2005/2006
55. ročník MO

Riešenia úloh školského kola kategórie A

1. *Nájdite všetky dvojice celých čísel x a y, pre ktoré platí*

$$\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} = \sqrt{6\sqrt{5} - 10}.$$

(*J. Moravčík*)

Riešenie. Z tvaru danej rovnice priamo vyplýva, že $x > y \geqq 0$ (lebo číslo $6\sqrt{5} - 10$ je kladné a odmocnina z neho tiež). Pre také x, y môžeme umocniť obe (kladné) strany rovnice na druhú a urobiť ďalšie ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned} x\sqrt{5} - 2\sqrt{5xy} + y\sqrt{5} &= 6\sqrt{5} - 10, \\ x - 2\sqrt{xy} + y &= 6 - 2\sqrt{5}, \\ x + y - 6 &= 2\big(\sqrt{xy} - \sqrt{5}\big). \end{aligned} \tag{1}$$

Umocnením a ďalšou úpravou dostaneme, že pre hľadané celé čísla x, y musí platiť

$$\begin{aligned} (x + y - 6)^2 &= 4\big(xy - 2\sqrt{5xy} + 5\big), \\ 8\sqrt{5xy} &= 4(xy + 5) - (x + y - 6)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Z ostatnej rovnice vyplýva, že hodnota $\sqrt{5xy}$ je racionálna, a teda celé číslo.[1] Takže $5xy$ je druhá mocnina nezáporného celého čísla, ktoré je zrejme deliteľné piatimi.[2] Platí teda $5xy = (5k)^2$, čiže $xy = 5k^2$, kde k je nezáporné celé číslo. Toto je výhodné dosadiť nie do rovnice (2), ale do rovnice (1). Dostaneme totiž rovnicu

$$x + y - 6 = 2\big(\sqrt{5k^2} - \sqrt{5}\big) \quad \text{čiže} \quad x + y - 6 = 2(k - 1)\sqrt{5}.$$

Z nej vďaka iracionálnosti čísla $\sqrt{5}$ vyplýva, že pre splnenie rovnosti (1) je nutné a postačujúce, aby platili obe rovnosti $k = 1$ a $x + y - 6 = 0$. Zo sústavy rovníc

$$xy = 5k^2 = 5, \quad x + y = 6$$

ľahko zistíme, že $\{x, y\} = \{5, 1\}$, teda $x = 5$ a $y = 1$, lebo podľa úvahy na začiatku $x > y$.

Hľadaná dvojica (x, y) je jediná, a to $(x, y) = (5, 1)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za prvé a 2 body za druhé z oboch umocnení. Známe poznatky o druhých odmocninách a mocninách uvedené v oboch poznámkach pod čiarou môžu riešitelia použiť bez toho, aby ich formulovali (či dokonca dokazovali) ako pravidlá (t. j. vo všeobecnom tvare). V prípade, že v inak úplnom riešení nie je vylúčená dvojica $(x, y) = (1, 5)$ alebo nie je spomenutá podmienka $x > y$ a chýba skúška pri dôsledkovej úprave umocnením (ktorá v uvedenom riešení nie je potrebná), dajte len 5 bodov.

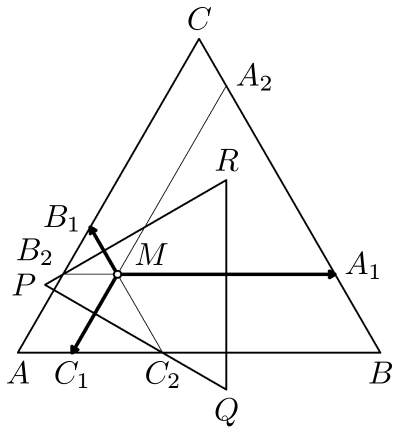
---

[1] Druhá odmocnina nezáporného celého čísla je buď celé číslo, alebo iracionálne číslo.

[2] Ak je n celé a n^2 je deliteľné piatimi, je aj n deliteľné piatimi.

2. *Daný je rovnostranný trojuholník ABC s obsahom S a jeho vnútorný bod M. Označme postupne A_1, B_1, C_1 tie body strán BC, CA a AB, pre ktoré platí $MA_1 \parallel AB$, $MB_1 \parallel BC$ a $MC_1 \parallel CA$. Priesečníky osí úsečiek MA_1, MB_1 a MC_1 tvoria vrcholy trojuholníka s obsahom T. Dokážte, že platí $S = 3T$.* (J. Švrček)

Riešenie. Označme P, Q, R vrcholy vzniknutého trojuholníka. Každá z osí úsečiek MA_1, MB_1 a MC_1 je kolmá na zodpovedajúcu stranu trojuholníka ABC. Preto každé dve zo strán trojuholníka PQR zvierajú uhol 60 stupňov, takže tento trojuholník je rovnostranný (obr. 1).



Obr. 1

Teraz ukážeme, že súčet dĺžok úsečiek MA_1, MB_1 a MC_1 je (nezávisle od polohy bodu M) rovný dĺžke a strany pôvodného trojuholníka ABC. Označme preto postupne B_2, C_2 a A_2 priesečníky priamok MA_1, MB_1 a MC_1 so stranami CA, AB a BC. Pretože trojuholníky MA_1A_2, MB_1B_2 a MC_1C_2 sú rovnostranné, platí

$$|MA_1| + |MB_1| + |MC_1| = |A_1A_2| + |A_2C| + |A_1B| = |BC| = a.$$

Pre ľubovoľný (vnútorný) bod rovnostranného trojuholníka platí, že súčet jeho vzdialeností od všetkých strán trojuholníka je rovný výške trojuholníka. To ľahko vidno napríklad z vyjadrenia obsahu takého trojuholníka ako súčtu obsahov troch trojuholníkov tvorených daným (vnútorným) bodom a dvojicami vrcholov. Pretože bod M má od strán (rovnostranného) trojuholníka PQR vzdialenosti $|MA_1|/2$, $|MB_1|/2$ a $|MC_1|/2$, má výška t tohto trojuholníka veľkosť $t = (|MA_1| + |MB_1| + |MC_1|)/2 = a/2$. Pretože pre výšku v rovnostranného trojuholníka ABC platí $v = \sqrt{3}a/2$, platí $S = av/2 = \sqrt{3}v^2/3$. Podobne pre obsah T trojuholníka PQR s výškou t dostávame

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}t^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}v^2 = \frac{1}{3}S,$$

čiže $S = 3T$, čo sme chceli dokázať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Zistenie (vrátane nejakého zdôvodnenia), že trojuholník PQR je rovnostranný, ohodnoťte 3 bodmi.

3. *V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu*

$$1 + \sin \frac{x+\pi}{5} \cdot \sin \frac{x-\pi}{11} = 0.$$

(*J. Šimša*)

Riešenie. Pretože všetky hodnoty funkcie sínus ležia v intervale $\langle -1, 1\rangle$, je súčin dvoch hodnôt sínusu rovný číslu -1 len vtedy, keď je jedna hodnota 1 a druhá hodnota je -1. Číslo $x \in \mathbb{R}$ je teda riešením danej rovnice práve vtedy, keď existujú čísla $k, \ell \in \mathbb{Z}$ také, že platí dvojica rovností

$$\begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\ell\pi, \end{cases} \quad \text{alebo} \quad \begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = \dfrac{\pi}{2} + 2\ell\pi. \end{cases}$$

Vyriešením týchto lineárnych rovníc dostaneme vyjadrenia

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = -\dfrac{9\pi}{2} + 22\ell\pi, \end{cases} \quad \text{alebo} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{7\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = \dfrac{13\pi}{2} + 22\ell\pi. \end{cases}$$

Teraz nájdeme všetky dvojice celých čísel (k, ℓ), pre ktoré platí

$$\frac{3\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{9\pi}{2} + 22\ell\pi, \quad \text{resp.} \quad -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = \frac{13\pi}{2} + 22\ell\pi.$$

Jednoduchou úpravou týchto rovníc (vrátane krátenia číslom 2π) dostaneme

$$5k + 3 = 11\ell, \quad \text{resp.} \quad 5k - 5 = 11\ell.$$

Upravme prvú rovnicu na tvar $5(k-6) = 11(\ell-3)$. Úvahou o deliteľnosti nesúdeliteľnými číslami 5 a 11 zistíme, že všetky celočíselné riešenia takej rovnice majú tvar $k = 6 + 11n$ a $\ell = 3 + 5n$, pričom $n \in \mathbb{Z}$. Dosadením do príslušného vzťahu pre x tak dostávame prvú skupinu riešení

$$x = \frac{3\pi}{2} + 10k\pi = \frac{3\pi}{2} + 10(6 + 11n)\pi = 61{,}5\pi + 110n\pi.$$

Podobne z druhej rovnice $5k - 5 = 11\ell$ upravenej na tvar $5(k-1) = 11\ell$ zistíme, že $k = 1 + 11n$, $\ell = 5n$, pričom $n \in \mathbb{Z}$. Takže druhá skupina riešení má vyjadrenie

$$x = -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{7\pi}{2} + 10(1 + 11n)\pi = 6{,}5\pi + 110n\pi.$$

Záver. Všetky riešenia danej rovnice sú dané vzťahmi

$$x = 61{,}5\pi + 110n\pi \quad \text{a} \quad x = 6{,}5\pi + 110n\pi, \quad \text{pričom } n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Pretože $61{,}5 - 6{,}5 = 55 = 110/2$, dajú sa všetky riešenia zapísať jedným vzťahom

$$x = 6{,}5\pi + 55n\pi, \quad \text{pričom } n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Iné riešenie. Vďaka goniometrickému vzorcu

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

sa dá rovnica $1 + \sin A \sin B = 0$ prepísať na tvar

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = 2.$$

Vzhľadom na obor hodnôt funkcie kosínus je ostatná rovnosť splnená práve vtedy, keď platí $\cos(A+B) = 1$ a $\cos(A-B) = -1$. Pre zlomky A, B z pôvodnej rovnice tak dostávame sústavu rovností

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{x+\pi}{5} + \frac{x-\pi}{11} = 2k\pi, \\ A - B &= \frac{x+\pi}{5} - \frac{x-\pi}{11} = \pi + 2\ell\pi, \end{aligned}$$

ktoré musia platiť pre vhodné čísla $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Sčítaním a odčítaním dostaneme

$$\frac{x+\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + (k+\ell)\pi \qquad \text{a} \qquad \frac{x-\pi}{11} = -\frac{\pi}{2} + (k-\ell)\pi,$$

odkiaľ dvoma spôsobmi vyjadríme neznámu x:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 5(k+\ell)\pi = -\frac{9\pi}{2} + 11(k-\ell)\pi.$$

Ľahko zistíme, že čísla k, ℓ sú zviazané podmienkou $3(k-1) = 8\ell$, čo znamená, že $\ell = 3n$ a $k = 8n + 1$ pre vhodné $n \in \mathbb{Z}$. Dosadením do vzťahu pre x tak dostaneme vyjadrenie

$$x = \frac{13\pi}{2} + 55n\pi = 6{,}5\pi + 55n\pi,$$

ktoré je rovnaké, ako v prvom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za úvahu o hodnotách goniometrických funkcií sínus alebo kosínus a ďalšie 2 body za zostavenie analogických vzťahov pre hľadané riešenie x. Za vyjadrenie x v tvare (1) alebo (2) dajte zostávajúce 3 body.