 0$. Dosadením $y = 1$ do danej rovnice potom pre každé x dostaneme

$$f(1-x) = f(x).$$

Nech t je ľubovoľné reálne číslo, dosadením $x = 1 - t$ dostaneme

$$f(ty) = f(1-t)y + t^2 f(y) = f(t)y + t^2 f(y) \tag{1}$$

pre každé reálne y. Zámenou premenných t a y ďalej získame

$$f(y)t + y^2 f(t) = f(yt) = f(ty) = f(t)y + t^2 f(y),$$

takže $f(t)(y^2-y)=f(y)(t^2-t)$, čo pre $y=2$ dáva

$$f(t)=\tfrac{1}{2}f(2)(t^2-t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Dosadením do pôvodnej rovnice zo zadania ľahko overíme, že konštanta $a=f(2)/2$ v odvodenom predpise $f(x)=ax(x-1)$ môže byť ľubovoľné reálne číslo:

$$\begin{aligned}f(x)y+(x-1)^2f(y)&=ax(x-1)y+(x-1)^2ay(y-1)=\\&=a(x-1)y(x+xy-x-y+1)=\\&=a(1-x)y\big((1-x)y-1\big)=f\big((1-x)y\big)=f(y-xy).\end{aligned}$$

---

4. *Každej postupnosti zloženej z n núl a n jednotiek priradíme číslo, ktoré je počtom úsekov rovnakých cifier v nej. (Napríklad postupnosť* 00111001 *má 4 také úseky* 00, 111, 00, 1.*) Pre dané n sčítame všetky čísla priradené jednotlivým takým postupnostiam. Dokážte, že výsledný súčet je rovný*

$$(n+1)\binom{2n}{n}.$$

(*Patrik Bak*)

Riešenie. Uvažujme konkrétnu postupnosť a počítajme zľava, koľko úsekov obsahuje. Nový úsek započítame po jeho ukončení, čiže keď narazíme na zmenu cifry alebo na pravý okraj. Počet úsekov v postupnosti je teda o jedna väčší ako počet tých jej cifier, ktorým predchádza odlišná cifra (budeme hovoriť, že v miestach takých cifier nastáva *zmena úseku*). Namiesto počítania úsekov v jednotlivých postupnostiach budeme počítať postupnosti, ktoré v danom mieste zmenu úseku obsahujú.

Možných miest pre zmenu úseku je $2n-1$ (všetky miesta okrem prvého), pre voľbu cifry v mieste zmeny úseku sú dve možnosti, pričom predchádzajúca cifra je tým jednoznačne určená. Na zvyšných miestach je v každej takej postupnosti ľubovoľne rozmiestnených $n-1$ jednotiek a $n-1$ núl, daná zmena úseku sa preto nachádza v $\binom{2n-2}{n-1}$ rôznych postupnostiach. Celkovo tak máme $2(2n-1)$ rôznych zmien úsekov a každá je obsiahnutá v $\binom{2n-2}{n-1}$ postupnostiach. K tomu je nutné pripočítať jednotku za každú postupnosť kvôli úsekom končiacim na pravom okraji; postupností je pritom $\binom{2n}{n}$. Spolu tak pre výsledný súčet dostávame

$$\begin{aligned}2(2n-1)\binom{2n-2}{n-1}+\binom{2n}{n}&=2n\binom{2n-1}{n}+\binom{2n}{n}=2n\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n}{n}=\\&=n\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n}=(n+1)\binom{2n}{n},\end{aligned}$$

pričom sme dvakrát využili zrejmú identitu

$$k\binom{m}{k}=m\binom{m-1}{k-1}.$$

Iné riešenie. Využijeme úvodnú úvahu z predchádzajúceho riešenia, z ktorej vyplýva, že výsledný súčet je rovný súčtu počtu možných postupností a počtu dvojíc 01 a 10 v nich dokopy obsiahnutých. Zo symetrie je jasné, že stačí určiť len počet dvojíc 01 a výsledok vynásobiť dvoma.

Uvažujme postupnosť, ktorá obsahuje presne k dvojíc 01. Tieto dvojice rozdeľujú zvyšok postupnosti na $k+1$ úsekov, pričom v každom je nezáporný počet núl a jednotiek v jednoznačne určenom poradí (vždy najskôr prípadné jednotky a potom prípadné nuly). Stačí preto určiť počet spôsobov rozmiestnenia $n-k$ núl a $n-k$ jednotiek do $k+1$ úsekov; podľa známeho vzorca pre kombinácie s opakovaním je to $\binom{n}{k}$ možností pre nuly a $\binom{n}{k}$ možností pre jednotky, čiže celkom $\binom{n}{k}^2$ možností. Celkový súčet je teda

$$2\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 + \binom{2n}{n}. \tag{1}$$

Na záverečný dôkaz, že (1) dáva požadovaný výsledok, využijeme známu identitu $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ a symetriu $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ kombinačných čísel:

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{n-k}^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 + \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}^2 = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Dosadením do (1) tak pre hľadaný súčet dostávame $n\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n}{n}$.

Iné riešenie. Pre $n = 1$ je tvrdenie zrejmé. Nech $n \geqq 2$. Pre každý možný úsek rovnakých cifier spočítame, v koľkých postupnostiach sa na danom mieste nachádza. Zrejme stačí uvažovať iba úseky núl a výsledok potom vynásobiť dvoma.

Vezmime teda úsek k núl, pričom $1 \leqq k \leqq n$. Ak sa tento úsek nachádza na jednom z oboch okrajov, ohraničuje ho práve jedna jednotka a na zvyšných $2n-k-1$ miestach je ľubovoľne rozmiestnených $n-k$ núl a $n-1$ jednotiek. Ak sa úsek nachádza na jednej zo zvyšných $2n-k-1$ pozícií, je ohraničený z každej strany jednotkou a na zvyšných $2n-k-2$ miestach je ľubovoľne rozmiestnených $n-k$ núl a $n-2$ jednotiek. Príspevok p_k úsekov tvorených k nulami do skúmaného súčtu je teda

$$\begin{aligned}p_k &= 2\binom{2n-k-1}{n-1} + (2n-k-1)\binom{2n-k-2}{n-2} = \\ &= 2\binom{2n-k-1}{n-1} + (n-1)\binom{2n-k-1}{n-1} = (n+1)\binom{2n-k-1}{n-1}.\end{aligned}$$

Na určenie celkového súčtu $2(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$ potrebujeme vypočítať

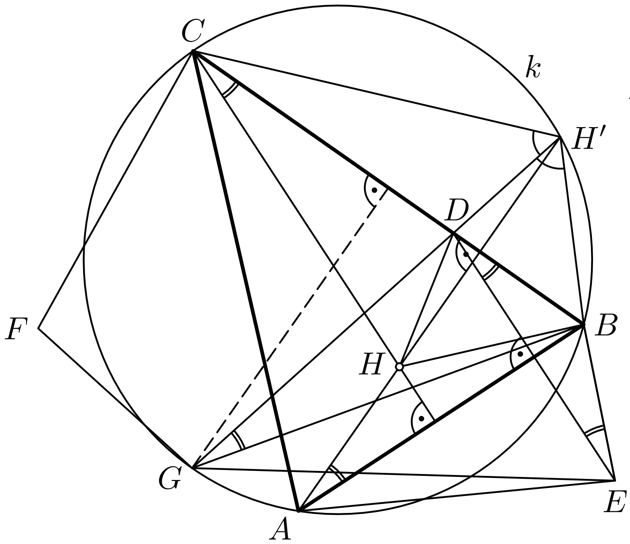
$$S_n = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{2n-2}{n-1}.$$

Súčet na pravej strane udáva počet všetkých n-prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, keď ich budeme počítať roztriedené do skupín podľa ich najväčšieho prvku, ktorým je jedno z čísel $n, n+1, \ldots, 2n-1$. Preto platí $S_n = \binom{2n-1}{n}$, takže hľadaný súčet je $2(n+1)\binom{2n-1}{n} = (n+1)\binom{2n}{n}$.

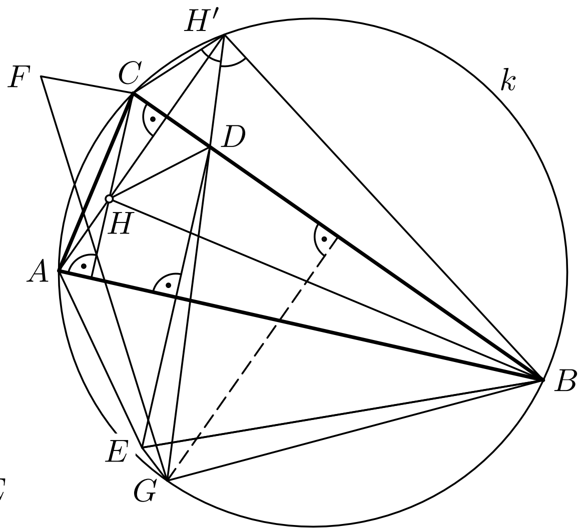
5. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s priesečníkom výšok H. Os uhla BHC pretína stranu BC v bode D. Označme postupne E a F obrazy bodu D v osových súmernostiach podľa priamok AB a AC. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AEF prechádza stredom kružnicového oblúka BAC.* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Označme k kružnicu opísanú trojuholníku ABC. Polpriamka AH pretína kružnicu k v bode $H' \neq A$, o ktorom je známe, že je obrazom bodu H v osovej súmernosti podľa strany BC. Preto priamka $H'D$ (ako obraz osi HD uhla BHC) je osou uhla $BH'C$ a na základe známej vlastnosti osi uhla prechádza stredom G oblúka BAC (obr. 1).

Označme zvyčajným spôsobom α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Keďže body B, G, A, H' ležia na kružnici k (a body G, A na oblúku BAC kružnice k), platí $|\measuredangle BGD| = |\measuredangle BGH'| = |\measuredangle BAH'| = 90° - \beta$. Z definície bodu E potom vyplýva $|\measuredangle BED| = |\measuredangle BDE| = 90° - \beta$, a keďže body E aj G ležia v polrovine BCA, ležia body B, D, G, E na kružnici. Ich poradie závisí na veľkostiach uhlov EBD a GBD: pokiaľ $|\measuredangle EBD| > |\measuredangle GBD|$, čiže $2\beta > 90° - \frac{1}{2}\alpha$ (bod G je stredom oblúka BAC), bude ich poradie B, D, G, E, inak B, D, E, G (pre $2\beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, čiže $\gamma = 3\beta$, ale vyjde $E = G$, v tom prípade je však tvrdenie úlohy splnené triviálne). Podľa toho je potom buď $|\measuredangle EGD| = 180° - |\measuredangle EBD| = 180° - 2\beta$ (obr. 1), alebo $|\measuredangle EGD| = |\measuredangle EBD| = 2\beta$ (obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

Analogicky možno ukázať, že aj body C, D, G, F ležia na kružnici, a to práve v tomto poradí, ak $2\gamma > 90° - \frac{1}{2}\alpha$, inak v poradí C, D, F, G (pri $F = G$ je tvrdenie úlohy určite splnené). Pre veľkosť uhla DGF potom podľa toho platí buď $|\measuredangle DGF| = 180° - 2\gamma$, alebo $|\measuredangle DGF| = 2\gamma$.

Z podmienok $2\beta > 90° - \frac{1}{2}\alpha$ a $2\gamma > 90° - \frac{1}{2}\alpha$ pritom musí byť splnená aspoň jedna, inak by bolo $2\beta + 2\gamma \leqq 2(90° - \frac{1}{2}\alpha) = \beta + \gamma$.

V každom prípade môžeme z oboch tetivových štvoruholníkov so spoločnou stranou DG vyjadriť veľkosť uhla EGF. Pritom veľkosť uhla EAF poznáme, z definície bodov E a F totiž vyplýva

$$|\measuredangle EAF| = |\measuredangle EAD| + |\measuredangle DAF| = 2|\measuredangle BAD| + 2|\measuredangle DAC| = 2|\measuredangle BAC| = 2\alpha$$

a zároveň vidíme, že priamka EF oddeľuje body A a D, pretože uhol α je ostrý. Musíme preto rozobrať tri prípady.

1. Štvoruholníky $BDGE$ a $CDGF$ sú tetivové, takže platí

$$|\measuredangle EGF| = |\measuredangle EGD| + |\measuredangle DGF| = 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\gamma = 2\alpha = |\measuredangle EAF|.$$

To znamená, že je konvexný aj štvoruholník $DFGE$, takže jeho uhlopriečka EF oddeľuje protiľahlé vrcholy D a G. Preto oba body G aj A ležia v jednej polrovine vzhľadom na EF. Z vety o obvodových uhloch tak vyplýva, že body E, G, A, F ležia na kružnici.

2. Štvoruholníky $BDEG$ a $CDGF$ sú tetivové. V tomto prípade $|\measuredangle EGD| = 2\beta$ a $|\measuredangle DGF| = 180^\circ - 2\gamma$, a keďže $2\beta + 2\gamma > 180^\circ$, je $|\measuredangle EGD| > |\measuredangle DGF|$, takže bod G leží v polrovine EFD (obr. 2) a platí

$$|\measuredangle EGF| = |\measuredangle EGD| - |\measuredangle DGF| = 2\beta - (180^\circ - 2\gamma) = 180^\circ - 2\alpha,$$

čiže $|\measuredangle EAF| + |\measuredangle EGF| = 180^\circ$, čo spolu s tým, že body A a G sú v rôznych polrovinách vzhľadom na priamku EF, implikuje, že body F, A, E, G ležia na jednej kružnici.

3. Štvoruholníky $BDGE$ a $CDFG$ sú tetivové. Tento prípad je ekvivalentný predošlému, keď zameníme B s C a E s F.

Poznámky. Ak budeme pracovať s orientovanými uhlami dvoch priamok, môžeme sa vyhnúť rozboru uvedených troch prípadov. Zistenú skutočnosť, že body B, D, E, G ležia na kružnici, možno charakterizovať rovnosťou (orientovaných) uhlov $\widehat{EGD} = \widehat{EBD}$ (samozrejme počítame modulo 180°) a podobne pre druhú kružnicu $\widehat{DGF} = \widehat{DCF}$. Je teda $\widehat{EGF} = \widehat{EGD} + \widehat{DGF} = \widehat{EBD} + \widehat{DCF} = 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\gamma = 2\alpha$, čo sme potrebovali dokázať, lebo z definície bodov E a F zrejme $\widehat{EAF} = \widehat{EAD} + \widehat{DAF} = 2\alpha$.

Ukážeme ešte, že kľúčový poznatok celého riešenia o štvoriciach bodov (B, D, E, G) a (C, D, F, G) možno dokázať aj iným, trigonometrickým postupom.

Označme $|\measuredangle BGD| = \varphi$, $|\measuredangle DGC| = \psi$ a P pätu výšky AH (obr. 3). Keďže HD je os uhla BHC, platí

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BH|}{|CH|} = \frac{|PH|}{\sin|\measuredangle PBH|} : \frac{|PH|}{\sin|\measuredangle PCH|} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(90^\circ - \gamma)}.$$

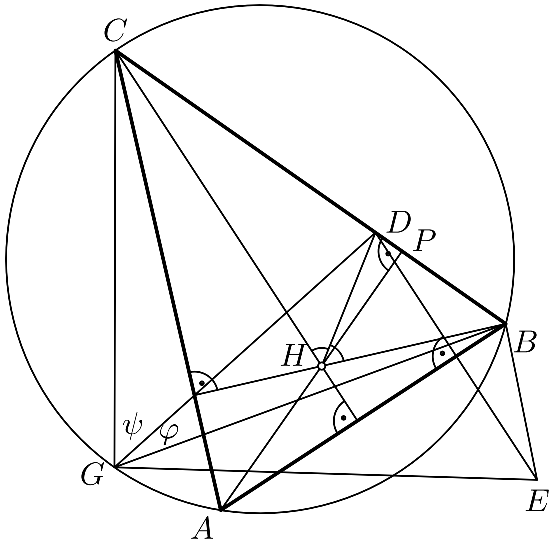
Z rovnosti $|GB| = |GC|$ a z dvojakého vyjadrenia pomeru obsahov trojuholníkov BGD a CGD vyplýva

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Pritom $\varphi + \psi = \alpha = (90^\circ - \gamma) + (90^\circ - \beta)$. Spojením oboch rovností tak pre $\varphi \in (0^\circ, \alpha)$ dostávame rovnicu

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(90^\circ - \gamma)}.$$

Podiel na ľavej strane je v uvedenom intervale rastúca funkcia premennej φ, takže rovnica má (pre daný trojuholník) jediné riešenie. Zjavne $\varphi = 90^\circ - \beta$ v danom intervale leží a rovnici vyhovuje. Preto tiež $\psi = 90^\circ - \gamma$.

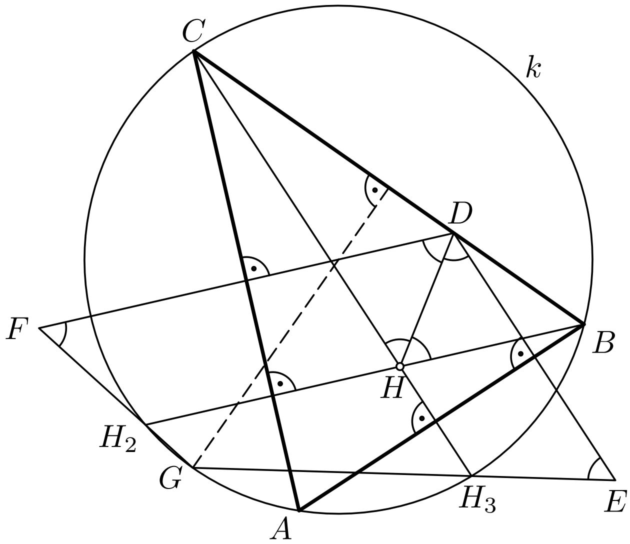


Obr. 3

Trojuholník DEB je rovnoramenný so základňou DE, preto $|\measuredangle BED| = |\measuredangle BDE| = 90° - \beta = |\measuredangle BGD|$. Body E, G pritom ležia v tej istej polrovine vzhľadom na priamku BD, preto ležia body B, D, E, G na kružnici. Rovnaké tvrdenie o bodoch D, C, F, G vyplýva z dokázanej rovnosti $\psi = 90° - \gamma$.

Iné riešenie. Z definície bodov E a F je zrejmé, že pre (orientovaný) uhol EAF platí $\widehat{EAF} = 2\alpha$. Označme postupne H_2, H_3 body súmerne združené s priesečníkom výšok H daného trojuholníka podľa jeho strán AC, resp. AB. Tie, ako je známe, ležia na kružnici k opísanej trojuholníku ABC (obr. 4).

Keďže DH je os uhla BHC a $CH \parallel DE$, je $|\measuredangle H_3ED| = |\measuredangle HDE| = |\measuredangle DHC| = \frac{1}{2}|\measuredangle BHC| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Rovnakú veľkosť má však aj orientovaný uhol $\widehat{CH_3G}$ nad oblúkom CG, lebo ten je polovicou oblúka CAB, preto $\widehat{CH_3G} = \widehat{DEH_3}$. A keďže $CH_3 \parallel DE$, znamená to, že body G, H_3 a E ležia na jednej priamke. Podobne ležia na jednej priamke aj body G, H_2 a F, takže $\widehat{EGF} = \widehat{H_3GH_2} = \widehat{H_3AH_2} = \widehat{H_3AH} + \widehat{HAH_2} = 2\alpha = \widehat{EAF}$, čo sme chceli dokázať.

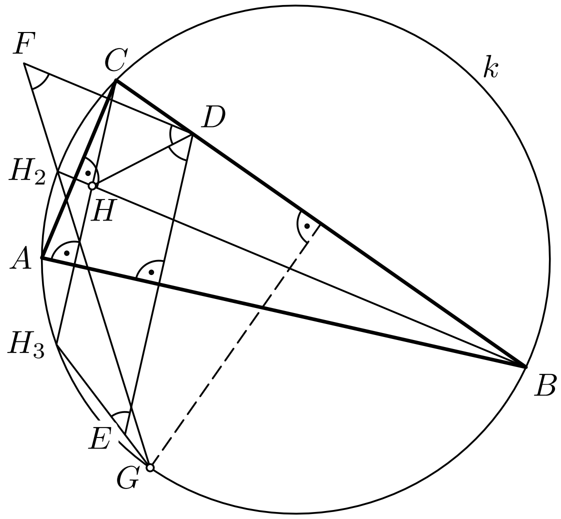


Obr. 4

Poznámka. Obr. 4 zvádza k jednoduchému záveru, že uhol EGF ľahko dopočítame z vnútorných uhlov štvoruholníka $EDFG$:

$$|\measuredangle EGF| = 360° - |\measuredangle GED| - |\measuredangle DFG| - |\measuredangle EDF| = 360° - 4(90° - \tfrac{1}{2}\alpha) = 2\alpha.$$

Predpoklady úlohy však konvexnosť štvoruholníka $EDFG$ bohužiaľ nezaručujú (obr. 5).



Obr. 5

---

6. *Dané je nenulové celé číslo k. Dokážte, že rovnici*

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

vyhovuje nepárny počet usporiadaných dvojíc celých čísel (x, y) práve vtedy, keď k je deliteľné siedmimi. (*Patrik Bak*)

Riešenie. Po vynásobení oboch strán danej rovnice výrazom $x + y$ dostaneme rovnicu

$$x^2 - xy + 2y^2 = k(x + y). \tag{1}$$

Každé riešenie (x, y) danej rovnice je aj riešením rovnice (1), tej však môžu navyše vyhovovať aj dvojice, pre ktoré $x + y = 0$, t. j. $y = -x$.

Dvojica $(x, -x)$ je riešením (1) práve vtedy, keď platí $x^2 + x^2 + 2x^2 = k \cdot 0$, čiže $x = 0$. Rovnica (1) má preto práve o jedno riešenie viac ako daná rovnica, a tak stačí dokázať, že rovnica (1) má párny počet celočíselných riešení práve vtedy, keď $7 \mid k$.

Rovnicu (1) ekvivalentne upravíme na tvar kvadratickej rovnice

$$x^2 - x(y + k) + 2y^2 - ky = 0 \tag{2}$$

s neznámou x. Pre jej diskriminant platí

$$\begin{aligned} D(y) = (y + k)^2 - 4(2y^2 - ky) = k^2 + 6ky - 7y^2 = (k - y)(k + 7y) = \\ = -7(y - \tfrac{3}{7}k)^2 + \tfrac{16}{7}k^2, \end{aligned} \tag{3}$$

čo je pre každé k zhora ohraničená kvadratická funkcia. Rovnica (2) má teda pre každé celé k nezáporný diskriminant $D(y)$ iba pre konečne veľa celých čísel y, a môže tak mať iba konečný počet celočíselných riešení (x, y).

Ak je $D(y) > 0$ pre nejaké celé číslo y, má rovnica (2) práve dve reálne riešenia, ktoré môžu byť celočíselné len súčasne, keďže ich súčet $y + k$ je celé číslo. Pre každé také y má teda (2) vždy párny počet riešení.

Z vyjadrenia (3) vidíme, že $D(y) = 0$ pre $y = k$ alebo pre $y = -\frac{1}{7}k$. V prvom prípade sa rovnica (2) redukuje na rovnicu $(x - k)^2 = 0$ s dvojnásobným koreňom $x = k$, rovnica (1) má teda jediné riešenie (k, k) so zložkou $y = k$. V druhom prípade je y celočíselné práve vtedy, keď je číslo k deliteľné siedmimi, a potom má rovnica (2) dvojnásobný koreň $x = \frac{3}{7}k$, teda $(\frac{3}{7}k, -\frac{1}{7}k)$ je jediné riešenie rovnice (1) so zložkou $y = -\frac{1}{7}k$. Navyše obe riešenia (k, k) aj $(\frac{3}{7}k, -\frac{1}{7}k)$ sú rôzne, keďže $k \neq 0$.

Vidíme teda, že rovnica (1) má párny počet celočíselných riešení práve vtedy, keď je číslo k deliteľné siedmimi. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení skúmame, kedy má rovnica (1) párny počet celočíselných riešení.

Rovnicu (1) upravíme na tvar

$$7(2x - y - k)^2 + (7y - 3k)^2 = 16k^2. \tag{4}$$

Keďže pre dané k zrejme existuje iba konečný počet celých čísel a, b takých, že

$$7a^2 + b^2 = 16k^2, \tag{5}$$

má rovnica (4) iba konečný počet celočíselných riešení, ktoré získame riešením sústav

$$2x - y - k = a, \tag{6}$$

$$7y - 3k = b, \tag{7}$$

prislúchajúcich všetkým celočíselným riešeniam (a, b) rovnice (5). Z ich tvaru vyplýva, že zložky a, b majú vždy rovnakú paritu. Vďaka tomu vidíme, že ak má rovnica (7) celočíselné riešenie y, ktoré tak má rovnakú paritu nielen ako číslo $k+b$, ale aj ako číslo $k + a$, je číslo $y + k + a$ párne, a teda aj rovnica (6) má pre dotyčné k a b celočíselné riešenie x.

Z poslednej úvahy vyplýva, že dve sústavy (6) a (7), ktoré zodpovedajú „združeným“ riešeniam (a, b) a $(-a, b)$ (pričom $a \neq 0$) rovnice (5), majú buď po jednom riešení (s rovnakým y a rôznymi x), alebo žiadne riešenie nemajú. Jediné takto nezdružené celočíselné riešenia rovnice (5) sú zrejme $(0, 4k)$ a $(0, -4k)$ (pripomeňme, že $k \neq 0$ podľa zadania), takže parita počtu celočíselných riešení rovnice (4) je zhodná s paritou celkového počtu celočíselných riešení dvoch prislúchajúcich sústav (6) a (7); pre $(a, b) = (0, 4k)$ to je $(x, y) = (k, k)$, pre $(a, b) = (0, -4k)$ vyhovuje $(x, y) = (\frac{3}{7}k, -\frac{1}{7}k)$. Preto je skúmaná parita párna práve vtedy, keď 7 delí k. K hotovému dôkazu dodajme, že sme pri našich úvahách mlčky využívali zrejmý poznatok, že rôznym dvojiciam (a, b) zodpovedajú rôzne riešenia (x, y) sústav (6) a (7).

Poznámka. Rovnica (1), ako je vidno aj z jej upraveného tvaru (4), je pri nenulovom k rovnicou elipsy so stredom $(\frac{5}{7}k, \frac{3}{7}k)$, a ak je $k = 7m$ pre m celé, je s každým bodom (x, y) bodom elipsy aj bod $(10m - x, 6m - y)$, takže mrežové body tu vystupujú v dvojiciach, je ich teda párny počet.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Štefan Gyürki, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Ján Mazák, Peter Novotný, Eva Oravcová, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017