

2016/2017
66. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie B

(Súťaž sa konala v utorok 11. apríla 2017.)

1. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí

$$a + \frac{66}{a} = b + \frac{66}{b}.$$

(Jaromír Šimša)

2. Na kružnici k je vyznačený konečný počet jej oblúkov, pričom ich zjednotenie pokrýva celú kružnicu k a každý oblúk má dĺžku menšiu ako je obvod kružnice k . Dokážte, že existuje taká podmnožina M danej množiny oblúkov, že súčet dĺžok všetkých oblúkov z M nie je väčší ako dvojnásobok obvodu kružnice k a zároveň zjednotenie oblúkov z M pokrýva celú kružnicu k .

(Vojtech Bálint)

3. V rovine sú dané kružnice k a l , ktoré sa pretínajú v bodoch E a F . Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k , ktorý neobsahuje bod F , zvolme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné.

(Šárka Gergelitsová)

4. Určte všetky hodnoty reálneho parametra p tak, aby rovnica

$$2017 \cdot \left| 1 - \left| 1 - \left| 1 - x \right| \right| \right| = 2016x + p$$

mala práve tri riešenia v obore reálnych čísel.

(Jaroslav Švrček)