2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

1. *Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel má tú vlastnosť, že pre každé $n \geqq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, pričom b_n je číslo, ktoré má opačné poradie číslic ako číslo a_n (zápis čísla b_n môže na rozdiel od zápisu čísla a_n začínať jednou alebo viacerými nulami). Napríklad pre $a_1 = 170$ platí $a_2 = 241$, $a_3 = 383$, $a_4 = 766$, … Rozhodnite, či a_7 môže byť prvočíslo.* (Peter Novotný)

Riešenie. Dokážeme, že člen a_7 je vždy zložené číslo deliteľné jedenástimi. Kľúčom k riešeniu úlohy je kritérium deliteľnosti jedenástimi. Ak $\overline{c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0}$ je zápis čísla m v desiatkovej sústave, dáva číslo m po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako striedavý súčet jeho číslic:

$$\operatorname{zv}(m) = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^k c_k.$$

Pre zvyšok čísla b_n, ktoré má opačné poradie číslic ako číslo a_n, teda platí, že $\operatorname{zv}(b_n) = \pm \operatorname{zv}(a_n)$ podľa toho, či je počet číslic čísla a_n nepárny alebo párny. Preto ak je niektorý člen uvažovanej postupnosti deliteľný jedenástimi, sú jedenástimi deliteľné aj všetky nasledujúce členy. Navyše akonáhle má nejaký člen a_n uvažovanej postupnosti párny počet číslic, platí $\operatorname{zv}(a_n) = -\operatorname{zv}(b_n)$, takže $a_{n+1} = a_n + b_n$ už je deliteľné jedenástimi (a rovnako aj ďalšie členy).

Postupnosť (a_n) je zrejme rastúca. Ak má člen a_1 párny počet číslic, bude už člen a_2 zložené číslo deliteľné jedenástimi s výnimkou prípadu $a_1 = 10$, kedy však $a_3 = 22$. Stačí teda ukázať, že aj pre čísla a_1 s nepárnym počtom číslic bude medzi prvými šiestimi členmi postupnosti vždy aspoň jeden člen s párnym počtom číslic. Dokážeme to sporom v nasledujúcom odstavci.

Predpokladajme naopak, že všetky čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ majú nepárny počet číslic. Označme c prvú a d poslednú číslicu čísla a_1, takže $1 \leqq c \leqq 9$ a $0 \leqq d \leqq 9$ (v prípade jednociferného a_1 položíme $c = d$). Číslo b_1 potom bude formálne začínať číslicou d a končiť číslicou c, a pretože predpokladáme, že číslo $a_2 = a_1 + b_1$ má tiež nepárny, teda rovnaký počet číslic, musí nutne byť $c+d < 10$. To bude teda číslica na jeho poslednom mieste, zatiaľ čo na prvom mieste bude stáť $c + d$ alebo $c + d + 1$ (podľa toho, či pri sčítaní došlo na predposlednom mieste k prechodu cez desiatku), v každom prípade bude na prvom mieste číslica aspoň $c + d$. Podobne postupne zistíme, že prvá číslica čísla $a_3 = a_2 + b_2$ bude aspoň $2(c+d)$, prvá číslica čísla $a_4 = a_3 + b_3$ bude aspoň $4(c+d)$, prvá číslica čísla $a_5 = a_4 + b_4$ bude aspoň $8(c + d)$ a prvá číslica čísla $a_6 = a_5 + b_5$ bude aspoň $16(c+d)$. Pretože $1 \leqq c+d < 10$, nemôže už zrejme platiť $16(c+d) < 10$. Aspoň v jednom z čísel $a_2, a_3, \ldots, a_6$ sa teda počet číslic zvýšil z nepárneho počtu na párny.

Tým je úloha vyriešená. Dokázali sme, že a_7 nie je nikdy prvočíslo.

Poznámka. Pre $a_1 = 10\,220$ vyjde $a_6 = 185\,767$, čo je prvočíslo.

---

2. *Nech m a n sú také prirodzené čísla, že rovnica*

$$(x + m)(x + n) = x + m + n$$

má aspoň jedno celočíselné riešenie. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2.$$

(J. Šimša)

Riešenie. Ukážeme, že z predpokladu úlohy vyplývajú silnejšie odhady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqq \frac{m}{n} \leqq 2 - \frac{2}{n}. \tag{1}$$

Danú rovnicu najskôr upravíme na tvar

$$(x + m - 1)(x + n) = m.$$

Ak v tejto rovnosti je x celé číslo, dostávame rozklad prirodzeného čísla m na súčin dvoch celých čísel, ktoré teda ležia obe buď v intervale $\langle 1, m\rangle$, alebo v intervale $\langle -m, -1\rangle$. V každom prípade rozdiel týchto dvoch čísel neprevyšuje (spoločnú) dĺžku oboch intervalov:

$$(x + n) - (x + m - 1) \leqq m - 1, \quad \text{čiže} \quad n \leqq 2m - 2,$$

odkiaľ vyplýva dolný odhad (1). Vzhľadom na symetriu čísel m a n platí tiež nerovnosť $m \leqq 2n - 2$, z ktorej dostaneme horný odhad (1).

Iné riešenie. Vzhľadom na symetriu sa stačí zaoberať prípadom $m \geqq n$ a dokázať horný odhad (1) z prvého riešenia, teda nerovnosť $m \leqq 2n - 2$.

Daná rovnica má tvar $x^2 + (m + n - 1)x + mn - m - n = 0$ a má diskriminant

$$\begin{aligned} D &= (m + n - 1)^2 - 4(mn - m - n) = m^2 + n^2 - 2mn + 2m + 2n + 1 = \\ &= (m - n + 1)^2 + 4n. \end{aligned}$$

Ten musí byť druhou mocninou celého čísla, ak má mať daná rovnica celočíselné riešenie. Pretože $4n$ je kladné párne číslo, je číslo D väčšie ako mocnina $(m-n+1)^2$ a má rovnakú paritu ako jej základ $(m - n + 1)$, ktorý je kladný (keďže uvažujeme len prípad $m \geqq n$). Preto musí platiť $D = k^2$, kde k je celé číslo spĺňajúce podmienky $k > m - n + 1 > 0$ a $k \equiv m - n + 1 \pmod 2$. To znamená, že $k \geqq m - n + 3$, takže platí

$$\begin{aligned} D &= (m - n + 1)^2 + 4n = k^2 \geqq (m - n + 3)^2 = (m - n + 1 + 2)^2 = \\ &= (m - n + 1)^2 + 4(m - n + 1) + 4. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva nerovnosť $4n \geqq 4(m - n + 1) + 4$, čiže $m \leqq 2n - 2$, čo sme mali dokázať.

Poznámky. Pretože dvojice tvaru $(m, n) = (2n - 2, n)$ a $(m, n) = (m, 2m - 2)$ vyhovujú podmienke úlohy, sú odhady (1) najlepšie možné.

Je možné popísať všetky dvojice prirodzených čísel (m, n), ktoré vyhovujú podmienke úlohy, a to spôsobom uvedeným v nasledujúcom tvrdení, ktoré uvedieme bez dôkazu.

Veta. *Nech m a n sú celé čísla. Rovnica $(x + m)(x + n) = x + m + n$ má aspoň jedno celočíselné riešenie práve vtedy, keď sú čísla m, n tvaru*

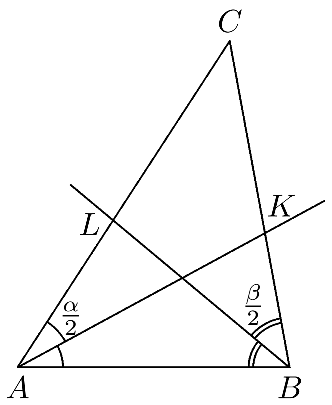
$$m = (a - 1)b \quad \text{a} \quad n = a(b - 1), \quad \text{pričom} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

3. *V trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný, označme K priesečník osi vnútorného uhla BAC so stranou BC a L priesečník osi vnútorného uhla ABC so stranou AC. Ďalej označme S stred kružnice vpísanej, O stred kružnice opísanej a V priesečník výšok v trojuholníku ABC. Dokážte, že nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné:*

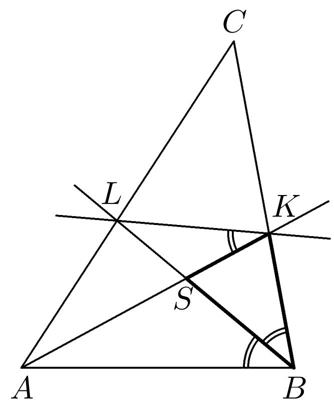
a) Priamka KL sa dotýka kružníc opísaných trojuholníkom ALS, BVS a BKS.

b) Body A, B, K, L a O ležia na jednej kružnici. (*T. Jurík*)

Riešenie. Označme uhly v trojuholníku ABC zvyčajným spôsobom. Z vlastností bodov K a L je zrejmé (obr. 1), že body A, B, K, L ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď $|\measuredangle KAL| = |\measuredangle KBL|$, t. j. práve vtedy, keď $\alpha = \beta$.



Obr. 1



Obr. 2

Priamka KL sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku BKS (nutne v bode K) práve vtedy, keď sa rovnajú úsekový a obvodový uhol príslušnej tetivy KS (obr. 2): $|\measuredangle LKA| = |\measuredangle LBK| = \beta/2 = |\measuredangle LBA|$. Posledná rovnosť je však ekvivalentná s tým, že body A, B, K, L ležia na jednej kružnici. Ako už vieme, to nastane práve vtedy, keď $\alpha = \beta$. (Zo symetrie je zrejmé, že je to zároveň ekvivalentné tomu, že sa priamka KL dotýka kružnice opísanej trojuholníku ALS.)

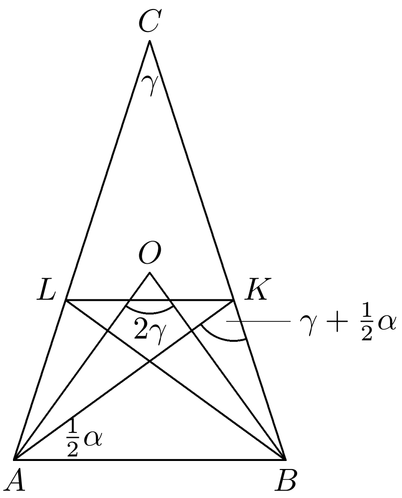
Z uvedených výsledkov vyplýva, že svoje ďalšie úvahy môžeme obmedziť na rovnoramenné trojuholníky ABC so základňou AB. Pozrime sa najskôr, kedy kružnica opísaná štvoruholníku $ABKL$ obsahuje bod O. Stredový uhol AOB v kružnici opísanej trojuholníku ABC má veľkosť 2γ, zatiaľ čo veľkosť uhla AKB je $180° - \alpha/2 - \beta = \gamma + \alpha/2$ (obr. 3). Bod O pritom nemôže ležať na strane AB (keď je uhol γ pravý) ani v polrovine opačnej k ABC (keď je uhol γ tupý), pretože v tom prípade je

$$|\measuredangle AOB| + |\measuredangle AKB| = (360° - 2\gamma) + (\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = 180° + \tfrac{3}{2}\alpha + \beta > 180°.$$

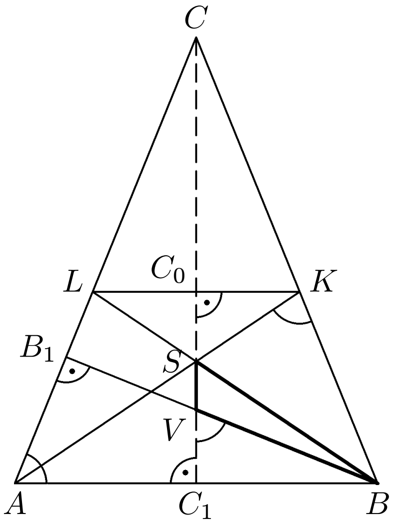
Body A, B, K, O teda ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď

$$2\gamma = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{čiže} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72°.$$

Ostáva zodpovedať otázku, kedy sa kružnica opísaná trojuholníku BVS dotýka priamky KL. V polrovine KLB existujú dve kružnice, ktoré obsahujú body B a S



Obr. 3



Obr. 4

a dotýkajú sa priamky KL (Apollóniova úloha, pre bod dotyku T z mocnosti bodu L k takej kružnici platí $|LT|^2 = |LS| \cdot |LB|$). Jednu takú kružnicu už poznáme, je to kružnica opísaná trojuholníku BKS, ktorá sa priamky KL dotýka v bode K. Druhá kružnica sa teda dotýka priamky KL v bode K' súmerne združenom s K podľa stredu L. Ak má kružnica ℓ opísaná trojuholníku BVS ležať v polrovine KLB, musí v nej ležať aj jej bod V, ktorý je potom nutne vnútorným bodom úsečky C_0C_1, ktorá je časťou osi úsečky AB (obr. 4). Uhol SBV je teda ostrý (jeho veľkosť je najviac $\beta/2$), preto stred kružnice ℓ leží v polrovine C_0C_1B a leží tam aj jeho kolmý priemet (prípadný bod dotyku) na priamku KL. Kružnica ℓ sa teda dotýka priamky KL jedine v prípade, keď je to kružnica opísaná trojuholníku BKS, teda keď body B, K, S, V ležia na jednej kružnici. To nastane, práve vtedy, keď $|\measuredangle C_1VB| = |\measuredangle SKB|$ (to platí bez ohľadu na to, či bod V leží medzi bodmi C_1, S, alebo medzi bodmi C_0, S; obr. 4). Z pravouhlých trojuholníkov ABB_1 a BVC_1 vyplýva $|\measuredangle C_1VB| = \alpha$, takže rovnosť $|\measuredangle C_1VB| = |\measuredangle SKB|$ platí práve vtedy, keď

$$\alpha = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{čiže} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72^\circ.$$

Dokázali sme, že obe podmienky a) a b) sú ekvivalentné s tým, že trojuholník ABC je rovnoramenný s uhlami $\alpha = \beta = 72^\circ$ a $\gamma = 36^\circ$.

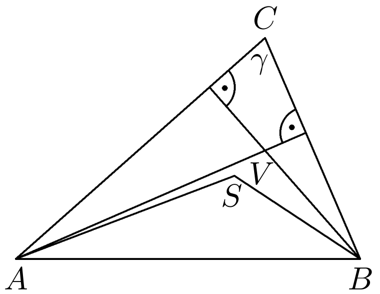
---

4. *V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte množinu ťažísk všetkých ostrouhlých trojuholníkov ABC, pre ktoré platí: Vrcholy A a B, priesečník výšok V a stred S kružnice vpísanej do trojuholníka ABC ležia na jednej kružnici.* (J. Švrček)

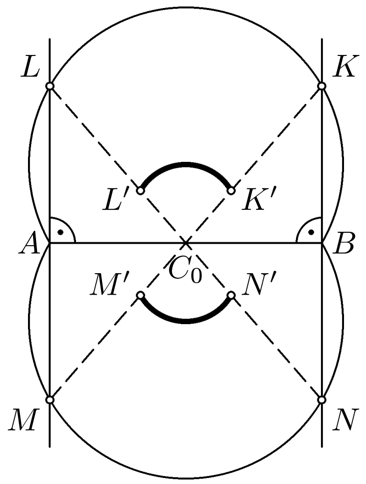
Riešenie. Pretože trojuholník ABC je ostrouhlý, ležia body V a S vnútri neho. Ak označíme veľkosti uhlov v danom trojuholníku zvyčajným spôsobom, platí (obr. 5)

$$|\measuredangle AVB| = 180^\circ - \gamma \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle ASB| = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Body A, B, V a S teda ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď $|\measuredangle AVB| = |\measuredangle ASB|$, čo je podľa uvedených vzťahov ekvivalentné s rovnosťou $\gamma = 60^\circ$. Vrchol C tak nutne leží



Obr. 5



Obr. 6

na niektorom z dvoch kružnicových oblúkov, z ktorých je vidno úsečku AB pod uhlom $60°$. Pretože je trojuholník ABC ostrouhlý, musí navyše vrchol C ležať vnútri pásu ohraničeného kolmicami na priamku AB v bodoch A a B. Vrchol C je teda vnútorným bodom takto ohraničených kružnicových oblúkov KL a MN (obr. 6).

Označme ďalej C_0 stred úsečky AB. Pretože ťažisko T každého z uvažovaných trojuholníkov ABC je obrazom bodu C v rovnoľahlosti so stredom C_0 a koeficientom $\frac{1}{3}$, je bod T vnútorným bodom jedného z oblúkov $K'L'$ alebo $M'N'$, ktoré sú obrazmi oblúka KL a MN v uvažovanej rovnoľahlosti.

Pretože spomenutá rovnoľahlosť je vzájomne jednoznačné zobrazenie, je zrejmé, že každý vnútorný bod oblúka $K'L'$ alebo $M'N'$ má požadovanú vlastnosť, t. j. je ťažiskom ostrouhlého trojuholníka ABC s uhlom $60°$ pri vrchole C, ktorého zodpovedajúce body V a S ležia na jednej kružnici s vrcholmi A a B.

---

5. *Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r spĺňajúce nasledujúce podmienky:*

$$p \mid q + r,$$
$$q \mid r + 2p,$$
$$r \mid p + 3q.$$

(*M. Panák*)

Riešenie. Hľadajme trojice p, q, r podľa toho, ktoré z týchto troch čísel je najväčšie:

- ▷ *Najväčšie je p.* Potom z podmienky $p \mid q + r$ a z nerovnosti $q + r < 2p$ vyplýva $q + r = p$. Z druhej podmienky potom dostaneme $q \mid r + 2p = 3r + 2q$, teda $q \mid 3r$, čo vzhľadom na rôznosť prvočísel znamená, že $q = 3$. Teda $p = r + 3$ a posledná podmienka hovorí, že $r \mid r + 12$, čiže $r \mid 12$, teda $r = 2$ (prvočísla majú byť rôzne). Takže $p = 5$. Táto trojica naozaj spĺňa podmienky zo zadania.
- ▷ *Najväčšie je q.* Potom podmienka $q \mid r + 2p$ a nerovnosť $r + 2p < 3q$ dávajú $r + 2p = q$ alebo $r + 2p = 2q$.

  Ak $2q = r + 2p$, musí byť r párne. Teda $r = 2$ a z rovnosti $2q = 2 + 2p$ vyplýva $q = p + 1$, čo pre prvočísla p, q väčšie ako $r = 2$ nie je možné.

Ak $q = r + 2p$, prvá podmienka hovorí, že $p \mid 2r + 2p$, teda $p \mid 2r$, čiže $p = 2$. Posledná podmienka potom dáva $r \mid p + 3q = 3r + 7p = 3r + 14$, teda $r \mid 14$, takže $r = 7$. Potom $q = r + 2p = 11$. Táto trojica tiež vyhovuje zadaniu.

▷ *Najväčšie je r.* Potom porovnáme podmienku $r \mid p + 3q$ a nerovnosť $p + 3q < 4r$. Keby bolo $p + 3q = 3r$, bolo by $p = 3(r - q)$, teda $p = 3$, $r - q = 1$, takže $r = 3$ a $q = 2$, čo nie sú tri rôzne prvočísla.

Ak $p + 3q = 2r$, dostávame z prvej podmienky $p \mid 2(q + r) = p + 5q$, takže $p \mid 5q$ a $p = 5$. Druhá podmienka potom dáva $q \mid 2(r + 2p) = 2r + 20 = 3q + 25$, teda $q = 5$ a výslednú trojicu netvoria rôzne prvočísla.

Napokon nech $p + 3q = r$. Prvá podmienka potom dáva $p \mid p + 4q$, takže $p \mid 4q$ a $p = 2$. Druhá podmienka hovorí, že $q \mid r + 2p = 3q + 6$, teda $q \mid 6$ a $q = 3$, lebo $q \neq p = 2$. Potom $r = p + 3q = 11$. Táto trojica tiež vyhovuje zadaniu.

Riešením úlohy sú tri trojice prvočísel (p, q, r), a to $(5, 3, 2)$, $(2, 11, 7)$ a $(2, 3, 11)$.

---

6. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{cotg}^2 2y &= 1,\\
\operatorname{tg}^2 y + 2\operatorname{cotg}^2 2z &= 1,\\
\operatorname{tg}^2 z + 2\operatorname{cotg}^2 2x &= 1.
\end{aligned}$$

(*J. Švrček, P. Calábek*)

Riešenie. Pre každé prípustné φ platí

$$2\operatorname{cotg}^2 2\varphi = 2\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{cotg}^2\varphi - 2).$$

Položme $\operatorname{tg}^2 x = a$, $\operatorname{tg}^2 y = b$ a $\operatorname{tg}^2 z = c$, pričom a, b, c sú kladné reálne čísla. Danú sústavu tak prevedieme na tvar

$$\begin{aligned}
a + \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) &= 2,\\
b + \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) &= 2,\\
c + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) &= 2.
\end{aligned}\tag{1}$$

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a \geqq b \geqq c$ (pri inom usporiadaní úlohu vyriešime podobne). Pri takomto usporiadaní z predchádzajúcej sústavy rovníc vyplýva

$$b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c} \leqq a + \frac{1}{a}.$$

Pretože pre každé kladné x platí $x + 1/x \geqq 2$, zo sústavy (1) navyše vyplýva $0 < a, b, c \leqq 1$. Funkcia $f(x) = x + 1/x$ je však na intervale $(0; 1\rangle$ klesajúca, preto platia aj nerovnosti

$$a + \frac{1}{a} \leqq b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c}.$$

To spolu s predchádzajúcimi nerovnosťami dáva $a = b = c$.

Ostáva tak určiť všetky $u \in (0; 1\rangle$, ktoré sú riešením rovnice

$$u + \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = 2.$$

Po jednoduchej úprave dostaneme kvadratickú rovnicu

$$3u^2 - 4u + 1 = 0, \quad \text{t. j.} \quad (u - 1)(3u - 1) = 0.$$

Táto kvadratická rovnica má práve dva kladné reálne korene $u_1 = 1$ a $u_2 = 1/3$. Vzhľadom na použité substitúcie a periodickosť funkcie tangens sú riešením danej sústavy rovníc práve nasledujúce trojice (x, y, z) reálnych čísel

$$\left(\frac{\pi}{4} + k_1\,\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_2\,\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_3\,\frac{\pi}{2}\right) \text{ a } \left(\pm\frac{\pi}{6} + k_1\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_2\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_3\pi\right),$$

pričom k_1, k_2, k_3 sú ľubovoľné celé čísla a tri znamienka v trojici druhého typu sú vybrané ľubovoľne, t. j. navzájom nezávisle.