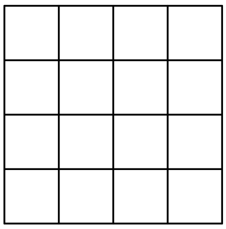
66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

---

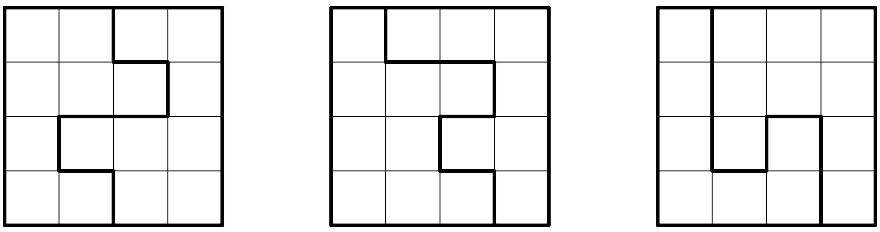
1. *Štvorec so stranou 4 cm je rozdelený na štvorčeky so stranou 1 cm ako na obrázku. Rozdeľte štvorec pozdĺž vyznačených čiar na dva útvary s obvodom 16 cm. Nájdite aspoň tri rôzne riešenia (tzn. také tri riešenia, aby žiadny útvar jedného riešenia nebol zhodný so žiadnym útvarom iného riešenia).* (Veronika Hucíková)



Lomená čiara, ktorá rozdeľuje štvorec na dva útvary, leží celá vnútri štvorca, s jeho obvodom má spoločné iba koncové body. Vzhľadom na to, že nové útvary majú mať rovnaký obvod, musia mať rovnakú aj tú jeho časť, ktorá je na obvode štvorca. Koncové body deliacej čiary preto musia byť súmerné podľa stredu štvorca.

Daný štvorec má obvod 16 cm a obvod dvoch nových útvarov má byť dokopy 32 cm. Deliaca čiara je spoločná obom útvarom, dvojnásobok jej dĺžky preto zodpovedá rozdielu $32 - 16 = 16$ (cm). Deliaca čiara musí byť dlhá 8 cm.

Teraz už neostáva iné ako skúšať:



Poznámka. Akékoľvek iné rozdelenie je zhodné s niektorým z predchádzajúcich.

---

2. *Na lyžiarske sústredenie prišli 4 kamaráti zo 4 svetových strán a viedli nasledujúci rozhovor.*

Karol: „Neprišiel som zo severu ani z juhu.“

Mojmír: „Zato ja som prišiel z juhu.“

Jozef: „Prišiel som zo severu.“

Zdeno: „Ja som z juhu neprišiel.“

Vieme, že jedna výpoveď nie je pravdivá. Určte, ktorá to je. Kto teda prišiel zo severu a kto z juhu? (Marta Volfová)

Podľa zadaných výrokov si predstavíme, odkiaľ kto mohol prísť, ak všetci hovorili pravdu:

- zo severu Jozef alebo Zdeno,
- z východu Karol alebo Zdeno,
- z juhu Mojmír,
- zo západu Karol alebo Zdeno.

Teraz zvažujeme, ktoré výroky mohli byť nepravdivé:

- Keby klamal Mojmír, museli by všetci ostatní vravieť pravdu, a to by znamenalo, že z juhu neprišiel nikto. Mojmírova výpoveď teda bola pravdivá.
- Keby klamal Zdeno, musel by prísť z juhu, čo by znamenalo, že klamal aj Mojmír. Zdenova výpoveď teda bola pravdivá.
- Keby klamal Karol, musel by prísť zo severu alebo z juhu. To by v prvom prípade znamenalo, že klamal aj Jozef, v druhom prípade, že klamal aj Mojmír. Karolova výpoveď teda bola pravdivá.

Mojmír, Zdeno a Karol vraveli pravdu, klamal teda Jozef (čo skutočne nie je s ničím v rozpore). Zo severu preto prišiel Zdeno, z juhu prišiel Mojmír.

Poznámka. Jozef a Karol prišli jeden z východu a jeden zo západu; z uvedeného sa nedá presne určiť, kto prišiel odkiaľ.

---

3. *Anička má 5 €, Anežka má 4,60 € a za všetky peniaze chcú kúpiť zákusky na rodinnú oslavu. Rozhodujú sa medzi tortičkami a veterníkmi: veterník je o 0,40 € drahší ako tortička a tortičiek by sa dalo za všetky peniaze kúpiť o tretinu viac ako veterníkov. Koľko stojí každý zo zákuskov?* (*Marta Volfová*)

Nápad. Koľko tortičiek má rovnakú cenu ako tri veterníky?

Riešenie. Za tie isté peniaze možno kúpiť o tretinu viac tortičiek ako veterníkov, tzn. za cenu 3 veterníkov možno kúpiť 4 tortičky. Veterník je o 0,40 € drahší ako tortička, 3 veterníky teda stoja o 1,20 € viac ako 3 tortičky. Z uvedeného vyplýva, že 1,20 € plus cena 3 tortičiek zodpovedá cene 4 tortičiek. Preto tortička stojí 1,20 €. Veterník stojí o 0,40 € viac, teda 1,60 €.

(Pre kontrolu: za 9,60 € môžu dievčatá kúpiť 9,60 : 1,60 = 6 veterníkov alebo 9,60 : : 1,20 = 8 tortičiek.)

Poznámka. Pre všetkých, ktorí vedia vyjadriť podmienky zo zadania pomocou neznámych, dodávame:

Ak cenu tortičiek označíme t (€), tak veterník stojí $t+0{,}40$ (€). Ak počet veterníkov, ktoré možno kúpiť za všetky peniaze, označíme k, tak tortičiek možno za rovnaké peniaze kúpiť $\frac{4}{3}k$. Zo zadania vieme, že

$$k \cdot (t + 0{,}40) = \frac{4}{3}k \cdot t.$$

Z toho vyplýva, že $3t + 1{,}20 = 4t$, teda $t = 1{,}20$, resp. $t + 0{,}40 = 1{,}60$.

---

4. *Napíšte namiesto hviezdičiek cifry tak, aby nasledujúci zápis súčinu dvoch čísel bol platný:*

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \ast & \ast & \ast \\
 & \cdot & & \ast & \ast & \ast \\
\hline
 & & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & 4 & 9 & 4 & 9 & \\
 & \ast & \ast & \ast & & \\
\hline
\ast & \ast & \ast & 4 & \ast & \ast
\end{array}$$

(*Libuše Hozová*)

Nápad. Začnite s druhou cifrou druhého činiteľa.

Riešenie. Číslo 4 949 je súčinom prvého činiteľa a druhej cifry druhého činiteľa. Pritom $4\,949 = 707 \cdot 7$ a pri delení čísla 4 949 inou cifrou ako 7 celočíselný trojciferný výsledok nedostaneme. Preto druhá cifra druhého činiteľa je 7:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 7 & 0 & 7 \\ \times & & & & * & 7 & * \\ \hline & & & * & * & * & * \\ & & 4 & 9 & 4 & 9 & \\ & & * & * & * & & \\ \hline & * & * & * & 4 & * & * \end{array}$$

Posledný pomocný súčin je súčinom 707 a prvej cifry druhého činiteľa. Pritom tento súčin je trojciferný, teda táto cifra môže byť jedine 1:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 7 & 0 & 7 \\ \times & & & & 1 & 7 & * \\ \hline & & & * & * & * & * \\ & & 4 & 9 & 4 & 9 & \\ & & 7 & 0 & 7 & & \\ \hline & * & * & * & 4 & * & * \end{array}$$

Prvý pomocný súčin je súčinom 707 a tretej cifry druhého činiteľa. Pritom tento súčin je štvorciferný, takže táto cifra musí byť väčšia ako 1. Po dosadení všetkých cifier od 2 do 9 a dopočítaní príkladu zisťujeme, že štvrtá cifra vo výsledku je rovná 4 len vtedy, keď neznáma cifra je 6.

Úloha má jediné riešenie:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 7 & 0 & 7 \\ \times & & & & 1 & 7 & 6 \\ \hline & & & 4 & 2 & 4 & 2 \\ & & 4 & 9 & 4 & 9 & \\ & & 7 & 0 & 7 & & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

Poznámka. Záverečné skúšanie je možné urýchliť tým, že sa najskôr zameriame na druhú cifru prvého pomocného súčinu – z uvedeného možno ľahko vyvodiť, že to môže byť jedine 2.

---

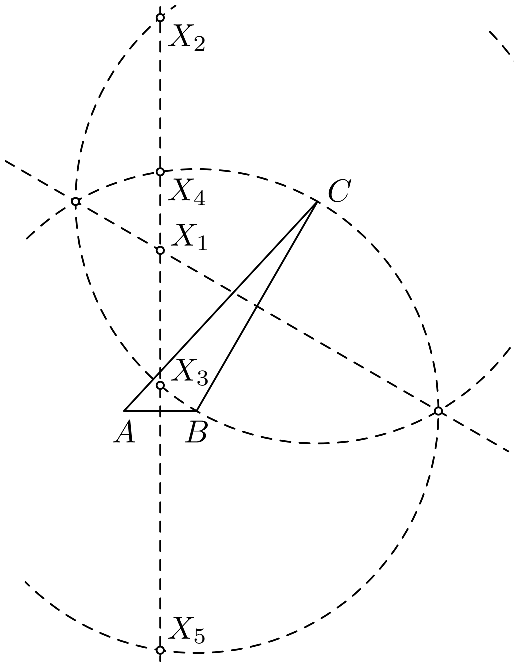
5. *Daný je trojuholník* ABC *so stranami* $|AB| = 3\,\text{cm}$, $|BC| = 10\,\text{cm}$ *a s uhlom* ABC *o veľkosti* $120°$. *Narysujte všetky body* X *také, aby platilo, že trojuholník* BCX *je rovnoramenný a súčasne trojuholník* ABX *je rovnoramenný so základňou* AB.

(*Eva Semerádová*)

Nápad. Uvedomte si, ako zostrojíte tretí vrchol trojuholníka, keď poznáte dva jeho vrcholy a veľkosti dvoch zvyšných strán.

Riešenie. Úsečka AB je základňou rovnoramenného trojuholníka ABX, teda $|XA| = |XB|$. Všetky body X s touto vlastnosťou tvoria os úsečky AB, t. j. kolmicu idúcu stredom úsečky AB.

Ak je úsečka BC základňou rovnoramenného trojuholníka BCX, tak bod X musí ležať na osi úsečky BC. V takom prípade je bod X priesečníkom osí úsečiek AB a BC (na obrázku označený ako X_1).



Ak je úsečka BC ramenom rovnoramenného trojuholníka BCX a úsečka BX jeho základňou, tak $|CB| = |CX|$. Všetky body X s touto vlastnosťou tvoria kružnicu, ktorá má stred v bode C a prechádza bodom B. V takom prípade je bod X priesečníkom tejto kružnice a osi úsečky AB (dve možnosti, na obrázku označené X_2 a X_3).

Ak je úsečka BC ramenom rovnoramenného trojuholníka BCX a úsečka CX jeho základňou, tak $|BC| = |BX|$. Všetky body X s touto vlastnosťou tvoria kružnicu, ktorá má stred v bode B a prechádza bodom C. V takom prípade je bod X priesečníkom tejto kružnice a osi úsečky AB (dve možnosti, na obrázku označené X_4 a X_5).

Úloha má celkom päť riešení vyznačených na obrázku.

Poznámky. Zvolená mierka nemá vplyv na hodnotenie úlohy, zato však venujte pozornosť konštrukcii osi úsečky.

Os úsečky BC prechádza spoločnými bodmi vyznačených kružníc. Body X_4 a X_5 možno zostrojiť aj ako priesečníky kružnice so stredom v bode B prechádzajúcej bodom C a kružnice s tým istým polomerom a stredom v bode A.

---

6. *Určte, pre koľko prirodzených čísel väčších ako 900 a menších ako 1 001 platí, že ciferný súčet ciferného súčtu ich ciferného súčtu je rovný 1.* (Eva Semerádová)

Medzi číslami 900 a 1 001 má najväčší ciferný súčet číslo 999, a to 27; väčšími súčtami sa zaoberať nemusíme.

Medzi číslami 1 a 27 má najväčší ciferný súčet číslo 19, a to 10; väčšími súčtami sa zaoberať nemusíme.

Medzi číslami 1 a 10 majú ciferný súčet 1 iba čísla 1 a 10; ostatnými číslami sa zaoberať nemusíme.

Teraz odzadu určíme všetky riešenia (v prvom stĺpci je 1 a v každom ďalšom stĺpci sú čísla, ktorých ciferný súčet je rovný číslu v stĺpci predchádzajúcom):

1	1	1	1 000
		10	901
			910
	10	19	919
			928
			937
			946
			955
			964
			973
			982
			991

Čísel s uvedenými vlastnosťami je spolu 12.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, Martin Vodička, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Róbert Hajduk, Ján Mazák, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016