2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

1. *Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c platí nerovnosť*

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 8.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť. (J. Šimša)

Riešenie. Ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti najskôr upravíme roznásobením a vzniknuté členy zoskupíme do súčtov dvojíc navzájom prevrátených výrazov:

$$L=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=\left(ab+1+\frac{a}{c}+\frac{1}{bc}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=$$
$$=\left(abc+\frac{1}{abc}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right).$$

Pretože pre $u>0$ je

$$\left(u+\frac{1}{u}\right)-2=\left(\sqrt{u}-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 \geqq 0,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $u=1$, pre výraz L platí $L \geqq 2+2+2+2=8$, čo sme mali dokázať. Rovnosť $L=8$ nastane práve vtedy, keď platí

$$abc+\frac{1}{abc}=a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{c}=2,$$

teda, ako sme už spomenuli, práve vtedy, keď $abc=a=b=c=1$, t. j. práve vtedy, keď $a=b=c=1$.

Poznámka. Dodajme, že upravená nerovnosť

$$abc+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc} \geqq 8$$

vyplýva okamžite aj z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ôsmich čísel

$$abc,\ a,\ b,\ c,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{abc},$$

lebo ich súčin (a teda aj geometrický priemer) je rovný číslu 1, takže ich aritmetický priemer má hodnotu aspoň 1.

Iné riešenie. V dokazovanej nerovnosti sa najskôr zbavíme zlomkov, a to tak, že obe jej strany vynásobíme kladným číslom abc. Dostaneme tak ekvivalentnú nerovnosť

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1) \geqq 8abc,$$

ktorá má po roznásobení ľavej strany tvar

$$a^2b^2c^2+a^2bc+ab^2c+abc^2+ab+ac+bc+1 \geqq 8abc.$$

Poslednú nerovnosť možno upraviť na tvar

$$(abc-1)^2+ab(c-1)^2+ac(b-1)^2+bc(a-1)^2 \geqq 0.$$

Táto nerovnosť už zrejme platí, lebo na ľavej strane máme súčet štyroch nezáporných výrazov. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď má každý z týchto štyroch výrazov nulovú hodnotu, teda práve vtedy, keď

$$abc-1=c-1=b-1=a-1=0,$$

čiže $a=b=c=1$.

Iné riešenie. Danú nerovnosť možno dokázať aj bez roznásobenia jej ľavej strany. Stačí napísať tri AG-nerovnosti

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right) \geqq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Ich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}=1,$$

odkiaľ po násobení ôsmimi obdržíme dokazovanú nerovnosť. Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť v každej z troch použitých AG-nerovností, teda práve vtedy, keď sa čísla v každej „priemerovanej“ dvojici rovnajú:

$$a=\frac{1}{b},\ b=\frac{1}{c},\ c=\frac{1}{a}.$$

Z prvých dvoch rovností vyplýva $a=c$, po dosadení do tretej rovnosti potom vychádza $a=c=1$, teda aj $b=1$.

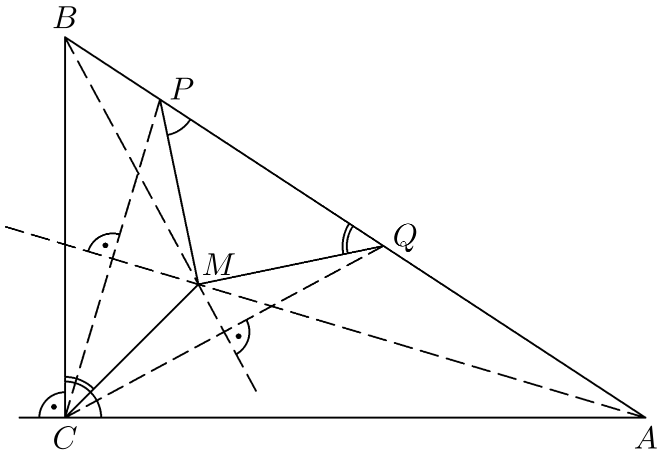
Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za dôkaz nerovnosti a 2 body za úplnú analýzu prípadu rovnosti (1 bod za uvedenie prípadu $a=b=c=1$, 1 bod za vylúčenie inej možnosti). Za správne roznásobenie ľavej strany nerovnosti dajte 1 bod, 1 až 2 body za účelné využitie jednej alebo niekoľkých AG-nerovností alebo nerovností $u+1/u \geqq 2$ (oboje možno považovať za známe poznatky, vrátane prípadu rovnosti, nie je potrebné ich dokazovať), 1 bod za dokončenie dôkazu nerovnosti.

---

2. *Na prepone AB pravouhlého trojuholníka ABC uvažujme také body P a Q, že $|AP|=|AC|$ a $|BQ|=|BC|$. Označme M priesečník kolmice z vrcholu A na priamku CP a kolmice z vrcholu B na priamku CQ. Dokážte, že priamky PM a QM sú navzájom kolmé.* (J. Švrček)

Riešenie. Podľa zadania je trojuholník APC rovnoramenný. Priamka AM prechádza jeho hlavným vrcholom A kolmo na základňu CP, je teda osou vnútorného uhla CAP

(obr. 1). Body C a P sú preto súmerne združené podľa priamky AM, takže uhly APM



Obr. 1

a ACM sú zhodné. (Inými slovami trojuholníky APM a ACM sú zhodné podľa vety *sus*: zodpovedajúce si strany AC a AP zvierajú so spoločnou stranou AM rovnaký uhol vďaka tomu, že AM je osou uhla CAP.) Podobne z rovnoramenného trojuholníka BQC odvodíme, že BM je osou uhla CBQ, takže aj uhly BQM a BCM sú zhodné.

Rovnosti $|\measuredangle APM| = |\measuredangle ACM|$ a $|\measuredangle BQM| = |\measuredangle BCM|$ znamenajú, že pre vnútorné uhly trojuholníka PQM pri vrcholoch P, Q platí

$$|\measuredangle QPM| + |\measuredangle PQM| = |\measuredangle APM| + |\measuredangle BQM| = \\ = |\measuredangle ACM| + |\measuredangle BCM| = |\measuredangle ACB| = 90^\circ,$$

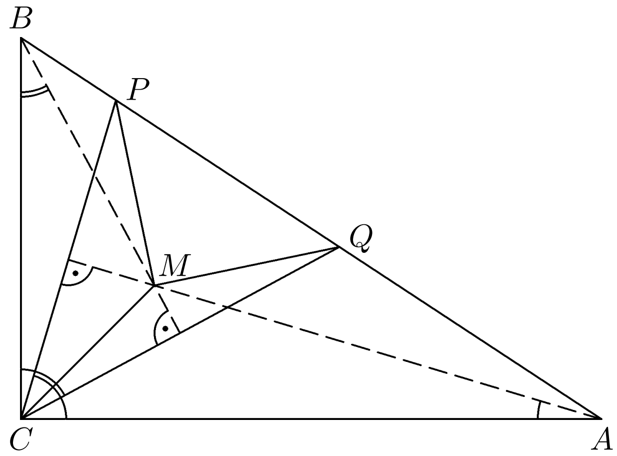
teda vnútorný uhol pri treťom vrchole M je pravý.

Iné riešenie. Bod M ako priesečník osí uhlov CAB a CBA leží aj na osi pravého uhla ACB. Preto uhly ACM a BCM majú oba veľkosť 45°, takže $|\measuredangle APM| = |\measuredangle ACM| = 45^\circ$, $|\measuredangle BQM| = |\measuredangle BCM| = 45^\circ$ a trojuholník PQM je rovnoramenný pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole M.

Iné riešenie. Zo súmernosti bodov P a C podľa priamky AM vyplýva $|PM| = |CM|$, zo súmernosti bodov Q a C podľa BM vyplýva $|QM| = |CM|$. Teda $|PM| = |QM| = |CM|$ a bod M je stredom kružnice opísanej trojuholníku PQC. Pritom ak označíme α a β uhly pri vrcholoch A a B (obr. 2), platí $\alpha + \beta = 90^\circ$ a

$$(90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) + (90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) - |\measuredangle PCQ| = 90^\circ,$$

takže $|\measuredangle PCQ| = 45^\circ$. To je veľkosť obvodového uhla nad tetivou PQ spomenutej kružnice. Veľkosť zodpovedajúceho stredového uhla PMQ je teda $90°$.



Obr. 2

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za zdôvodnenie, že bod M je priesečníkom osí vnútorných uhlov trojuholníka ABC.

---

3. *Nájdite všetky dvojice celých čísel a, b, pre ktoré žiadna z rovníc*

$$x^2 + ax + b = 0, \quad y^2 + by + a = 0$$

nemá dva rôzne reálne korene. (*E. Kováč*)

Riešenie. Kvadratická rovnica *má* dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď jej diskriminant je kladný. Preto dvojica celých čísel a, b spĺňa zadanú podmienku práve vtedy, keď diskriminanty

$$D_1 = a^2 - 4b, \quad D_2 = b^2 - 4a$$

nie sú kladné, teda keď platí

$$a^2 \leqq 4b \quad \text{a} \quad b^2 \leqq 4a. \tag{1}$$

Odtiaľ najprv vyplýva, že obe čísla b aj a sú nezáporné (pretože sú nezáporné obe čísla a^2 a b^2). Teraz sa na (1) pozrieme ako na sústavu nerovníc s neznámou b a nezáporným parametrom a a ľahko ju v obore nezáporných čísel vyriešime:

$$\frac{a^2}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{a}. \tag{2}$$

Nájdený interval je neprázdny práve vtedy, keď pre nezáporný parameter a platí nerovnosť

$$\frac{a^2}{4} \leqq 2\sqrt{a}, \quad \text{čiže} \quad a \leqq 4.$$

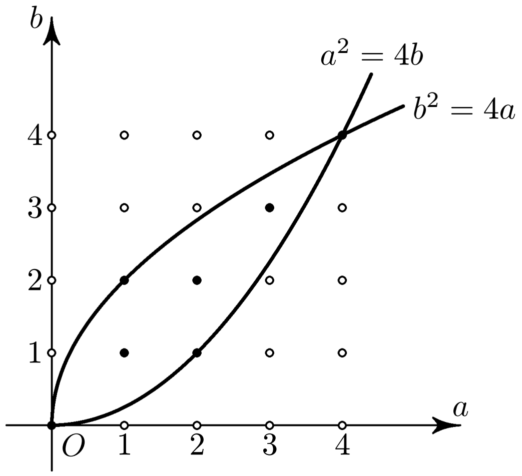
Pretože čísla a, b sú podľa zadania celé, z odvodených nerovností $0 \leqq a \leqq 4$ vyplýva, že číslo a leží v množine $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Každé také a jednotlivo do krajných výrazov v (2) dosadíme a vypíšeme, ktoré celé b v príslušnom intervale leží:

$$\begin{array}{lll}
a = 0\colon & 0 \leqq b \leqq 0 & \iff b \in \{0\},\\
a = 1\colon & \frac{1}{4} \leqq b \leqq 2 & \iff b \in \{1, 2\},\\
a = 2\colon & 1 \leqq b \leqq 2\sqrt{2} & \iff b \in \{1, 2\},\\
a = 3\colon & \frac{9}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{3} & \iff b \in \{3\},\\
a = 4\colon & 4 \leqq b \leqq 4 & \iff b \in \{4\}.
\end{array}$$

Odpoveď. Vyhovuje práve sedem dvojíc (a, b):

$$(0, 0),\ (1, 1),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (3, 3) \text{ a } (4, 4).$$

Poznámka. Z nerovností (1) možno odvodiť nielen $0 \leqq a \leqq 4$, ale z dôvodu symetrickosti aj $0 \leqq b \leqq 4$. Preto namiesto nami popísaného riešenia úpravou na sústavu (2) stačí jednotlivo otestovať 25 dvojíc (a, b), kde $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, či vyhovujú sústave nerovností (1). Takú úlohu možno tiež interpretovať geometricky: v prvom kvadrante súradnicového systému Oab hľadáme tie body s celočíselnými súradnicami, ktoré ležia vnútri alebo na okraji oblasti ohraničenej parabolami s rovnicami $4a = b^2$ a $4b = a^2$ (obr. 3).



Obr. 3

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za vyslovenie podmienok na oba diskriminanty a ich vyjadrenie nerovnosťami (1), 2 body za určenie ohraničení 0 a 4 pre hodnoty a, b a 2 body za nájdenie všetkých riešení. Pokiaľ riešiteľ namiesto neostrých nerovností (1) chybne napíše len príslušné ostré nerovnosti a tie potom správne vyrieši (a tak dostane 3 zo 7 riešení), dajte 3 body.