2008/2009
58. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 20. januára 2009.*)

1. Isté štvorciferné prirodzené číslo je deliteľné siedmimi. Ak zapíšeme jeho číslice v opačnom poradí, dostaneme väčšie štvorciferné číslo, ktoré je tiež deliteľné siedmimi. Navyše po delení číslom 37 dávajú obe spomenuté štvorciferné čísla rovnaký zvyšok. Určte pôvodné štvorciferné číslo. (*Jaromír Šimša*)

2. Na odvesnách dĺžok a, b pravouhlého trojuholníka ležia postupne stredy dvoch kružníc k_a, k_b. Obe kružnice sa dotýkajú prepony a prechádzajú vrcholom oproti prepone. Polomery uvedených kružníc označme ϱ_a, ϱ_b. Určte najväčšie kladné reálne číslo p také, že nerovnosť

$$\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}\geqq p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

platí pre všetky pravouhlé trojuholníky. (*Jaroslav Švrček*)

3. Určte veľkosti vnútorných uhlov α, β, γ trojuholníka, pre ktoré platí

$$2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha=1,$$
$$2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)-\cos\beta=0.$$

(*Jaroslav Švrček*)

4. Vnútri strany BC ostrouhlého trojuholníka ABC zvoľme bod D a na úsečke AD bod P tak, aby neležal na ťažnici z vrcholu C. Priamka tejto ťažnice pretne kružnicu opísanú trojuholníku CPD v bode, ktorý označíme K ($K\neq C$). Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKP prechádza okrem bodu A ďalším pevným bodom, ktorý od výberu bodov D a P nezávisí. (*Tomáš Jurík*)