2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *V obore reálnych čísel riešte rovnicu*

$$\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

(J. Švrček)

Riešenie. Z vlastností funkcií tangens a cotangens vyplýva, že $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo. Označme ďalej

$$L = \sqrt{2}(\sin t + \cos t) \qquad \text{a} \qquad P = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

Vzhľadom na periodickosť funkcií sin, cos, tg, cotg stačí rozobrať nasledujúce prípady.

- ▷ $t \in (0, \frac{1}{2}\pi)$: Pre každé také t platia nerovnosti

$$\sin t + \cos t \leqq \sqrt{2} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t = \operatorname{tg}^3 t + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 t} \geqq 2.$$

  Rovnosť v každej z nich nastáva práve vtedy, keď $t = \frac{1}{4}\pi$. Dostávame tak odhad

$$L \leqq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \leqq P.$$

  Odtiaľ vyplýva $L = P = 2$ a jediné reálne číslo t z uvažovaného intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$, ktoré danej rovnici vyhovuje, je $t = \frac{1}{4}\pi$.

- ▷ $t \in (\frac{1}{2}\pi, \pi)$: Pre každé také t platia v tomto prípade nerovnosti

$$\sin t + \cos t > -1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t \leqq -2.$$

  Pre ľubovoľné t z uvažovaného intervalu potom platia odhady

$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

  čo znamená, že v tomto prípade daná rovnica nemá žiadne reálne riešenie.

- ▷ $t \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$: Pre ľubovoľné t z uvažovaného intervalu platia v tomto prípade nerovnosti

$$-\sqrt{2} \leqq \sin t + \cos t < -1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t \geqq 2.$$

  Odtiaľ

$$L < -\sqrt{2} < 2 \leqq P,$$

  a teda ani v tomto prípade daná rovnica nemá žiadne reálne riešenie.

- ▷ $t \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$: Podobne ako v druhom prípade pre ľubovoľné t z uvažovaného intervalu platia nerovnosti

$$\sin t + \cos t > -1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t \leqq -2.$$

  Preto

$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

  čo znamená, že ani v tomto prípade nemá daná rovnica žiadne reálne riešenie.

Záver. Vzhľadom na periodickosť uvažovaných goniometrických funkcií sú riešením danej rovnice všetky reálne čísla t tvaru

$$t = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi,$$

kde k je ľubovoľné celé číslo.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte nerovnosť $|\sin t + \cos t| \leqq \sqrt{2}$. [Ukážte, že $\sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi + t)$.]

N2. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené n a pre ľubovoľné $t \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ platí $\operatorname{tg}^n t + \operatorname{cotg}^n t \geqq 2$. [Stačí si uvedomiť známu nerovnosť $x + 1/x \geqq 2$.]

N3. Ak pre nenulové reálne čísla x, y, z platí

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 1,$$

tak $xy + yz + zx < 0$. Dokážte. [42–A–II–3]

N4. V obore reálnych čísel riešte sústavu nerovníc

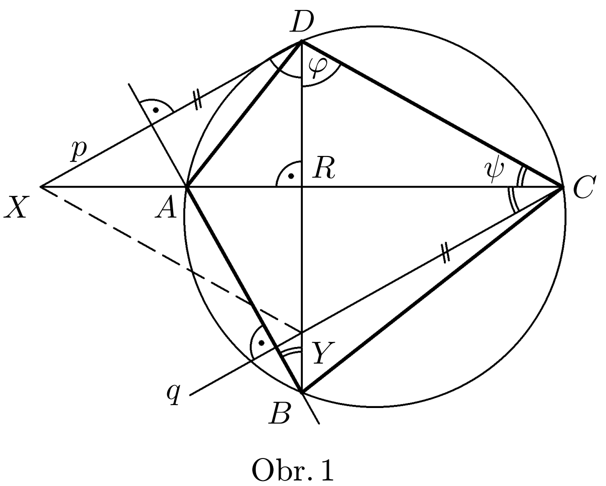
$$\begin{aligned} \sin x + \cos y &\geqq \sqrt{2}, \\ \sin y + \cos z &\geqq \sqrt{2}, \\ \sin z + \cos x &\geqq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

[50–A–I–4]

---

2. *Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník s navzájom kolmými uhlopriečkami. Označme postupne p, q kolmice z bodov D, C na priamku AB. Ďalej označme X priesečník priamok AC a p a Y priesečník priamok BD a q. Dokážte, že $XYCD$ je kosoštvorec alebo štvorec.* (*E. Kováč*)

Riešenie. Označme R priesečník uhlopriečok daného štvoruholníka a pre jednoduchosť tiež φ, ψ veľkosti uhlov CDR a DCR (obr. 1). Pretože uhlopriečky sú na seba kolmé, platí $\varphi + \psi = 90°$. Vzhľadom na to, že oba vrcholy B, C ležia v rovnakej polrovine



Obr. 1

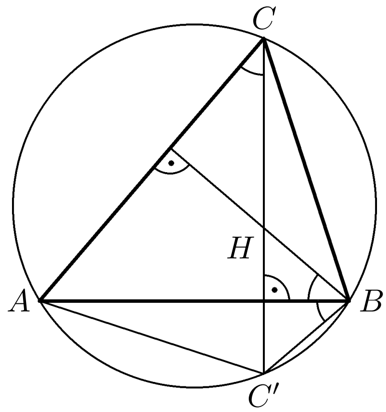
určenej tetivou AD, máme z rovnosti príslušných obvodových uhlov $|\angle ABD| = \psi$. A pretože DX je kolmá na AB, platí tiež $|\angle XDB| = \varphi$. To znamená, že trojuholník XCD je rovnoramenný so základňou XC. Úplne rovnako však zistíme, že aj trojuholník YCD je rovnoramenný so základňou YD. Odtiaľ už zrejme vyplýva, že $XYCD$ je kosoštvorec alebo štvorec.

Iné riešenie. Využijeme nie celkom bežne známy poznatok, že bod súmerne združený s priesečníkom výšok daného trojuholníka podľa jeho ľubovoľnej strany leží na kružnici trojuholníku opísanej (poz. návodnú úlohu).

Označme R priesečník uhlopriečok daného štvoruholníka. Podľa podmienok úlohy je X priesečník výšok trojuholníka ABD a Y priesečník výšok trojuholníka ABC. Podľa predchádzajúceho tvrdenia je bod C obrazom bodu X s osovej súmernosti podľa priamky BD, takže R je stred úsečky XC. Analogicky je R stred úsečky YD. Pretože XC a YD sú na sebe kolmé, je $XYCD$ kosoštvorec alebo štvorec.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Bod súmerne združený s priesečníkom výšok daného trojuholníka podľa jeho ľubovoľnej strany leží na kružnici trojuholníku opísanej. Dokážte. [Uhly ACC' a ABC' sú zhodné obvodové uhly nad spoločnou tetivou AC (obr. 2) a majú veľkosť $90° - \alpha$, čo je aj veľkosť uhla HBA.]



Obr. 2

N2. Nech obe úsečky spájajúce stredy protiľahlých strán konvexného štvoruholníka $ABCD$ majú rovnakú dĺžku. Dokážte, že uhlopriečky AC a BD sú navzájom kolmé a že platí rovnosť

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2.$$

[47–B–S–2]

N3. Nech $ABCD$ je lichobežník ($AB \parallel CD$), ktorého uhlopriečky sú navzájom kolmé. Dokážte nerovnosť $|AB| + |CD| < |BC| + |DA|$. [46–B–II–3]

---

3. *Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nenulových celých čísel má tú vlastnosť, že pre každé $n \geqq 0$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde b_n je číslo, ktoré má rovnaké znamienko ako číslo a_n, ale opačné poradie číslic (zápis čísla b_n môže na rozdiel od zápisu čísla a_n začínať jednou alebo viacerými nulami). Napríklad pre $a_0 = 1\,210$ je $a_1 = 1\,089$, $a_2 = -8\,712$, $a_3 = -6\,534$, …*

a) Dokážte, že postupnosť (a_n) je periodická.

b) Zistite, aké najmenšie prirodzené číslo môže byť a_0. (T. Jurík)

Riešenie. a) Aby sme dokázali, že uvažovaná postupnosť (a_n) je periodická, stačí ukázať, že existujú prirodzené čísla n_0 a p také, že $a_{n_0+p} = a_{n_0}$. Pretože ďalšie členy postupnosti sú daným rekurentným vzťahom jednoznačne určené, bude už pre každé $n \geqq n_0$ platiť $a_{n+p} = a_n$ (postupnosť bude periodická s dĺžkou periódy p).

Číslo $a_{n+1} = a_n - b_n$ má však najviac toľko číslic ako číslo a_n. To je napríklad vidno z nerovnosti $|a - b| \leqq \max(|a|, |b|)$. Ak má teda prvý člen postupnosti k číslic, budú všetky ostatné členy postupnosti patriť do konečnej množiny najviac $2(10^k - 1)$ nenulových celých čísel. Pretože postupnosť je nekonečná, musí obsahovať aspoň dva rovnaké členy. Odtiaľ vyplýva, že uvažovaná postupnosť je periodická.

b) Pretože uvažovaná postupnosť je *nenulová*, nemôže byť jej členom žiadne *palindromické* číslo (číslo, ktoré „prečítame“ rovnako spredu aj zozadu), špeciálne teda ani číslo jednociferné.

Predpokladajme najskôr, že členom uvažovanej postupnosti je dvojciferné číslo $a_0 = \overline{ab} = 10a+b$, pre ktoré $a_1 = 9(a-b)$. Vidíme, že všetky ďalšie členy (hlavne teda tie, ktoré sa budú periodicky opakovať) musia byť deliteľné deviatimi. Stačí preto rozobrať všetky dvojciferné násobky deviatich $18, \dots , 99$. Ako ľahko zistíme podľa nasledujúcej schémy,

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
81 \arrow[dr] & & & & \\
 & 63 \arrow[dr] & & & \\
18 \arrow[ur] & & 27 \arrow[dr] & & \\
 & 36 \arrow[ur] & & 45 \arrow[dr] & \\
 & & 72 \arrow[ur] & & 9 \\
 & & & 54 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

pre každé také číslo sa medzi členmi po chvíli objaví jednociferná deviatka. To znamená, že uvažovaná postupnosť nemôže obsahovať ani dvojciferné čísla. (Čísla v schéme sú v absolútnej hodnote, pretože príslušná zmena znamienka nemá na práve získaný výsledok vplyv.)

Predpokladajme ďalej, že členom uvažovanej postupnosti je trojciferné číslo $a_0 = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, pre ktoré $a_1 = 99(a - c)$. Opäť stačí preskúmať len trojciferné násobky čísla 99, t. j. $198, \dots , 990$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade podľa nasledujúcej schémy

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
891 \arrow[dr] & & & & \\
 & 693 \arrow[dr] & & & \\
198 \arrow[ur] & & 297 \arrow[dr] & & \\
 & 396 \arrow[ur] & & 495 \arrow[dr] & \\
 & & 792 \arrow[ur] & & 99 \\
 & & & 594 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

zistíme, že pre také čísla sa medzi členmi postupnosti nakoniec objaví dvojciferné číslo 99. Postupnosť teda nemôže obsahovať ani trojciferné čísla.

Pretože pre štvorciferné číslo $a_0 = \overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$ dostávame $a_1 = 999(a - d) + 90(b - c)$, zistíme opäť, že prvých desať najmenších (pre ktoré je v príslušnom desiatkovom zápise $b = c$) členom uvažovanej postupnosti byť nemôže: pre čísla $1\,000$ a $1\,002$ dostaneme priamo $|a_1| = 999$, číslo $1\,001$ je palindromické a pre čísla $1\,003, \dots , 1\,009$ dostaneme podľa analogickej schémy

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
8\,991 \arrow[dr] & & & & \\
 & 6\,993 \arrow[dr] & & & \\
1\,998 \arrow[ur] & & 2\,997 \arrow[dr] & & \\
 & 3\,996 \arrow[ur] & & 4\,995 \arrow[dr] & \\
 & & 7\,992 \arrow[ur] & & 999 \\
 & & & 5\,994 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

po niekoľkých krokoch trojciferné číslo 999. Pre nasledujúce štvorciferné číslo $1\,010$ dostaneme trojciferné číslo 909 a pre $1\,011$ dokonca dvojciferné číslo -90. Až pre číslo $1\,012$ dostaneme postupnosť štvorciferných čísel

$$-1\,089,\ 8\,712,\ 6\,534,\ 2\,178,\ -6\,534,$$

ktorá sa zrejme po ďalšom člene zacyklí.

Záver. Najmenšie také číslo a_0 je teda $1\,012$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre ľubovoľné reálne čísla platí $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$. Dokážte.

4. *Nájdite všetky kubické mnohočleny $P(x)$, ktoré majú aspoň dva rôzne reálne korene, z ktorých jeden je číslo 7, a ktoré pre každé reálne číslo t spĺňajú podmienku: Ak $P(t) = 0$, tak $P(t+1) = 1$.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Podľa zadania má mať kubická rovnica $P(x) = 0$ dva rôzne reálne korene, označme ich $x_1 = 7$ a $x_2 \neq x_1$ (konkrétnu hodnotu $x_1 = 7$ využijeme len vtedy, keď to bude vhodné, inak budeme radšej písať všeobecne x_1). Pre kubický mnohočlen $P(x)$, ktorého koeficient pri mocnine x^3 označíme a, $a \neq 0$, potom existuje ešte reálne číslo x_3 také, že platí

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \tag{1}$$

(nie sú vylúčené rovnosti $x_3 = x_1$ alebo $x_3 = x_2$).

Pripomeňme, ako existenciu tretieho reálneho koreňa x_3 zdôvodniť: kubický mnohočlen $P(x)$ je nutne deliteľný mnohočlenom $(x-x_1)(x-x_2)$, príslušný podiel je lineárny dvojčlen s vedúcim koeficientom a, teda dvojčlen $ax+b$, ktorý možno zapísať ako $a(x - x_3)$, ak zvolíme $x_3 = -b/a$.

Našou úlohou je nájsť všetky vyhovujúce trojice čísel $a \neq 0$, $x_2 \neq x_1$ a x_3, pre ktoré mnohočlen (1) s danou hodnotou $x_1 = 7$ spĺňa pre každé reálne t implikáciu $P(t) = 0 \implies P(t+1) = 1$. Pre rozbor takej podmienky je nutné vedieť, pre koľko *rôznych* hodnôt t rovnosť $P(t) = 0$ (a teda aj rovnosť $P(t+1) = 0$) naozaj platí, teda koľko je v trojici x_1, x_2, x_3 rôznych čísel. Môžu nastať iba nasledujúce možnosti A, B a C.

A. *x_1, x_2, x_3 sú tri navzájom rôzne čísla.* Vtedy má kubická rovnica $P(x) = 1$ tri navzájom rôzne korene $x_1 + 1$, $x_2 + 1$, $x_3 + 1$, takže platí

$$P(x) - 1 = a(x - x_1 - 1)(x - x_2 - 1)(x - x_3 - 1).$$

Keď sem dosadíme rozklad (1), dostaneme rovnosť mnohočlenov

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) - 1 = a(x - x_1 - 1)(x - x_2 - 1)(x - x_3 - 1). \tag{2}$$

Porovnaním koeficientov pri mocnine x^2 na ľavej a pravej strane získame rovnosť

$$-a(x_1 + x_2 + x_3) = -a(x_1 + x_2 + x_3 + 3),$$

ktorá je splnená len v prípade $a = 0$, čo je v rozpore s predpokladom $a \neq 0$. (Navyše rovnosť (2) neplatí ani pre $a = 0$, keď má tvar $-1 = 0$.)

B. $x_1 = x_3 = 7 \neq x_2$. Vtedy $P(x) = a(x-7)^2(x-x_2)$ a rovnosť $P(x) = 1$ musí platiť pre $x = 7 + 1 = 8$ a pre $x = x_2 + 1$. Dostávame tak sústavu dvoch rovníc

$$P(8) = a(8 - x_2) = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2 + 1) = a(x_2 - 6)^2 = 1.$$

Prevrátená hodnota čísla a je teda rovná ako číslu $8 - x_2$, tak číslu $(x_2 - 6)^2$. Z rovnice

$$8 - x_2 = (x_2 - 6)^2$$

dostaneme úpravou rovnicu $x_2^2 - 11x_2 + 28 = 0$, ktorá má dva korene $x_2 = 4$ a $x_2 = 7$. Druhý koreň nevyhovuje našej podmienke $x_2 \neq x_1$, takže nutne platí $x_2 = 4$, odkiaľ $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)^2(x-4)$.

C. $x_1 = 7 \neq x_2 = x_3$. Vtedy $P(x) = a(x-7)(x-x_2)^2$ a rovnosť $P(x) = 1$ musí platiť pre $x = 7 + 1 = 8$ a pre $x = x_2 + 1$. Dostávame tak sústavu dvoch rovníc

$$P(8) = a(8 - x_2)^2 = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2 + 1) = a(x_2 - 6) = 1.$$

Prevrátená hodnota čísla a je teda rovná ako číslu $(8 - x_2)^2$, tak číslu $x_2 - 6$. Z rovnice

$$(8 - x_2)^2 = x_2 - 6$$

dostaneme úpravou rovnicu $x_2^2 - 17x_2 + 70 = 0$, ktorá má dva korene $x_2 = 10$ a $x_2 = 7$. Druhý koreň nevyhovuje našej podmienke $x_2 \neq x_1$, takže nutne platí $x_2 = 10$, odkiaľ $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2$.

Záver. Podmienkam úlohy vyhovujú iba dva kubické mnohočleny

$$P(x) = \frac{1}{4}(x-7)^2(x-4) \quad \text{a} \quad P(x) = \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2.$$

Poznámka. Možnosť A v uvedenom riešení môžeme vylúčiť vďaka nasledujúcej úvahe: Keby mal mnohočlen P tri rôzne korene k, ℓ, m, mal by mnohočlen $P - 1$ podľa predpokladu korene $k+1$, $\ell+1$, $m+1$. To však nie je možné, pretože súčet koreňov mnohočlena P je rovnaký ako súčet koreňov mnohočlena $P - 1$.

Návodné a dopĺňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré pre každé reálne číslo x spĺňajú rovnosť

$$(x+1)\,P(x-1) + (x-1)\,P(x+1) = 2x\,P(x).$$

[51–A–I–5]

N2. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel a, b, pre ktoré má rovnica

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

v obore reálnych čísel práve dve riešenia, pričom ich súčet je 12. [51–A–III–4]

N3. Určte všetky polynómy P, ktoré pre každé reálne číslo x spĺňajú rovnosť

$$P(2x) = 8P(x) + (x-2)^2.$$

[50–B–I–5]

N4. Nech P, Q sú kvadratické mnohočleny také, že tri z koreňov rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$ sú čísla -22, 7, 13. Určte štvrtý koreň tejto rovnice. [49–A–I–1]

N5. Nech $P(x)$ je kvadratický trojčlen. Určte všetky korene rovnice

$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$

ak viete, že medzi nimi je číslo 1 a aspoň jeden koreň je dvojnásobný. [49–A–II–1]

N6. Nájdite všetky dvojice mnohočlenov

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad g(x) = x^2 + cx + d,$$

ktoré spĺňajú tieto podmienky:

(1) Každý z mnohočlenov f, g má dva rôzne reálne korene.
(2) Ak s je ľubovoľný koreň f, je aj $g(s)$ koreň f.
(3) Ak s je ľubovoľný koreň g, je aj $f(s)$ koreň g. [46–A–I–2]

5. *Dané sú úsečky dĺžok a, b, c, d. Dokážte, že rovnosť $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ platí práve vtedy, keď existujú konvexné štvoruholníky so stranami dĺžok a, b, c, d (pri zvyčajnom označení), pričom uhlopriečky každého takého štvoruholníka zvierajú jeden a ten istý uhol.* (J. Šimša)

Riešenie. V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme S priesečník uhlopriečok a okrem dĺžok strán uvažujme ešte veličiny $e = |AC|$, $f = |BD|$, $e_1 = |AS|$, $e_2 = |CS|$, $f_1 = |BS|$, $f_2 = |DS|$ a $\varphi = |\angle ASB|$. Podľa kosínusovej vety platia rovnosti

$$\begin{aligned} a^2 &= e_1^2 + f_1^2 - 2e_1 f_1 \cos\varphi, \\ b^2 &= e_2^2 + f_1^2 + 2e_2 f_1 \cos\varphi, \\ c^2 &= e_2^2 + f_2^2 - 2e_2 f_2 \cos\varphi, \\ d^2 &= e_1^2 + f_2^2 - 2e_1 f_2 \cos\varphi. \end{aligned}$$

Keď sčítame prvú rovnosť s treťou a od výsledku odčítame súčet druhej a štvrtej, dostaneme

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2(e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_2 f_1 + e_1 f_2) \cos\varphi,$$

čiže

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2ef \cos\varphi. \tag{1}$$

Odtiaľ vyplýva takýto záver: ak platí rovnosť $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, potom v každom uvažovanom štvoruholníku je $\cos\varphi = 0$, teda uhol φ je vždy pravý a dĺžky strán majú vyjadrenia

$$a^2 = e_1^2 + f_1^2,\ b^2 = e_2^2 + f_1^2,\ c^2 = e_2^2 + f_2^2,\ d^2 = e_1^2 + f_2^2. \tag{2}$$

Aby sme uzavreli prvú časť riešenia, zdôvodníme ešte, že také štvoruholníky (pre akékoľvek dĺžky a, b, c, d spĺňajúce vzťah $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$) existujú. Určite môžeme predpokladať, že platí $d = \min\{a, b, c, d\}$; dĺžku e_1 potom zvolíme v intervale $(0, d)$ ľubovoľne a podľa (2) určíme

$$\begin{gathered} f_1 = \sqrt{a^2 - e_1^2}, \quad f_2 = \sqrt{d^2 - e_1^2}, \\ e_2 = \sqrt{c^2 - d^2 + e_1^2} \left(= \sqrt{b^2 - a^2 + e_1^2} \right) \end{gathered}$$

(vzhľadom k urobenému predpokladu platí $c^2 - d^2 \geqq 0$). Tým je existencia vyhovujúcich štvoruholníkov (s navzájom kolmými uhlopriečkami) dokázaná.

V druhej časti riešenia budeme naopak predpokladať, že aspoň jeden konvexný štvoruholník $A_0B_0C_0D_0$ so stranami daných dĺžok a, b, c, d existuje. Z úvahy o modeli štvoruholníka z drôtu je jasné, že vyhovujúcich konvexných štvoruholníkov $ABCD$ (tvarom blízkych $A_0B_0C_0D_0$) je potom nekonečne veľa. Ich vnútorné uhly α, γ pri vrcholoch A, C sú viazané podmienkou

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 - c^2 - 2bc\cos\gamma \tag{3}$$

(porovnanie dĺžky spoločnej strany BD trojuholníkov ABD a BCD). Pripusťme, že uhlopriečky všetkých týchto štvoruholníkov zvierajú rovnaký uhol φ a že *ľavá strana rovnosti* (1) *je nenulová* (podľa jej znamienka je uhol φ buď ostrý, alebo tupý, takže sa nemôže stať, že pre časť vyhovujúcich štvoruholníkov má veľkosť φ_0, a pre ostatné $\pi - \varphi_0$). Potom z rovnosti (1) môžeme vypočítať súčin ef, ktorý je tak pre všetky vyhovujúce štvoruholníky rovnaký. Zo vzťahu pre ich obsah $S = \frac{1}{2}ef\sin\varphi$ nakoniec vyplýva, že aj hodnota S je jedna a tá istá. Pretože obsah S môžeme vyjadriť aj vzťahom $S = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma$, prichádzame k záveru: existujú také konštanty R_1 a R_2, že všetky vyhovujúce štvoruholníky spĺňajú vzťahy

$$ad\cos\alpha - bc\cos\gamma = R_1, \quad ad\sin\alpha + bc\sin\gamma = R_2$$

(prvý vzťah je dôsledkom (3), v druhom $R_2 = 2S > 0$). Z nich ďalej vyplýva

$$\begin{aligned}(bc)^2 &= (bc\cos\gamma)^2 + (bc\sin\gamma)^2 = (ad\cos\alpha - R_1)^2 + (R_2 - ad\sin\alpha)^2 = \\ &= (ad)^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2ad(R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha).\end{aligned}$$

Pretože $ad \neq 0$, možno z ostatnej rovnosti vypočítať hodnotu výrazu

$$V = R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha,$$

ktorá je tak pre všetky vyhovujúce štvoruholníky $ABCD$ rovnaká. To je možné jedine vtedy, keď $R_1 = R_2 = 0$, a to je spor s tým, že $R_2 > 0$. Dôkaz druhej časti tvrdenia je hotový.

Dodajme, že záver o hodnotách výrazu V vyplýva zo známeho vyjadrenia

$$V = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}\sin(\alpha + \omega),$$

kde uhol ω je určený vzťahmi

$$\sin\omega = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \quad \text{a} \quad \cos\omega = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

Výraz $\sin(\alpha+\omega)$ nie je konštantný, keď sa uhol α mení v okolí uhla α_0 (ktorý zodpovedá pôvodnému štvoruholníku $A_0B_0C_0D_0$ z úvodu druhej časti riešenia).

---

6. *Nájdite všetky usporiadané dvojice* (x, y) *prirodzených čísel, pre ktoré platí*

$$x^2 + y^2 = 2005(x - y).$$

(*J. Moravčík*)

Riešenie. Odvodíme najskôr, ako vyzerá každá dvojica (x, y) prirodzených čísel, ktorá vyhovuje rovnici

$$x^2 + y^2 = k(x - y) \tag{1}$$

s daným prirodzeným číslom k (a až potom všetky tieto riešenia pre hodnotu $k = 2\,005$ zostrojíme).

Predpokladajme, že (x, y) je ľubovoľné riešenie rovnice (1), ktorú zvyčajným spôsobom upravíme na „súčinový“ tvar

$$y(y+k) = x(k-x). \tag{2}$$

Urobme úvahu o súdeliteľnosti zastúpených činiteľov. Označme d najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel x a y. Takže platí $x = dm$ a $y = dn$, kde m a n sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Po vydelení oboch strán rovnosti (2) číslom d dostaneme „výhodnejšiu“ rovnosť $n(y+k) = m(k-x)$. Z nej totiž vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel m, n vyplýva, že prirodzené číslo $y+k$ je násobkom čísla m a číslo $k-x$ rovnakým násobkom čísla n. Pre vhodné prirodzené q teda platia rovnosti

$$y + k = qm \quad \text{a} \quad k - x = qn.$$

Vyjadrime odtiaľ dvoma spôsobmi číslo k a obe vyjadrenia porovnajme:

$$\left.\begin{aligned} k &= qm - y = qm - dn, \\ k &= qn + x = qn + dm \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ qm - dn = qn + dm \ \Rightarrow \ m(q-d) = n(q+d).$$

Odtiaľ opäť z nesúdeliteľnosti čísel m, n vyplýva, že prirodzené číslo $q+d$ je násobkom čísla m a číslo $q-d$ rovnakým násobkom čísla n. Pre vhodné prirodzené r teda platia rovnosti

$$q + d = rm \quad \text{a} \quad q - d = rn.$$

Ich sčítaním a odčítaním dostaneme nasledujúce vyjadrenie čísel q a d pomocou r, m a n:

$$q = \frac{r(m+n)}{2} \quad \text{a} \quad d = \frac{r(m-n)}{2}.$$

Odtiaľ už pre neznáme x, y dostávame konečné vzťahy

$$x = dm = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = dn = \frac{r(m-n)n}{2}. \tag{3}$$

Zistíme teraz, ako súvisia parametre r, m, n s daným koeficientom k z pôvodnej rovnice (1). Môžeme postupovať napríklad tak, že odvodené vzťahy dosadíme do rovnosti $k = qn + x$:

$$k = qn + x = \frac{r(m+n)n}{2} + \frac{r(m-n)m}{2} = \frac{r(m^2+n^2)}{2}.$$

Odtiaľ po násobení dvoma dostaneme hľadanú podmienku v tvare

$$2k = r(m^2 + n^2). \tag{4}$$

Iný spôsob odvodenia rovnosti (4), ktorý je súčasne priamou „skúškou“ vzťahov (3), spočíva v tom, že z nich jednoducho vyplývajú vyjadrenia

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{r^2(m-n)^2(m^2+n^2)}{4}, \\ x - y &= \frac{r(m-n)^2}{2}, \end{aligned}$$

z ktorých vidíme, že rovnica (1) je pre také x, y splnená práve vtedy, keď je splnená podmienka (4). Kým sformulujeme dokázaný výsledok, dodajme ešte, že podľa vzťahov (3) musia čísla m, n spĺňať nerovnosť $m > n$. Preto platí nasledujúca veta.

Ak k je dané prirodzené číslo, tak riešeniami rovnice $x^2 + y^2 = k(x - y)$ sú práve tie dvojice prirodzených čísel x a y, ktoré sú tvaru

$$x = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{r(m-n)n}{2},$$

kde r, m, n sú prirodzené čísla, pre ktoré platí rovnosť $2k = r(m^2 + n^2)$, pričom čísla m a n sú nesúdeliteľné a $m > n$.

Z dokázanej vety vyplýva návod, ako všetky riešenia rovnice $x^2+y^2 = k(x-y)$ pre daný koeficient k zostrojiť. Nájdeme všetky možné rozklady čísla $2k$ na dva činitele, $2k = rs$, a pre každý z nich potom nájdeme vyhovujúce čísla m, n z rovnosti $m^2+n^2 = s$. Nezostáva to urobiť inak ako tak, že pre konečne veľa čísel m, ktoré sú s číslom s nesúdeliteľné a spĺňajú nerovnosti $2m^2 > s > m^2$, testujeme, či je rozdiel $s-m^2$ druhou mocninou prirodzeného čísla. Pre dané $k = 2005 = 5 \cdot 401$ (401 je prvočíslo) existujú tieto rozklady (pretože $m^2+n^2 \geqq 2^2+1^2 = 5$, vynecháme rozklady, v ktorých je činiteľ $s = m^2 + n^2$ menší ako 5):

(i) $r = 802$, $m^2 + n^2 = 5$. Zrejme $m = 2$ a $n = 1$, odkiaľ $x = 802$ a $y = 401$.
(ii) $r = 401$, $m^2 + n^2 = 10$. Zrejme $m = 3$ a $n = 1$, odkiaľ $x = 1203$ a $y = 401$.
(iii) $r = 10$, $m^2 + n^2 = 401$. Platí $15 \leqq m \leqq 20$, vyhovuje iba $m = 20$, kedy $n = 1$, $x = 1\,900$ a $y = 95$.
(iv) $r = 5$, $m^2 + n^2 = 802$. Platí $21 \leqq m \leqq 27$, preberieme iba nepárne m, vyhovuje iba $m = 21$, kedy $n = 19$, $x = 105$ a $y = 95$.
(v) $r = 2$, $m^2 + n^2 = 2\,005$. Platí $31 \leqq m \leqq 44$, preberieme iba m nesúdeliteľné s číslom 5, vyhovuje jednak $m = 39$, kedy $n = 22$, $x = 663$ a $y = 374$, jednak $m = 41$, kedy $n = 18$, $x = 943$ a $y = 414$.
(vi) $r = 1$, $m^2 + n^2 = 4\,010$. Platí $45 \leqq m \leqq 63$, preberieme iba m nesúdeliteľné s číslom 10, vyhovuje jednak $m = 59$, kedy $n = 23$, $x = 1\,062$ a $y = 414$, jednak $m = 61$, kedy $n = 17$, $x = 1\,342$ a $y = 374$.

Záver. Úloha má pravé osem riešení (x, y). Zapíšeme ich v rastúcom poradí podľa prvej zložky x: $(105, 95)$, $(663, 374)$, $(802, 401)$, $(943, 414)$, $(1\,062, 414)$, $(1\,203, 401)$, $(1\,342, 374)$, $(1\,900, 95)$.

Všimnime si, že týchto osem dvojíc (x, y) má iba štyri rôzne zložky y (každé y je zastúpené v dvoch dvojiciach). To možno vysvetliť takýmto pozorovaním: ak má pre niektoré prirodzené y kvadratická rovnica

$$x^2 - 2\,005x + (y^2 + 2\,005y) = 0$$

aspoň jedno riešenie x v obore prirodzených čísel, má v tomto obore dve rôzne riešenia. Jednoduché vysvetlenie vyplýva z Viètových vzťahov: ak je x_1 celočíselný koreň tejto rovnice, je aj druhý koreň $x_2 = 2\,005-x_1$ celé číslo (rôzne od x_1); z rovnosti $x_1x_2 = y^2 + 2\,005y$ vyplýva, že oba korene x_1, x_2 majú rovnaké znamienko, lebo $y^2 + 2\,005y > 0$.