2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *Určte všetky hodnoty celočíselného parametra a, pre ktoré má rovnica*

$$(x+a)(x+2a)=3a$$

aspoň jeden celočíselný koreň. (J. Zhouf)

Riešenie. Po roznásobení ľavej strany a prevedení člena $3a$ z pravej strany na ľavú dostaneme kvadratickú rovnicu

$$x^2+3ax+2a^2-3a=0.$$

Jej korene (pokiaľ existujú) majú podľa známeho vzťahu tvar

$$x_{1,2}=\frac{-3a+\sqrt{a^2+12a}}{2}.$$

Hodnota takého výrazu je celé číslo iba vtedy, keď je číslo a^2+12a druhou mocninou nejakého celého čísla b, o ktorom môžeme predpokladať, že je nezáporné. Rovnosť $b=\sqrt{a^2+12a}$ upravíme umocnením a doplnením na štvorec na tvar

$$(a+6)^2=b^2+36, \quad \text{čiže} \quad (a+6+b)(a+6-b)=36.$$

Dostali sme rozklad čísla 36 na súčin dvoch celočíselných činiteľov, ktoré preto musia mať rovnaké znamienko. Pretože ich rozdiel

$$(a+6+b)-(a+6-b)=2b$$

je párne nezáporné číslo (pripomíname, že $b \geqq 0$), majú oba činitele rovnakú paritu (sú zároveň párne alebo nepárne) a druhý činiteľ nie je väčší ako prvý činiteľ. To všetko spolu znamená, že sú len štyri možnosti:

(1) $a+6+b=18$ a $a+6-b=2$. Táto sústava rovníc má jediné riešenie $a=4$ a $b=8$. Skúška: rovnica $(x+4)(x+8)=12$ má korene -10 a -2.

(2) $a+6+b=6$ a $a+6-b=6$. V tomto prípade $a=0$ a $b=0$. Skúška: rovnica $(x+0)(x+0)=0$ má dvojnásobný koreň 0.

(3) $a+6+b=-2$ a $a+6-b=-18$. V tomto prípade $a=-16$ a $b=8$. Skúška: rovnica $(x-16)(x-32)=-48$ má korene 20 a 28.

(4) $a+6+b=-6$ a $a+6-b=-6$. V tomto prípade $a=-12$ a $b=0$. Skúška: rovnica $(x-12)(x-24)=-36$ má dvojnásobný koreň 18.

Odpoveď. Hľadané hodnoty parametra a sú štyri, a to čísla 4, 0, -16 a -12.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení upravíme rovnicu na tvar

$$x^2+3ax+2a^2-3a=0$$

a pokúsime sa mnohočlen na ľavej strane zapísať v tvare súčinu dvoch lineárnych činiteľov tvaru $\alpha x+\beta a+\gamma$. Aj keď taký rozklad neexistuje, experimentovaním zistíme, že „takmer vyhovuje“ súčin

$$(x+2a+3)(x+a-3),$$

ktorý sa líši od daného mnohočlena $x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a$ iba v konštantnom člene; presvedčiť sa o tom možno roznásobením. Skúmanú rovnicu tak možno zapísať v tvare

$$(x + 2a + 3)(x + a - 3) = -9.$$

Aj keď na pravej strane nie je nula, pre riešenie v obore celých čísel je každý podobný rozklad cenný, lebo existuje iba konečný počet rozkladov príslušného čísla (v našom prípade čísla -9) na súčin dvoch celočíselných činiteľov. Vypíšme ich:

(1) $x + 2a + 3 = 9$ a $x + a - 3 = -1$, čiže $a = 4$ a $x = -2$,
(2) $x + 2a + 3 = 3$ a $x + a - 3 = -3$, čiže $a = 0$ a $x = 0$,
(3) $x + 2a + 3 = 1$ a $x + a - 3 = -9$, čiže $a = 4$ a $x = -10$,
(4) $x + 2a + 3 = -1$ a $x + a - 3 = 9$, čiže $a = -16$ a $x = 28$,
(5) $x + 2a + 3 = -3$ a $x + a - 3 = 3$, čiže $a = -12$ a $x = 18$,
(6) $x + 2a + 3 = -9$ a $x + a - 3 = 1$, čiže $a = -16$ a $x = 20$.

Prichádzame tak k rovnakej odpovedi ako v prvom riešení: vyhovujúce hodnoty parametra a sú čísla 4, 0, -12 a -16.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky hodnoty celočíselného parametra a, pre ktoré má rovnica $x^2 + ax = 2\,005$ celočíselné riešenie. [± 396, $\pm 2\,004$]

N2. V obore celých čísel riešte rovnicu $2/a + 3/b = \frac{4}{5}$. [Hľadané dvojice (a, b) sú $(40, 4)$, $(10, 5)$, $(4, 10)$, $(2, -15)$ a $(-10, 3)$.]

N3. Pre ktoré dvojice prvočísel p a q má rovnica $x^2 + px = q^2$ celočíselné riešenie? [Jedine pre $p = 3$ a $q = 2$.]

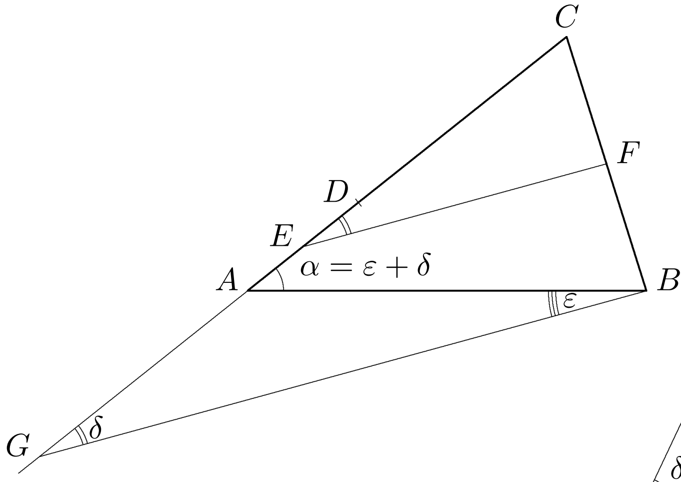
N4. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a a b, pre ktoré má rovnica $x^2 - ax + b^2 = 0$ dva korene, ktorých rozdiel sa rovná číslu 30. [Hľadané dvojice (a, b) sú $(226, 112)$, $(78, 36)$, $(50, 20)$ a $(34, 8)$.]

---

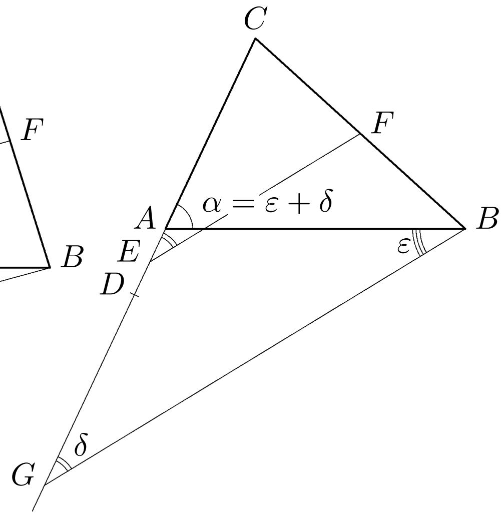
2. *V danom trojuholníku ABC označme D ten bod polpriamky CA, pre ktorý platí $|CD| = |CB|$. Ďalej označme postupne E, F stredy úsečiek AD a BC. Dokážte, že $|\angle BAC| = 2|\angle CEF|$ práve vtedy, keď $|AB| = |BC|$.* (*P. Leischner*)

Riešenie. Označme G ten bod polpriamky opačnej k polpriamke AC, pre ktorý platí $|AG| = |BC| = |CD|$ (obr. 1a pre situáciu, keď $|AC| > |BC|$, a obr. 1b pre situáciu, keď $|AC| < |BC|$ – sami si nakreslite a rozmyslite situáciu, keď $|AC| = |BC|$). V trojuholníku ABG označme ešte $\varepsilon = |\angle ABG|$ a $\delta = |\angle BGA|$. Pretože $|EA| = |ED|$ a $|AG| = |CD|$, je bod E stred úsečky CG, teda úsečka EF je stredná priečka trojuholníka BCG. Platí preto $EF \parallel GB$ a z rovnosti súhlasných uhlov BGA a FEC dostávame $|\angle FEC| = \delta$. Pretože uhol BAC je vonkajším uhlom trojuholníka ABG, pre jeho veľkosť $\alpha = |\angle BAC|$ platí $\alpha = \varepsilon + \delta$. To znamená, že rovnosť $\alpha = 2\delta$ zo zadania úlohy nastane práve vtedy, keď $\varepsilon + \delta = 2\delta$, čiže $\varepsilon = \delta$. Z trojuholníka ABG však vyplýva, že rovnosť $\varepsilon = \delta$ je splnená práve vtedy, keď $|AB| = |AG|$, čiže $|AB| = |BC|$. Tým je ekvivalencia rovností $\alpha = 2\delta$ a $|AB| = |BC|$ dokázaná.

Iné riešenie. Namiesto „trikom“ zvoleného pomocného bodu G z prvého riešenia zostrojíme os o vnútorného uhla BAC daného trojuholníka ABC a jej priesečník so stranou BC označíme H (obr. 2a a obr. 2b pre situácie $|AC| > |BC|$, resp. $|AC| < |BC|$). Význam osi o pre riešenie našej úlohy je zrejmý: podľa súhlasných uhlov CEF a CAH usúdime, že rovnosť $|\angle BAC| = 2|\angle CEF|$ zo zadania úlohy nastane práve vtedy, keď budú úsečky AH a EF rovnobežné, čiže trojuholníky CAH a CEF



Obr. 1a

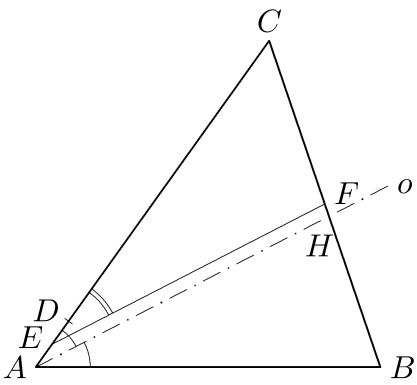


Obr. 1b

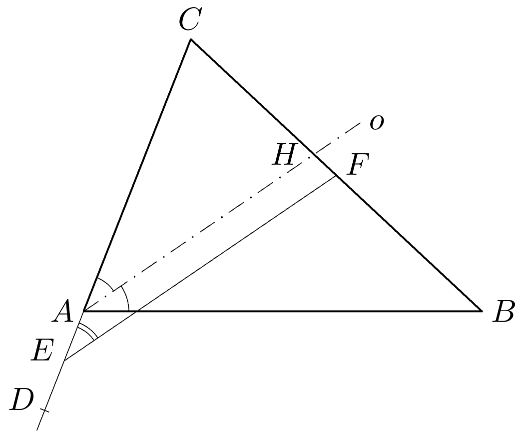
podobné. Podľa vety *sus* sú trojuholníky CAH a CEF podobné práve vtedy, keď je splnený pomer

$$|AC| : |HC| = |EC| : |FC|. \tag{1}$$

Rovnosť $|\measuredangle BAC| = 2|\measuredangle CEF|$ je teda ekvivalentná s podmienkou (1), ktorú teraz preskúmame.



Obr. 2a



Obr. 2b

Dĺžky úsečiek zastúpených v (1) najskôr vyjadríme pomocou dĺžok

$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|$$

strán zadaného trojuholníka ABC. Pretože bod F je stred úsečky BC a bod E stred úsečky AD, platí $|FC| = |BC|/2 = a/2$ a

$$|EC| = \frac{|AC| + |DC|}{2} = \frac{|AC| + |BC|}{2} = \frac{b + a}{2}.$$

Ostáva vyjadriť dĺžku úsečky HC. Z rovností

$$|HC| + |HB| = a, \quad |HC| : |HB| = b : c$$

(prvá z nich je triviálna, druhá vyjadruje známy fakt o pomere, v ktorom os vnútorného uhla delí protiľahlú stranu trojuholníka, poz. tretiu návodnú úlohu) dostaneme po jednoduchom výpočte vyjadrenie

$$|HC| = \frac{ab}{b+c}.$$

Dosaďme teraz všetky určené dĺžky do rovnosti (1) a potom ju ďalej ekvivalentne upravujme:

$$\begin{aligned} b : \frac{ab}{b+c} &= \frac{a+b}{2} : \frac{a}{2}, \\ \frac{b+c}{a} &= \frac{a+b}{a}, \\ b+c &= a+b, \\ c &= a. \end{aligned}$$

Dokázali sme potrebné: podmienka (1) platí práve vtedy, keď $c = a$, čiže $|AB| = |BC|$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. K ľubovoľnému trojuholníku ABC zostrojíme ten bod D polpriamky CA, pre ktorý platí $|CD| = |CB|$. Vyjadrite veľkosť uhla ABD pomocou veľkostí $\alpha = |\measuredangle BAC|$ a $\beta = |\measuredangle ABC|$. [$|\measuredangle ABD| = \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$. Všimnite si, že CBD je uhol pri základni BD rovnoramenného trojuholníka BCD.]

N2. Označme zvyčajným spôsobom α, β, γ vnútorné uhly trojuholníka ABC a pre stred D strany AC uvažujme ešte uhly $\delta = |\measuredangle ADB|$ a $\varepsilon = |\measuredangle BDC|$. Dokážte, že rovnosti $\delta = 2\gamma$, $\varepsilon = 2\alpha$ a $\beta = 90°$ sú navzájom ekvivalentné. [Každá z troch rovností je ekvivalentná s tým, že $|AD| = |BD| = |CD|$.]

N3. Dokážte, že os vnútorného uhla BAC pretne protiľahlú stranu BC všeobecného trojuholníka ABC v bode H, pre ktorý platí $|HB| : |HC| = |AB| : |AC|$. [Dvoma spôsobmi vyjadrite pomer obsahov trojuholníkov ABH a ACH so zhodnými výškami z každého zo spoločných vrcholov A a H.]

---

3. *Rozhodnite, či nerovnosť*

$$a(b+1) + b(c+1) + c(d+1) + d(a+1) \geqq \tfrac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pre všetky také kladné čísla a, b, c, d, ktoré spĺňajú podmienku

a) $ab = cd = 1$;

b) $ac = bd = 1$. (J. Šimša)

Riešenie. a) Danú nerovnosť budeme ekvivalentne upravovať postupným roznásobovaním. Akonáhle sa pritom niekde objaví súčin ab alebo cd, nahradíme ho číslom 1:

$$\begin{aligned} 2(ab + a + bc + b + cd + c + da + d) &\geqq (ab + a + b + 1)(cd + c + d + 1), \\ 2(ad + bc + a + b + c + d + 2) &\geqq (a + b + 2)(c + d + 2), \\ 2(ad + bc) + 2(a + b + c + d) + 4 &\geqq ac + ad + bc + bd + 2(a + b + c + d) + 4, \\ ad + bc &\geqq ac + bd, \\ (a - b)(c - d) &\leqq 0. \end{aligned}$$

Ostatná nerovnosť vo všeobecnosti neplatí, ako ukazuje príklad $a = c = 2$ a $b = d = 1/2$ (hodnoty sú zvolené tak, aby bol splnený predpoklad $ab = cd = 1$).

b) Danú nerovnosť budeme upravovať s podobnou stratégiou ako v časti a). Pretože však tentokrát môžeme číslom 1 nahrádzať súčiny ac a bd, vynásobíme na pravej strane nerovnosti najskôr prvý činiteľ s tretím a druhý činiteľ so štvrtým:

$$\begin{aligned} 2(ab+a+bc+b+cd+c+da+d) &\geqq (ac+a+c+1)(bd+b+d+1), \\ 2(ab+bc+cd+ad+a+b+c+d) &\geqq (a+c+2)(b+d+2), \\ 2(ab+bc+cd+ad)+2(a+b+c+d) &\geqq ab+ad+bc+cd+2(a+b+c+d)+4, \\ ab+bc+cd+da &\geqq 4, \\ (a+c)(b+d) &\geqq 4. \end{aligned}$$

Ostatná nerovnosť platí pre všetky štvorice kladných čísel a, b, c, d spĺňajúce predpoklad $ac = bd = 1$. Každý z oboch činiteľov $a + c$ a $b + d$ je totiž súčtom kladného čísla a čísla k nemu prevráteného, teda je väčší alebo rovný číslu 2. Tento známy výsledok

$$u > 0 \quad \Longrightarrow \quad u + \frac{1}{u} \geqq 2 \tag{1}$$

vyplýva priamo z identickej rovnosti

$$u + \frac{1}{u} = \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 + 2$$

a poznatku, že druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla je nezáporná. Odhad (1) možno tiež získať zo známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

ľubovoľných nezáporných čísel a_i, keď zvolíme $n = 2$, $a_1 = u$ a $a_2 = 1/u$.

Odpoveď. Skúmaná nerovnosť pri podmienke a) všeobecne neplatí, pri podmienke b) platí.

Iné riešenie. a) Použijeme „dosadzovaciu stratégiu“: z danej podmienky $ab = cd = 1$ vypočítame $b = 1/a$, $d = 1/c$ a takto vyjadrené čísla b a d dosadíme do skúmanej nerovnosti. Dostaneme nerovnosť s dvoma (už nezávislými) premennými a a c. Našou úlohou bude zistiť, či pre ľubovoľné hodnoty $a > 0$ a $c > 0$ platí

$$\begin{gathered} a\Big(\frac{1}{a}+1\Big)+\frac{1}{a}(c+1)+c\Big(\frac{1}{c}+1\Big)+\frac{1}{c}(a+1) \geqq \frac{1}{2}(a+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)(c+1)\Big(\frac{1}{c}+1\Big), \\ 2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{1}{2}\Big(2+a+\frac{1}{a}\Big)\Big(2+c+\frac{1}{c}\Big), \\ 2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq 2+a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\Big(ac+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{ac}\Big), \\ \frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geqq ac+\frac{1}{ac}, \\ c^2+a^2 \geqq a^2c^2+1, \\ 0 \geqq (a^2-1)(c^2-1). \end{gathered}$$

Vidíme, že ostatná nerovnosť pre kladné čísla a, c všeobecne neplatí, stačí zvoliť napr. hodnoty $a = c = 2$, ktorým zodpovedajú hodnoty $b = d = 1/2$.

b) Podobne ako v časti a) z danej podmienky $ac = bd = 1$ vypočítame teraz $c = 1/a$, $d = 1/b$ a po dosadení za c, d do skúmanej nerovnosti dostaneme nerovnosť s nezávislými premennými $a > 0$ a $b > 0$:

$$a(b+1) + b\Big(\frac{1}{a}+1\Big) + \frac{1}{a}\Big(\frac{1}{b}+1\Big) + \frac{1}{b}(a+1) \geqq \frac{1}{2}(a+1)(b+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)\Big(\frac{1}{b}+1\Big),$$

$$ab + a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} \geqq \frac{1}{2}\Big(2 + a + \frac{1}{a}\Big)\Big(2 + b + \frac{1}{b}\Big),$$

$$ab + a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} \geqq \frac{1}{2}\Big(4 + 2a + 2b + ab + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab}\Big),$$

$$ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} \geqq 4.$$

Ostatná nerovnosť však zrejme platí pre ľubovoľné kladné čísla a a b, lebo je súčtom dvoch nerovností

$$ab + \frac{1}{ab} \geqq 2 \quad \text{a} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$$

typu (1) z prvého riešenia, a to pre hodnoty $u = ab$, resp. $u = a/b$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Ak $a > 0$, $b > 0$ a $ab = 2$, potom $(a+1)(b+2) \geqq 8$, dokážte.

N2. Dokážte, že $a^2+3 \geqq 2\sqrt{a^2+2}$ pre každé reálne a. [Použite odhad (1) pre $u = \sqrt{a^2+2}$.]

N3. Dokážte, že

$$(ab+cd)\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right) \geqq 4$$

pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d. [Roznásobte a použite dve nerovnosti (1).]

N4. Dokážte, že $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1) \geqq 81abcd$ pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d. [Činitele na ľavej strane vydeľte postupne číslami a, b, c, d a potom použite štyri nerovnosti (1).]

---

4. *Každú z hviezdičiek v zápisoch dvanásťmiestnych čísel* $A = {*}88\,888\,888\,888$, $B = {*}11\,111\,111\,111$ *nahraďte nejakou číslicou tak, aby výraz* $|14A - 13B|$ *mal čo najmenšiu hodnotu.* (J. Šimša)

Riešenie. Hviezdičku v čísle A nahradíme číslicou a, hviezdičku v čísle B číslicou b a vyjadríme výraz $14A - 13B$ algebraicky ako lineárnu funkciu (neznámych) číslic a a b. Pretože platí

$$11\,111\,111\,111\,111 = \frac{99\,999\,999\,999\,999}{9} = \frac{10^{11}-1}{9},$$

majú čísla A a B vyjadrenia

$$A = a \cdot 10^{11} + \frac{8}{9} \cdot (10^{11} - 1) \quad \text{a} \quad B = b \cdot 10^{11} + \frac{1}{9} \cdot (10^{11} - 1),$$

odkiaľ dostávame

$$\begin{aligned} 14A - 13B &= (14a - 13b) \cdot 10^{11} + \frac{(14 \cdot 8 - 13)}{9} \cdot (10^{11} - 1) = \\ &= (14a - 13b + 11) \cdot 10^{11} - 11. \end{aligned} \tag{1}$$

Iste si uvedomíme, že absolútna hodnota takého výrazu je minimálna práve vtedy, keď je minimálna absolútna hodnota výrazu $14a - 13b + 11$. Detailne to zdôvodníme nerovnosťami až potom, ako zistíme, či pre niektoré číslice a, b dokonca neplatí rovnosť $14a - 13b + 11 = 0$. Ak z takej rovnice vyjadríme neznámu b, dostaneme

$$b = \frac{14a + 11}{13} = a + 1 + \frac{a - 2}{13}.$$

Všimnime si, že pre ľubovoľnú číslicu a platí $-2 \leqq a - 2 \leqq 7$. Vidíme tak, že hodnota b daná ostatným vzťahom je celočíselná iba v prípade $a - 2 = 0$, keď $a = 2$ a $b = 3$. Iba pre také číslice a, b platí $14a - 13b + 11 = 0$, takže podľa (1) potom máme $|14A - 13B| = 11$. Pre ľubovoľnú inú dvojicu číslic a, b však platí $14a - 13b + 11 \neq 0$, takže tentoraz podľa (1) usúdime, že

$$\begin{array}{llll} \text{buď} & 14a - 13b + 11 \geqq 1, & \text{a teda} & 14A - 13B \geqq 10^{11} - 11 > 11, \\ \text{alebo} & 14a - 13b + 11 \leqq -1, & \text{a teda} & 14A - 13B \leqq -10^{11} - 11 < -11, \end{array}$$

v oboch prípadoch teda $|14A - 13B| > 11$.

Odpoveď. Výraz $|14A - 13B|$ má najmenšiu možnú hodnotu iba vtedy, keď hviezdičky v číslach A, B nahradíme postupne číslicami 2 a 3.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a a b, pre ktoré platí $55a + 16b = 2\,005$. [Vyhovujú dvojice (a, b) tvaru $(3, 115)$, $(19, 60)$ a $(35, 5)$. Návod: Číslo b musí byť deliteľné piatimi, číslo $5b - 3$ deliteľné jedenástimi.]

N2. Nájdite najväčšiu zápornú a najmenšiu kladnú hodnotu výrazu $12 \cdot \overline{a555} - 5 \cdot \overline{b777}$, kde a a b sú prvé číslice štvorciferných čísel, ktorých dekadický zápis je vyznačený čiarou nad číslicami. [-225, resp. $1\,775$.]

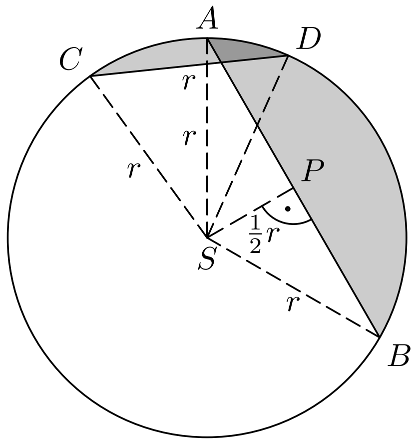
N3. Pre ktoré prirodzené čísla a, b, c platí $7a + 5b = 333$ a zároveň $4a + 11c = 222$? [Iba pre $a = 39$, $b = 12$ a $c = 6$. Skúmajte deliteľnosť číslami 11, 7, 5 a 4.]

---

5. *Kruh so stredom S a polomerom r je rozdelený na štyri časti dvoma tetivami, z ktorých jedna má dĺžku r a druhá má od stredu S vzdialenosť $r/2$. Dokážte, že absolútna hodnota rozdielu obsahov tých dvoch častí, ktoré majú spoločný práve jeden bod a pritom žiadna z nich neobsahuje stred S, je rovná jednej šestine obsahu kruhu.*
(*P. Leischner*)

Riešenie. Označme dané tetivy AB a CD ako na obr. 3, kde je tiež vyznačený stred P

tetivy AB. Podľa zadania platí $|SP| = \frac{1}{2}r$ a $|CD| = r$. Skúmaný rozdiel obsahov dvoch



Obr. 3

svetlo vyfarbených častí kruhu sa nezmení, keď ku každej z nich pripojíme tú istú (tretiu) časť kruhu, ktorá má s jeho hraničnou kružnicou spoločný oblúk AC a je na obr. 3 vyfarbená tmavo. Tak vzniknú dve kruhové odseky, jeden nad tetivou AB, druhý nad tetivou CD. Ich obsahy sú určené veľkosťami uhlov ASB a CSD. Z rovnostranného trojuholníka CSD ihneď máme $|\measuredangle CSD| = 60°$, takže obsah S_1 odseku nad tetivou CD je rovný

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

V pravouhlom trojuholníku APS platí $|AS| : |SP| = 2 : 1$, takže $|\measuredangle ASP| = 60°$, $|\measuredangle ASB| = 2|\measuredangle ASP| = 120°$, $|AB| = r\sqrt{3}$ a obsah S_2 odseku nad tetivou AB je rovný

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Teraz už ľahko určíme rozdiel $S_2 - S_1$:

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi r^2}{6},$$

čo je pravé šestina obsahu celého kruhu.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Nech P je priesečník uhlopriečok konvexného štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že trojuholníky ADP a BCP majú rovnaký obsah práve vtedy, keď $AB \parallel CD$. [Rozdiel obsahov trojuholníkov ADP a BCP je rovnaký ako rozdiel obsahov trojuholníkov ABD a ABC, ktoré majú spoločnú stranu AB, takže majú rovnaký obsah práve vtedy, keď majú zhodné výšky z protiľahlých vrcholov D a C.]

N2. Vypočítajte obsah prieniku kruhov $K_1(S_1, r)$ a $K_2(S_2, r\sqrt{3})$, ak $|S_1S_2| = 2r$. [$\frac{5}{6}\pi r^2 - r^2\sqrt{3}$]

N3. Kruhy K_1, K_2, K_3 a K_4 so zhodným polomerom r majú stredy vo vrcholoch štvorca C so stranou $r\sqrt{2}$. Kruh K s polomerom $2r$ má stred v priesečníku uhlopriečok štvorca C. Vypočítajte v rovine obsah množiny $K - (K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4)$. [$(2\pi - 4)r^2$]

6. *Určte najmenšie prirodzené číslo n s nasledujúcou vlastnosťou: Keď zvolíme n rôznych prirodzených čísel menších ako 2 005, sú medzi nimi dve také, že podiel súčtu a rozdielu ich druhých mocnín je väčší ako tri.* (*J. Zhouf*)

Riešenie. Zistíme najskôr, pre ktoré prirodzené čísla a, b platí spomenutá nerovnosť

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} > 3. \tag{1}$$

Aby bol zlomok na ľavej strane kladný, musí platiť $a^2 > b^2$, čiže $a > b$. Ak je táto nutná podmienka splnená, vynásobíme obe strany skúmanej nerovnosti kladným číslom $a^2 - b^2$ a ďalšími úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &> 3(a^2-b^2), \\ 4b^2 &> 2a^2, \\ b\sqrt{2} &> a. \end{aligned}$$

Zistili sme, že dve prirodzené čísla a, b vyhovujú podmienke (1) práve vtedy, keď platia nerovnosti $1 < a/b < \sqrt{2}$.

Prirodzené čísla od 1 do 2 005 teraz rozdelíme do skupín tak, aby v nich bolo čo najviac čísel a aby podiel najväčšieho a najmenšieho čísla každej skupiny bol menší ako $\sqrt{2}$. Urobíme to tak, že do skupín budeme postupne zaraďovať čísla 1, 2, … a k novej skupine vždy prejdeme, až keď to bude nutné.[1] Dostaneme tak týchto dvadsať skupín:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\}, & A_2 &= \{2\}, \\ A_3 &= \{3,4\}, & A_4 &= \{5,6,7\}, \\ A_5 &= \{8,\dots,11\}, & A_6 &= \{12,\dots,16\}, \\ A_7 &= \{17,\dots,24\}, & A_8 &= \{25,\dots,35\}, \\ A_9 &= \{36,\dots,50\}, & A_{10} &= \{51,\dots,72\}, \\ A_{11} &= \{73,\dots,103\}, & A_{12} &= \{104,\dots,147\}, \\ A_{13} &= \{148,\dots,209\}, & A_{14} &= \{210,\dots,296\}, \\ A_{15} &= \{297,\dots,420\}, & A_{16} &= \{421,\dots,595\}, \\ A_{17} &= \{596,\dots,842\}, & A_{18} &= \{843,\dots,1\,192\}, \\ A_{19} &= \{1\,193,\dots,1\,687\}, & A_{20} &= \{1\,688,\dots,2\,005\}. \end{aligned}$$

Vysvetlíme napríklad, ako vznikla skupina A_{11}. Číslo 73 sme už nemohli zaradiť do skupiny A_{10}, lebo pre jeho podiel s najmenším číslom 53 tejto skupiny platí

$$\frac{73}{51} = 1{,}431\ldots > 1{,}414\ldots = \sqrt{2}.$$

Číslo 103 sme ešte mohli do skupiny A_{11} zaradiť, lebo

$$\frac{103}{73} = 1{,}410\ldots < 1{,}414\ldots = \sqrt{2}.$$

[1] na porovnávanie podielu a/b s číslom $\sqrt{2}$ výhodne využijeme napríklad kalkulačku.

Aký má zostrojené rozdelenie význam pre riešenie zadanej úlohy? Pre ľubovoľné dve čísla a, b z tej istej skupiny A_i nerovnosť (1) platí. Skupín A_i je spolu 20. Ak teda vyberieme ľubovoľne 21 čísel z množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}$, budú niektoré dve z nich patriť do rovnakej skupiny A_i,[2] teda budú spĺňať (1). Preto číslo $n = 21$ má vlastnosť zo zadania úlohy. Číslo $n = 20$ ju však nemá: ak vyberieme z každej zo skupín A_i jej najmenší prvok, dostaneme dvadsať čísel

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 12,\ 17,\ 25,\ 36,\ 51,\ 73,\ 104,\ 148,\ 210,\ 297,\ 421,\ 596,\ 843,\ 1\,193,\ 1\,688, \quad (2)$$

medzi ktorými nie sú žiadne dve čísla a, b spĺňajúce (1), lebo podľa našej konštrukcie je podiel nasledujúceho čísla k číslu predchádzajúcemu vždy väčší ako $\sqrt{2}$.

Poznamenajme, že len uvedenie dvadsiatich čísel (2) z predchádzajúceho odstavca nemožno považovať za úplné riešenie úlohy, aj keď prehlásime, že sme túto dvadsaticu vybrali „čo najlepšie“, t. j. aby mala čo najviac prvkov a aby žiadne dva z nich nespĺňali (1).[3] Nemožnosť výberu podobnej skupiny 21 čísel je potrebné nespochybniteľne zdôvodniť. Na to nám poslúžil priehradkový princíp uplatnený na zostrojené skupiny A_i.

Odpoveď. Najmenšie prirodzené číslo s požadovanou vlastnosťou je $n = 21$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Na večierku je niekoľko hostí. Dokážte, že dvaja z nich majú medzi ostatnými hosťami rovnaký počet priateľov (priateľstvo je symetrický vzťah: ak je A priateľom B, je aj B priateľom A). [Ak každý z hostí má na večierku aspoň jedného priateľa, rozdeľte hostí do skupín tak, aby v rovnakej skupine boli práve tí, ktorí majú na večierku rovnaký počet priateľov. Skupín je menej ako hostí. V opačnom prípade môžeme predpokladať, že na večierku je jediný hosť bez priateľov. Na ostatných hostí potom použijeme predchádzajúcu úvahu. Alebo si uvedomte, že nemôžu súčasne existovať hosť bez priateľov a hosť, ktorý je priateľom všetkých hostí. Odtiaľ priamo vyplýva, že spomenutých skupín je menej ako hostí.]

N2. Dokážte, že z ľubovoľnej n-tice celých čísel možno vybrať jedno alebo niekoľko čísel tak, že súčet vybraných čísel je deliteľný číslom n. [Označte čísla $a_1, \ldots, a_n$ a rozdeľte n súčtov $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ do skupín podľa ich zvyškov po delení číslom n.]

N3. Ak vyberieme vo štvorci 3×3 ľubovoľných desať bodov, potom niektoré dva z nich majú vzdialenosť najviac $\sqrt{2}$, dokážte. [Rozdeľte celý štvorec na 9 štvorcov 1×1, v jednom z nich ležia dva z vybraných bodov.]

N4. Určte najmenšie prirodzené číslo n s vlastnosťou: ak vyberieme ľubovoľných n rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, tak medzi vybranými číslami existujú dve čísla, ktorých a) rozdiel je deliteľný číslom 11, b) rozdiel je rovný 11, c) súčet je rovný 111. [a) $n = 12$, b) $n = 56$, c) $n = 56$. Návod k b): Čísla od 1 po 110 (nie iba po 100) rozdeľte do 55 dvojprvkových skupín $\{x, x+11\}$, kde $x = 22k+j$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, 11\}$. Ak vyberieme z každej skupiny menšie z oboch čísel, dostaneme 55 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, ktoré požadovanú vlastnosť nemajú. Ak vyberieme 56 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, ležia dve z nich v rovnakej skupine. Návod k c): Čísla od 1 do 110 rozdeľte do 55 dvojprvkových skupín $\{x, 111 - x\}$, kde $x \in \{1, 2, \ldots, 55\}$, a urobte podobnú úvahu ako v časti b).]

---

[2] Tomuto zrejmému poznatku sa hovorí *priehradkový* alebo aj *Dirichletov* princíp. Všeobecnejšie znie takto: Ak je $mk+1$ predmetov umiestnených do m skupín, leží v niektorej z nich aspoň $k+1$ z týchto predmetov. V našom prípade je $m = 20$ a $k = 1$.

[3] K overeniu poznatku, že číslo $n = 20$ skúmanú vlastnosť nemá, môžu poslúžiť aj mnohé iné dvadsatice čísel. Napríklad číslo 1 688 v (2) môžeme nahradiť ktorýmkoľvek iným číslom zo skupiny A_{20} a podobne.