2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

1. *Určte všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí*

$$p + q^2 = q + p^3.$$

(*J. Švrček*)

Riešenie. Danú rovnicu upravíme na tvar

$$q(q-1) = p(p-1)(p+1).$$

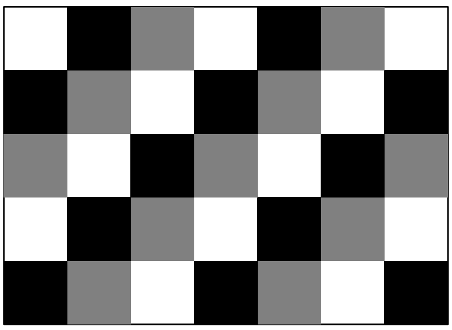
Odtiaľ vyplýva $p < q$ (keby totiž bolo $p \geqq q$, potom aj $p-1 \geqq q-1$, a pretože $p+1 > 1$, bolo by $p(p-1)(p+1) > q(q-1)$) a tiež $q \mid p(p-1)(p+1)$. Pretože q je prvočíslo, musí platiť aspoň jeden zo vzťahov $q \mid p$, $q \mid (p-1)$, $q \mid (p+1)$. Vzhľadom na podmienky $p < q$ a $p > 1$ nemôže q deliť ani p ani $p-1$, a preto $q \mid (p+1)$. Musí teda platiť $q \leqq p+1$ a to spolu s $p < q$ dáva $q = p+1$.

Jediné dve prvočísla líšiace sa o 1 sú 2 a 3. Preto $p = 2$ a $q = 3$. Skúškou overíme, že naozaj platí $2 + 3^2 = 3 + 2^3$.

Poznámka. Nerovnosť $p < q$ sa dá dokázať aj touto úvahou: Zrejme $p \neq q$. Prvočísla p a q sú teda nesúdeliteľné, a pretože $p \mid q(q-1)$, musí platiť $p \mid (q-1)$ a odtiaľ $p \leqq q-1$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za zistenie, že $p < q$, dajte 1 bod; 2 body za dôkaz $q \mid (p+1)$ a ďalšie dva za $q = p+1$ a z toho vyplývajúce $p = 2$, $q = 3$. Šiesty bod dajte za overenie, že dvojica $p = 2$, $q = 3$ je naozaj riešením.

2. *Obdĺžnik $ABCD$ so stranami dĺžok $|AB| = 2008$ a $|BC| = 2006$ je rozdelený na 2008×2006 jednotkových štvorcov a tie sú striedavo ofarbené čiernou, sivou a bielou farbou podobne ako obdĺžnik na obr. 1: štvorce pri vrcholoch A a B sú čierne, štvorce pri vrcholoch C a D sú biele. Určte obsah tej časti trojuholníka ABC, ktorá je sivá.*



Obr. 1

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Sivá časť obdĺžnika $ABCD$ so stranami dĺžok $3n+1$ a $3n-1$, ktorý má jednotkové štvorce pri dvoch vrcholoch ofarbené čiernou farbou a jednotkové štvorce pri ďalších dvoch vrcholoch bielou farbou, je symetrická podľa stredu obdĺžnika. Preto je sivá časť trojuholníka ABC zhodná so sivou časťou trojuholníka CDA, a teda obsah sivej časti trojuholníka ABC je rovný polovici obsahu sivej časti obdĺžnika $ABCD$. Obdĺžnik $ABCD$ rozdelíme na obdĺžnik so stranami dĺžok $3n$ a $3n-1$ a pásik $3n-1$ jednotkových štvorcov, v ktorom jeden koncový štvorec je čierny a druhý biely. V obdĺžniku $3n \times (3n-1)$ je počet čiernych, bielych aj sivých štvorčekov rovnaký, takže sivých je $n(3n-1)$. Keby sme k pásiku dĺžky $3n-1$ pridali jeden sivý štvorček, bol by tam tiež rovnaký počet n čiernych, bielych a sivých štvorčekov; v pásiku dĺžky $3n-1$ je teda $n-1$ sivých štvorčekov. Sivých štvorčekov v obdĺžniku $ABCD$ je $n(3n-1)+(n-1) = 3n^2-1$ a sivá časť trojuholníka ABC má obsah $S = \frac{1}{2}(3n^2-1)$; pre obdĺžnik $2\,008 \times 2\,006$ je $n = 669$, takže

$$S = \frac{1}{2} \cdot (2\,007 \cdot 669 - 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2\,007^2 - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4\,028\,049}{3} - 1\right) = \\ = \frac{4\,028\,046}{6} = 671\,341.$$

Poznámka. Obsah sivej časti trojuholníka ABC môžeme určiť aj tak, že po diagonálach vypočítame počet sivých štvorčekov, ktoré sú celé obsiahnuté v trojuholníku ABC a pripočítame polovicu počtu štvorčekov v prostrednej sivej diagonále obdĺžnika $ABCD$. Tá je symetrická podľa stredu obdĺžnika $ABCD$, takže jej časť ležiaca v trojuholníku ABC je zhodná s časťou ležiacou v trojuholníku CDA:

$$S = 3 + 6 + \ldots + 2\,004 + \frac{1}{2} \cdot 2\,006 = 334 \cdot 2\,007 + 1\,003 = 671\,341.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. 3 body dajte za dôkaz toho, že obsah sivej časti trojuholníka ABC je rovný polovici obsahu sivej časti obdĺžnika $ABCD$. Nestačí argumentovať zhodnosťou trojuholníkov ABC a CDA, napríklad obsahy ich bielych častí nie sú rovnaké. Ďalšie tri body dajte za správny výpočet obsahu.

---

3. *V lichobežníku $ABCD$, ktorého základňa AB má dvakrát väčšiu dĺžku ako základňa CD, označme E stred ramena BC. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku CDE prechádza stredom uhlopriečky AC práve vtedy, keď strany AB a BC sú navzájom kolmé.* (P. Leischner)

Riešenie. Označme S stred uhlopriečky AC. Úsečka SE je stredná priečka trojuholníka ABC, preto $|SE| = \frac{1}{2}|AB| = |DC|$. Úsečky SE a DC sú rovnobežné a zhodné, preto je $SECD$ rovnobežník.

Kružnica opísaná trojuholníku CDE prechádza bodom S práve vtedy, keď je rovnobežník $SECD$ tetivový. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protiľahlých uhlov 180°. V rovnobežníku sú ale protiľahlé uhly zhodné, takže je tetivový práve vtedy, keď to je pravouholník, čiže uhol ECD, a teda aj uhol ABC je pravý.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body dajte za dôkaz toho, že $SECD$ je rovnobežník a ďalšie 3 body za dôkaz kolmosti.

4. *Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c z intervalu* $\langle 0, 1\rangle$ *platí*

$$1 \leqq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq 9.$$

(*J. Šimša*)

Riešenie. Označme $V = a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c)$. Platí

$$a + b + c + (1-a)(1-b)(1-c) = 1 + ab + ac + bc - abc = 1 + ab(1-c) + ac + bc \geqq 1,$$
$$2(ab + bc + ca) + 2(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geqq 0;$$

sčítaním týchto nerovností dostaneme $V \geqq 1$.

Označme $x = 1 - a, y = 1 - b, z = 1 - c$; potom x, y, z sú čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a

$$\begin{aligned} V &= 1 - x + 1 - y + 1 - z + 2\,[(1-x)(1-y) + (1-y)(1-z) + (1-z)(1-x)] + 3xyz = \\ &= 3 - (x + y + z) + 2\,[3 - 2(x + y + z) + xy + yz + zx] + 3xyz = \\ &= 9 - 5(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) + 3xyz = \\ &= 9 - 2x(1 - y) - 2y(1 - z) - 2z(1 - x) - 3x(1 - yz) - 3y - 3z \leqq 9. \end{aligned}$$

Iné riešenie. Ak $a = 0$, potom

$$V = b + c + 2bc + 3(1 - b)(1 - c) = 3 + 5bc - 2b - 2c = 3 + 5\left(b - \frac{2}{5}\right)\left(c - \frac{2}{5}\right) - \frac{4}{5}.$$

Pretože $b, c \in \langle 0, 1\rangle$, výraz $(b-2/5)(c-2/5)$ nadobúda najväčšiu hodnotu pre $b = c = 1$ a najmenšiu hodnotu pre $\{b, c\} = \{0, 1\}$, a teda

$$3 + 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \leqq V \leqq 3 + 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5},$$

čiže

$$1 \leqq V \leqq 4.$$

Ak $a = 1$, potom

$$V = 1 + b + c + 2(b + bc + c),$$

zrejme teda

$$1 \leqq V \leqq 9.$$

Ak b, c sú ľubovoľne, ale pevne zvolené čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, je V lineárnou funkciou premennej $a \in \langle 0, 1\rangle$ alebo je V konštanta. Lineárna funkcia definovaná v uzavretom intervale nadobúda extrémne hodnoty v koncových bodoch tohto intervalu. Pretože pre $a = 0$ aj pre $a = 1$ platí $1 \leqq V \leqq 9$, platí táto nerovnosť pre všetky $a \in \langle 0, 1\rangle$.

Iné riešenie. Pretože výraz V je lineárny vzhľadom na každú z premenných $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$, nadobúda extrémne hodnoty pre $\{a, b, c\} \in \{0, 1\}$. Pre $a = b = c = 0$ je $V = 3$. Ak dve z čísel a, b, c sa rovnajú nule a tretie sa rovná jednej, platí $V = 1$. Ak sa dve z čísel a, b, c rovnajú jednej a tretie sa rovná nule, potom $V = 4$. Pre $a = b = c = 1$ je $V = 9$. Preto platí $1 \leqq V \leqq 9$ pre všetky $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov: za dôkaz nerovnosti $V \geqq 1$ dajte 2 body, za dôkaz nerovnosti $V \leqq 9$ dajte 4 body.