2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

---

1. *Nájdite všetky dvojice takých celých čísel a, b, že súčet $a+b$ je koreňom rovnice $x^2+ax+b=0$.* (*E. Kováč*)

Riešenie. Hľadáme celé čísla a, b, pre ktoré $(a+b)^2+a(a+b)+b=0$. To je vzhľadom na neznámu b kvadratická rovnica $b^2+(3a+1)b+2a^2=0$ s celočíselnými koeficientmi. Celočíselný koreň má iba v prípade, že jej diskriminant

$$D=(3a+1)^2-4\cdot 2a^2=(a+3)^2-8$$

je úplný štvorec. Ten je pritom o osem menší ako iný úplný štvorec $(a+3)^2$. Ako ľahko zistíme (rozdiely druhých mocnín dvoch susedných prirodzených čísel postupne rastú), rozdiel 8 majú iba úplné štvorce 9 a 1, takže $(a+3)^2=9$, odkiaľ vyplýva $a=-6$ alebo $a=0$. Pre $a=-6$ vychádza $b=8$ a $b=9$, pre $a=0$ vychádza $b=0$ a $b=-1$. Dostávame tak štyri riešenia: (a,b) je jedna z dvojíc $(-6,8)$, $(-6,9)$, $(0,0)$, $(0,-1)$.

Poznámky. Ak za neznámu namiesto b zvolíme a, vyjde rovnica $2a^2+3ba+(b^2+b)=0$ s diskriminantom $D'=9b^2-8\cdot(b^2+b)=(b-4)^2-16$; úplné štvorce líšiace sa o 16 sú iba 0, 16 a 9, 25.

Úloha nájsť dva úplné štvorce x^2 a y^2 s daným rozdielom d sa pre malé hodnoty d (ako $d=8$ alebo $d=16$ v našom prípade) dá vyriešiť otestovaním niekoľkých prvých štvorcov 0, 1, 4, 9, … Pre ľubovoľné prirodzené d možno postupovať tak, že rovnicu $x^2-y^2=d$ upravíme na $(x-y)(x+y)=d$ a vypíšeme všetky rozklady daného čísla d na súčin d_1d_2 dvoch celočíselných činiteľov; z rovníc $d_1=x-y$, $d_2=x+y$ potom vypočítame príslušné x a y.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za také považujte aj riešenie, v ktorom sú úplné štvorce líšiace sa o 8 či 16 vypísané (uhádnuté) bez vysvetlenia, prečo iné také štvorce neexistujú. Za nájdenie riešenia iba pre $a=0$ (napr. chybnou úvahou, že číslo $a+b$ delí číslo b jedine pre $a=0$) dajte 2 body.

---

2. *Postupnosť reálnych čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňa pre každé $n\geqq 1$ rovnosť*

$$\frac{a_{n+3}-a_{n+2}}{a_n-a_{n+1}}=\frac{a_{n+3}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}}$$

a naviac platí $a_{11}=4$, $a_{22}=2$, $a_{33}=1$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k je súčet

$$a_1^k+a_2^k+\dots+a_{100}^k$$

druhou mocninou prirodzeného čísla. (*J. Zhouf*)

Riešenie. Najskôr dokážeme, že pre členy skúmanej postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí: rovnosť $a_n=0$ je splnená pre niektoré prirodzené n práve vtedy, keď pre to isté n platí $a_{n+3}=0$. Skutočne, ak $a_n=0$, tak menovatele zlomkov v zadanej rovnosti sú navzájom opačné (nenulové) čísla, takže také musia byť aj ich čitatele. Z rovnosti

$$a_{n+3}-a_{n+2}=-(a_{n+3}+a_{n+2})$$

už vyplýva $a_{n+3} = 0$. Naopak, ak platí $a_{n+3} = 0$, sú čitatele spomenutých zlomkov navzájom opačné čísla, takže také musia byť aj ich menovatele, odkiaľ $a_n = 0$.

Dokázaná vlastnosť má tento dôsledok: z podmienky $a_{33} \neq 0$ vyplýva $a_{3k} \neq 0$ (pre každé $k \geqq 1$), z $a_{22} \neq 0$ vyplýva $a_{3k+1} \neq 0$ a z $a_{11} \neq 0$ vyplýva $a_{3k+2} \neq 0$ (vždy pre každé $k \geqq 0$). Spolu vychádza, že *žiadny člen a_n skúmanej postupnosti nie je rovný nule.*

Z rovnosti zo zadania vyplýva rovnosť

$$(a_{n+3} - a_{n+2})(a_n + a_{n+1}) = (a_{n+3} + a_{n+2})(a_n - a_{n+1}),$$

z ktorej po roznásobení a následnom zjednodušení dostaneme (pre ľubovoľné prirodzené n)

$$a_{n+1}a_{n+3} = a_n a_{n+2}.$$

Ak zväčšíme n o 1, dostaneme analogický vzťah, ktorý platí pre ľubovoľné nezáporné celé n:

$$a_{n+2}a_{n+4} = a_{n+1}a_{n+3}.$$

Keď vynásobíme obe rovnosti a výsledok vykrátime (*nenulovým*) číslom $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$, vyjde $a_{n+4} = a_n$, t. j. daná postupnosť má periódu 4. Preto $a_1 = a_{33} = 1$, $a_2 = a_{22} = 2$, $a_3 = a_{11} = 4$, $a_4 = a_1 a_3 / a_2 = 2$, teda

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{100}^k = 25(1^k + 2^k + 4^k + 2^k) = \big(5(1 + 2^k)\big)^2.$$

Tým je dôkaz hotový.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. 2 body dajte za odvodenie dôležitej podmienky, že $a_n \neq 0$ pre všetky n, t. j. riešenie, v ktorom sa delí číslom $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$ bez overenia jeho nenulovosti, oceňte iba 4 bodmi. Z toho 1 bod dajte za konečnú úpravu súčtu k-tych mocnín na tvar druhej mocniny.

---

3. *Daný je trojuholník ABC a vnútri neho bod P. Označme X priesečník priamky AP so stranou BC a Y priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že štvoruholník $ABXY$ je tetivový práve vtedy, keď druhý priesečník (rôzny od bodu C) kružníc opísaných trojuholníkom ACX a BCY leží na priamke CP.* (*E. Kováč*)

Riešenie. Dané štyri body A, B, X, Y ležia na kružnici (obr. 1) práve vtedy, keď

$$|PA| \cdot |PX| = |PB| \cdot |PY|.$$

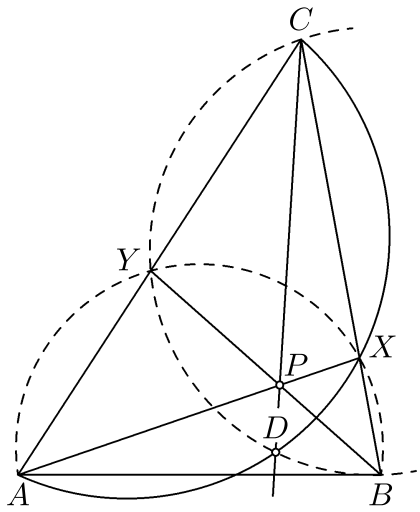
Kružnica opísaná trojuholníku ACX pretne polpriamku opačnú k polpriamke PC v bode, ktorý označíme D. Pre tento bod platí

$$|PA| \cdot |PX| = |PC| \cdot |PD|.$$

Rovnosť z prvej vety riešenia teda nastane práve vtedy, keď platí

$$|PB| \cdot |PY| = |PC| \cdot |PD|.$$

Táto rovnosť je splnená práve vtedy, keď bod D leží na kružnici opísanej trojuholníku BCY, teda práve vtedy, keď je bod $D \neq C$ druhým priesečníkom kružníc opísaných trojuholníkom ACX a BCY. Dôkaz je hotový.



Obr. 1

Poznámka. Úlohu možno ihneď vyriešiť na základe poznatku o tom, ako vyzerá množina všetkých bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k dvom daným kružniciam. Je to vždy priamka (nazývaná chordála), ktorá je kolmá na spojnicu stredov oboch kružníc a prechádza ich spoločnými bodmi (pokiaľ existujú). Rovnosť z prvej vety riešenia preto vyjadruje práve to, že bod P leží na chordále kružníc opísaných trojuholníkom ACX a BCY.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za dôkaz len jednej z oboch implikácií dajte 3 body.

---

4. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2,$$
$$\sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

(*J. Švrček*)

Riešenie. Najskôr si uvedomme, že s každým reálnym riešením (x, y) danej sústavy rovníc sú jej riešeniami aj dvojice $(x, -y)$, $(-x, y)$ a $(-x, -y)$. Stačí sa preto obmedziť na riešenia v obore nezáporných reálnych čísel. Navyše s každým riešením (x, y) je riešením danej sústavy aj dvojica (y, x). Môžeme preto ďalej predpokladať, že $0 \leqq x \leqq \leqq y$.

Prepíšme najskôr obe rovnice sústavy pomocou známeho vzťahu $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$:

$$\sin^2 x + 1 - \sin^2 y = y^2,$$
$$\sin^2 y + 1 - \sin^2 x = x^2.$$

Sčítaním oboch rovníc potom dostaneme

$$x^2 + y^2 = 2. \tag{1}$$

Keď odčítame druhú rovnicu od prvej, dostaneme

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 y = y^2 - x^2,$$

čiže

$$2(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = y^2 - x^2. \tag{2}$$

Pri uvedenom predpoklade $0 \leqq x \leqq y$ zo vzťahu (1) navyše vyplýva, že $0 \leqq x \leqq \leqq y \leqq \sqrt{2} < \pi/2$, a pretože funkcia sínus je na intervale $\langle 0, \pi/2)$ nezáporná a rastúca, vidíme, že pre také reálne čísla x a y je ľavá strana rovnice (2) nekladná, zatiaľ čo pravá strana je nezáporná. To znamená, že musí platiť $y^2 - x^2 = 0$, čo za uvedených predpokladov dáva $x = y$ a spolu s (1) tak máme $x = y = 1$.

V obore nezáporných reálnych čísel má daná sústava rovníc jediné riešenie, a to $(x, y) = (1, 1)$.

Záver. Daná sústava rovníc má práve štyri riešenia v obore reálnych čísel. Sú nimi nasledujúce dvojice: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za zistenie rovnosti $x^2 + y^2 = 2$ bez ďalšieho podstatného pokroku dajte 1 bod. Za uhádnutie všetkých riešení (napr. v dôsledku chybnej úvahy, že zo symetrickosti sústavy okamžite vyplýva rovnosť $x = y$) dajte 1 bod. Spomenuté čiastočné jednobodové zisky nemožno kumulovať sčítaním. Zmienku o symetrickosti neznámych x, y či možnosti meniť pri ich hodnotách ľubovoľne znamienka oceňte 1 bodom. Ak študent vyrieši úlohu len v niektorom kvadrante bez toho, aby našiel riešenia aj v ostatných kvadrantoch, dajte 4 body.