66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

---

1. *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí*

$$a+\frac{66}{a}=b+\frac{66}{b}.$$

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Anulovaním pravej strany upravíme danú rovnicu na tvar

$$a-b+66\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\Big)=(a-b)\Big(1-\frac{66}{ab}\Big)=\frac{1}{ab}(a-b)(ab-66)=0.$$

Z toho vyplýva, že hľadané dvojice (a,b) prirodzených čísel sú práve tie, pre ktoré platí $a=b$ alebo $ab=66$.

Úlohe teda vyhovuje nekonečne veľa dvojíc prirodzených čísel tvaru $(a,b)=(k,k)$, pričom k je ľubovoľné prirodzené číslo, a keďže číslo $66=2\cdot 3\cdot 11$ má osem deliteľov, tak aj osem dvojíc $(a,b)\in\{(1,66),(2,33),(3,22),(6,11),(11,6),(22,3),(33,2),(66,1)\}$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za prosté konštatovanie, že úlohe vyhovujú dvojice $a=b$ (bez uvedenia ďalších 8 riešení), dajte 1 bod. Ak žiak upraví danú rovnicu na súčinový tvar, avšak neuvedie ďalších 8 konkrétnych riešení, dajte 3 body. V prípade, že žiak neuvedie 1, resp. 2 (či 3) symetrické dvojice z výpisu konkrétnych riešení, strhnite 1, resp. 2 body.

---

2. *Na kružnici k je vyznačený konečný počet jej oblúkov, pričom ich zjednotenie pokrýva celú kružnicu k a každý oblúk má dĺžku menšiu ako je obvod kružnice k. Dokážte, že existuje taká podmnožina M danej množiny oblúkov, že súčet dĺžok všetkých oblúkov z M nie je väčší ako dvojnásobok obvodu kružnice k a zároveň zjednotenie oblúkov z M pokrýva celú kružnicu k.* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Koncové body daných oblúkov delia kružnicu k na konečný počet častí. Ak každá taká časť je pokrytá najviac dvoma z daných oblúkov, tak súčet dĺžok oblúkov je najviac dvojnásobkom obvodu kružnice k.

V opačnom prípade existuje bod $T\in k$, ktorý je vnútorným bodom (aspoň) troch z daných kružnicových oblúkov. Označme O stred kružnice k. Po kružnici budeme postupovať v kladnom smere a označíme tri oblúky obsahujúce T zoradené podľa ich počiatočného bodu XX', YY', ZZ', pričom $|\measuredangle XOT|\geqq|\measuredangle YOT|\geqq|\measuredangle ZOT|$. (V zmysle orientácie sú teda body X, Y, Z „pred“ bodom T a body X', Y', Z' „za“ bodom T.) Rozlíšime tri prípady podľa toho, ktorý z trojice uhlov TOX', TOY', TOZ' má maximálnu veľkosť:

- Ak je to uhol TOX', tak oblúk XX' pokrýva obidva zvyšné oblúky YY', ZZ', takže obidva tieto oblúky môžeme vynechať, lebo ostatné oblúky pokryjú celý obvod kružnice.
- Ak je to uhol TOY', tak zjednotenie oblúkov XX' a YY' pokrýva oblúk ZZ', takže tento môžeme vynechať, lebo ostatné oblúky pokryjú celý obvod kružnice.
- Ak je to uhol TOZ', tak zjednotenie oblúkov XX' a ZZ' pokrýva oblúk YY', takže tento môžeme vynechať, lebo ostatné oblúky pokryjú celý obvod kružnice.

Dokázali sme, že ak existuje časť, ktorá je pokrytá aspoň tromi z daných oblúkov, tak z danej množiny oblúkov môžeme vynechať aspoň jeden oblúk. Konečným počtom opakovaní tohto postupu dostaneme hľadanú množinu M.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za úvahu o existencii bodu pokrytého tromi oblúkmi, po jednom bode za uvedenie každého z troch možných prípadov polohy trojice oblúkov a 1 bod za záver.

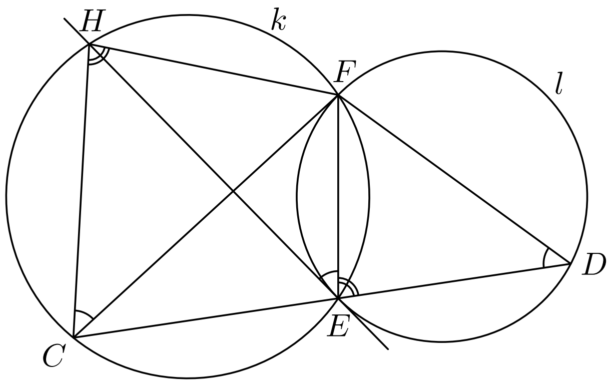
Ak žiak neuvažuje o maximálnom spomedzi uhlov TOX', TOY', TOZ' a rozoberá jednotlivé možné usporiadania trojice bodov X', Y', Z' spomedzi všetkých šiestich možností, chýbajúce možnosti adekvátne penalizujte.

---

3. *V rovine sú dané kružnice k a l, ktoré sa pretínajú v bodoch E a F. Dotyčnica ku kružnici l zostrojená v bode E pretína kružnicu k v bode H ($H \neq E$). Na oblúku EH kružnice k, ktorý neobsahuje bod F, zvoľme bod C ($E \neq C \neq H$) a priesečník priamky CE s kružnicou l označme D ($D \neq E$). Dokážte, že trojuholníky DEF a CHF sú podobné.* (Šárka Gergelitsová)

Riešenie. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou HF kružnice k vyplýva $|\measuredangle HCF| = |\measuredangle HEF|$. Uhol HEF je zároveň úsekovým uhlom prislúchajúcim tetive EF kružnice l, ktorý je však zhodný s obvodovým uhlom EDF (obr. 1). Celkovo tak platí

$$|\measuredangle HCF| = |\measuredangle HEF| = |\measuredangle EDF|. \tag{1}$$



Obr. 1

Vzhľadom na to, že $CEFH$ je tetivový štvoruholník, je jeho vnútorný uhol pri vrchole H zhodný s vonkajším uhlom pri jeho protiľahlom vrchole E. Platí teda

$$|\measuredangle CHF| = |\measuredangle DEF|. \tag{2}$$

Z rovností (1) a (2) vyplýva na základe vety *uu* podobnosť trojuholníkov DEF a CHF. Tým je dôkaz hotový.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2, resp. 4 body dajte za dôkaz zhodnosti jednej, resp. oboch dvojíc prislúchajúcich si uhlov v dvojici podobných trojuholníkov (akýmkoľvek správnym spôsobom). Posledné 2 body dajte za využitie zhodnosti uvedenej dvojice uhlov na dôkaz podobnosti oboch trojuholníkov.

4. *Určte všetky hodnoty reálneho parametra p tak, aby rovnica*

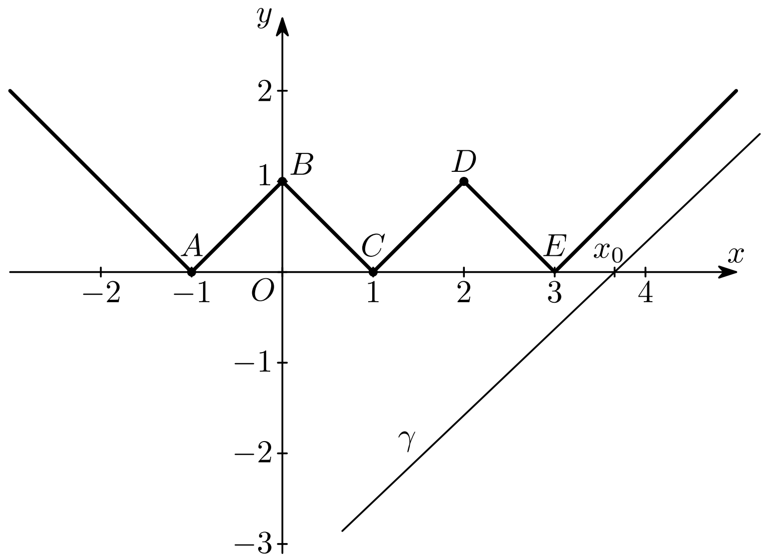
$$2017 \cdot \Big|1 - \big|1 - |1 - x|\big|\Big| = 2016x + p$$

mala práve tri riešenia v obore reálnych čísel. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Danú rovnicu upravíme na tvar

$$\big|1 - |1 - |1 - x||\big| = \frac{2\,016}{2\,017}\,x + \frac{p}{2\,017}. \tag{1}$$

Pri riešení využijeme grafickú metódu. Grafom funkcie $y = f(x) = \big|1 - |1 - |1 - x||\big|$ na ľavej strane rovnice (1) je čiara lomená v bodoch $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$, $C = [1, 0]$, $D = [2, 1]$ a $E = [0, 3]$ (znázornená na obr. 2), ktorá pozostáva zo štyroch zhodných úsečiek a dvoch polpriamok. Grafom funkcie g na pravej strane (1) je priamka $y = kx+q$ so smernicou $k = \frac{2\,016}{2\,017} < 1$ prechádzajúca bodom $[0, q]$, pričom $q = p/2\,017$ (smernica je natoľko „blízka“ jednotke, že sme museli pre priamku γ, ktorá na obr. 2 znázorňuje graf funkcie g, zvoliť smernicu o pár percent menšiu, aby sa výsledná priamka nejavila ako rovnobežka s časťami grafu funkcie f).



Obr. 2

Počet reálnych riešení rovnice (1) zrejme zodpovedá počtu spoločných bodov grafov oboch funkcií f a g. Keďže všetky priamky, na ktorých ležia časti lomenej čiary grafu funkcie f, majú smernicu ± 1, nie je ťažké zistiť, koľko priesečníkov pre dané q oba grafy majú. Vyšetríme teraz počet priesečníkov oboch grafov podľa hodnoty x_0, v ktorej priamka γ grafu funkcie g pretína súradnicovú os x.

Pre $x_0 > 3$ zrejme žiadny priesečník neexistuje. Pre $x_0 = 3$ pretína γ graf funkcie f v jedinom bode E. Pre $x_0 < 3$ pretína γ vnútro polpriamky grafu f s počiatkom v bode E práve raz. Pre $x_0 < -1$ pretína γ vnútro aj druhej polpriamky grafu f, ktorá má počiatok v bode A, takže pre také x_0 už máme dva spoločné body. Pre $x_0 \in \langle -1, 3)$ má ale priamka γ s lomenou čiarou $ABCDE$ práve dva potrebné priesečníky jedine vtedy, keď prechádza jej vrcholmi D, C alebo A, a napokon pre $x_0 < -1$ práve jeden potrebný priesečník jedine vtedy, keď prechádza vrcholom B.

To znamená, že grafy oboch funkcií majú práve tri spoločné body jedine vtedy, keď priamka γ prechádza niektorým zo štyroch bodov A, B, C, D na obr. 2. Postupným dosadením súradníc týchto štyroch bodov do rovnice

$$y = kx + q = \frac{2\,016}{2\,017} + \frac{p}{2\,017}$$

priamky γ určíme hľadané hodnoty parametra p.

Odpoveď. Daná rovnica má práve tri reálne riešenia práve vtedy, keď

$$p \in \{-2\,016, -2\,015, 2\,016, 2\,017\}.$$

Poznámka. Lomená čiara grafu funkcie f rozdeľuje rovinu na dve (neohraničené) oblasti, pričom priamka γ pre ľubovoľnú hodnotu parametra q pretína oblasť „nad“ lomenou čiarou v niekoľkých úsečkách, a tie majú s hranicou tej oblasti spoločný párny počet bodov, niektoré krajné body dvoch úsečiek však môžu práve v prípade vrcholov uvedenej lomenej čiary splynúť v jediný. Z tejto úvahy tak vyplýva, že iba tie priamky, ktoré prechádzajú niektorým z vrcholov A, B, C, D, E lomenej čiary, s ňou môžu mať nepárny počet priesečníkov, v prípade vrcholu E ale iba jeden.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za nákres grafu funkcie s tromi absolútnymi hodnotami. Konštatovanie o vyhovujúcich vzájomných polohách lomenej čiary a priamky možno považovať (rovnako ako vo vzorovom riešení) za zrejmé, a tak ho oceňte 2 bodmi, napokon 1 bod dajte za dopočítanie hodnôt p. Ak chýba vo výpise vyhovujúcich polôh k z nich, strhnite k bodov, ak $k \leqq 2$; v prípade $k \geqq 3$ možno celkom získať nanajvýš 3 body (za správny graf podľa prvej vety pokynov).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Štefan Gyürki
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017