

66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie pridružuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov. Inými slovami, napr. nepíšete pri žiakovi, že skončil na 2. mieste, ak pred ním skončili traja žiaci s plným počtom bodov a on má o jeden bod menej – v takom prípade mu patrí 4. miesto.

1. Monika premýšľala o štvorcifernom čísle, ktoré má nasledujúce vlastnosti:

- súčin dvoch krajných cifier je 40,
- súčin dvoch vnútorných cifier je 18,
- rozdiel dvoch krajných cifier je rovnaký ako rozdiel dvoch vnútorných cifier,
- rozdiel myšleného čísla a opačne napísaného čísla (t. j. čísla napísaného rovnakými ciframi, ale v opačnom poradí) je najväčší možný.

Určte Monikino myšlené číslo.

(Libuše Hozová)

Riešenie. Súčin dvoch krajných cifier je 40, a to je možné iba ako $40 = 5 \cdot 8$. Rozdiel týchto cifier je rovný $8 - 5 = 3$. Súčin dvoch vnútorných cifier je 18, a to je možné buď ako $18 = 2 \cdot 9$, alebo ako $18 = 3 \cdot 6$. V prvom prípade je rozdiel $9 - 2 = 7$, čo je rôzne od rozdielu krajných cifier. V druhom prípade je rozdiel $6 - 3 = 3$, čo súhlasí s rozdielom krajných cifier. Z prvých troch podmienok teda vyplýva, že krajné cifry sú 5 a 8, vnútorné cifry sú 3 a 6. Také čísla sú štyri:

$$5368, \quad 8635, \quad 8365, \quad 5638. \quad (1)$$

Aby bol rozdiel myšleného čísla a opačne napísaného čísla najväčší možný, musí byť na mieste tisícok, resp. stoviek väčšia z dvoch možných cifier. Monika premýšľala o čísle 8635.

Návrh hodnotenia. 1 bod za dvojicu krajných cifier; 1 bod za možné dvojice vnútorných cifier; 2 body za určenie správnej dvojice vnútorných cifier a štyroch možností (1); 2 body za určenie vyhovujúcej možnosti.

Poznámka. Medzi číslami (1) sú opačne napísané čísla v prvej dvojici a čísla v druhej dvojici. Záverečnú časť úlohy možno spraviť porovnaním štyroch možných rozdielov:

$$\begin{aligned} 8635 - 5368 &= 3267, & 5368 - 8635 &= -3267, \\ 8365 - 5638 &= 2727, & 5638 - 8365 &= -2727. \end{aligned}$$

2. Mat kopal jamu. Pat sa ho spýtal, aká bude jama hlboká. Mat odpovedal hádankou:

„Meriam 90 cm a práve mám vykopanú polovicu jamy. Keď vykopem jamu celú, bude vrch mojej hlavy pod povrchom zeme tak hlboko, ako je teraz nad povrchom zeme.“

Akú hlbokú jamu Mat kopal? (Libuše Hozová)

Riešenie. Z Matovho vysvetlenia vyplýva, že jeho výška je presne v strede medzi hĺbkou celej jamy a jej polovicou. Teda 90 cm je rovné trom štvrtinám hĺbky celej jamy. Mat kopal jamu hlbokú $\frac{4}{3} \cdot 90 = 120$ (cm).

Návrh hodnotenia. 3 body za poznatok, že 90 cm zodpovedá $\frac{3}{4}$ hĺbky celej jamy; 3 body za výpočet hĺbky jamy.

Iné riešenie. Ak označíme j hĺbku celej jamy, tak podľa Matovho vysvetlenia môžeme vzdialenosť vrchu Matovej hlavy od povrchu zeme vyjadriť ako

$$j - 90 = 90 - \frac{1}{2}j. \quad (1)$$

Z toho dostávame $\frac{3}{2}j = 180$, teda $j = 120$. Mat kopal jamu hlbokú 120 cm.

Návrh hodnotenia. 3 body za vyjadrenie informácií zo zadania pomocou neznámej j ; 3 body za výpočet hĺbky jamy.

Poznámka. Ak označíme v vzdialenosť vrchu Matovej hlavy od povrchu zeme a j hĺbku celej jamy, tak Matovo vysvetlenie môžeme zapísať napr. ako

$$90 = \frac{1}{2}j + v, \quad 90 = j - v.$$

Obvyklými úpravami možno z tejto sústavy získať rovnicu ekvivalentnú s (1).

3. Pravouhlý trojuholník ABC má odvesny $|AB| = 5$ cm a $|BC| = 12$ cm. Vrcholy trojuholníka ABC sú zobrazené tak, že

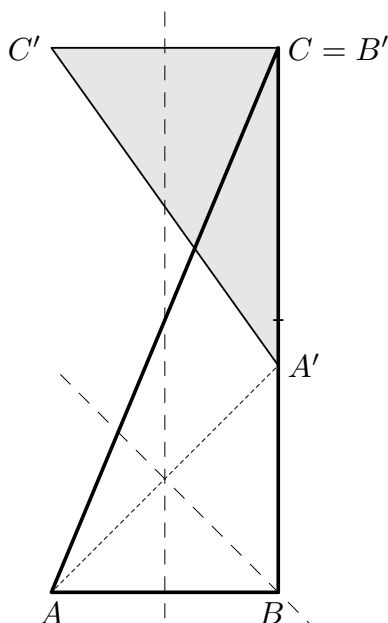
- bod A sa zobrazuje do bodu A' súmerne podľa osi uhla ABC ,
- bod B sa zobrazuje do bodu B' súmerne podľa stredu úsečky BC ,
- bod C sa zobrazuje do bodu C' súmerne podľa osi úsečky AB .

Určte obsah trojuholníka $A'B'C'$. (Monika Dillingerová)

Riešenie. Ramená uhla ABC sú súmerné podľa jeho osi. Preto bod A' leží na polpriamke BC , a to tak, že $|BA'| = |BA| = 5$ cm.

Koncové body úsečky BC sú súmerné podľa jej stredu, preto $B' = C$.

Body C a C' sú súmerné podľa osi úsečky AB , preto je úsečka CC' kolmá na túto priamku. Navyše je trojuholník ABC pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole B , preto body A, B, C, C' tvoria vrcholy obdĺžnika.



Trojuholník $A'B'C'$ je teda pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole B' . Jeho odvesny majú veľkosti

$$|A'B'| = |BB'| - |BA'| = 12 - 5 = 7 \text{ (cm)},$$

$$|B'C'| = |AB| = 5 \text{ (cm)}.$$

Obsah trojuholníka $A'B'C'$ je $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = 17,5 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za spresnenie polôh bodov A' , B' , C' ; 2 body za poznatok, že trojuholník $A'B'C'$ je pravouhlý; 1 bod za veľkosti odvesien a obsah.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, Oliver Ralík, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017