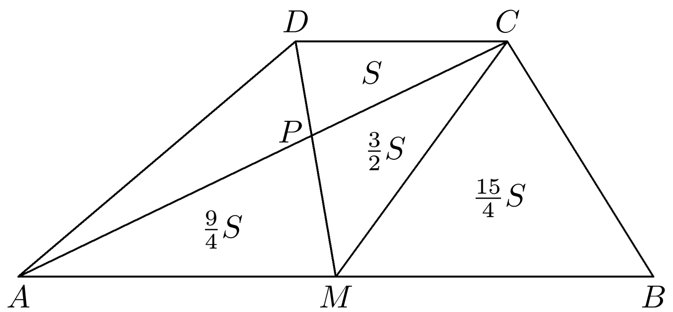
2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *Základňa AB lichobežníka $ABCD$ je trikrát dlhšia ako základňa CD. Označme M stred strany AB a P priesečník úsečky DM s uhlopriečkou AC. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka CDP a štvoruholníka $MBCP$.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Výpočet založíme na dvoch známych pravidlách: (1) Ak sú dva trojuholníky podobné s koeficientom podobnosti k, je pomer ich obsahov rovný k^2. (2) Ak nejaké tri body X, Y, Z ležia na jednej priamke a bod V mimo nej, je pomer obsahov trojuholníkov XYV a YZV rovný pomeru $|XY| : |YZ|$.

Zo zhodnosti striedavých uhlov medzi rovnobežkami AB a CD vyplýva, že trojuholníky AMP a CDP sú podľa vety uu podobné, a to s koeficientom $|AM| : |CD| = 3/2$. Ak označíme S obsah trojuholníka CDP, je obsah trojuholníka AMP rovný $(3/2)^2 S = \frac{9}{4}S$. Z rovností $|AP| : |CP| = |MP| : |DP| = 3/2$ potom vyplýva, že obsah každého z trojuholníkov APD a MPC je rovný $3/2$ obsahu trojuholníka CDP, čiže $\frac{3}{2}S$. Keďže M je stred strany AB, sú obsahy trojuholníkov AMC a BMC rovnaké a rovnajú sa $\frac{9}{4}S + \frac{3}{2}S = \frac{15}{4}S$ (obr. 1). Obsah štvoruholníka $MBCP$ je teda rovný $\frac{3}{2}S + \frac{15}{4}S = \frac{21}{4}S$ a hľadaný pomer je $4 : 21$.



Obr. 1

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za určenie pomeru obsahov trojuholníkov AMP a CDP. Výpočty obsahov sa môžu samozrejme líšiť podľa voľby základného obsahu, pomocou ktorého vyjadrujeme obsahy ostatných trojuholníkov na obrázku. (Pravidlá uvedené v úvode nášho riešenia budú riešitelia pre konkrétne dvojice trojuholníkov odvodzovať vyjadrovaním ich obsahov pomocou základní a výšok.)

---

2. *Ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú rovnosti*

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

platí nerovnosť

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqq 3.$$

Dokážte a zistite, kedy za daných podmienok nastane rovnosť. (J. Švrček)

Riešenie. Z predpokladov vyplýva $c^2 = a^2$, $d^2 = b^2$, teda $|c| = |a|$, $|d| = |b|$.

Ak $c = a$ a súčasne $d = b$, dostaneme postupne pre ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti

$$\begin{aligned} L &= ab + ac + ad + bc + bd + cd = \\ &= ab + a^2 + ab + ab + b^2 + ab = 1 + 4ab \leqq \\ &\leqq 1 + 2(a^2 + b^2) = 3, \end{aligned}$$

pretože pre ľubovoľné dve čísla a, b je $2ab \leqq a^2 + b^2$, čo vyplýva zo zrejmej nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$. Rovnosť potom nastane iba pre dve štvorice $a = b = c = d = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, lebo z podmienky $a = b$ a rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ vyplýva $a^2 = \frac{1}{2}$, t. j. $a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ak $c = -a$, $d = b$, tak $L = -a^2 + b^2 \leqq a^2 + b^2 = 1 < 3$. Podobne v prípade $c = a$, $d = -b$ vyjde $L = a^2 - b^2 \leqq 1$, v prípade $c = -a$, $d = -b$ dokonca $L = -a^2 - b^2 \leqq 0$.

Iné riešenie. Hodnota súčtu

$$S = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

je zrejme nezáporná. Pre dvojnásobok ľavej strany L dokazovanej nerovnosti preto platí

$$2L = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - S \leqq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 6,$$

odkiaľ $L \leqq 3$. Rovnosť $L = 3$ potom nastane práve vtedy, keď $S = 0$, teda práve vtedy, keď čísla a, b, c, d majú rovnakú hodnotu, ktorá sa však musí rovnať $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (podobne ako v prvom riešení).

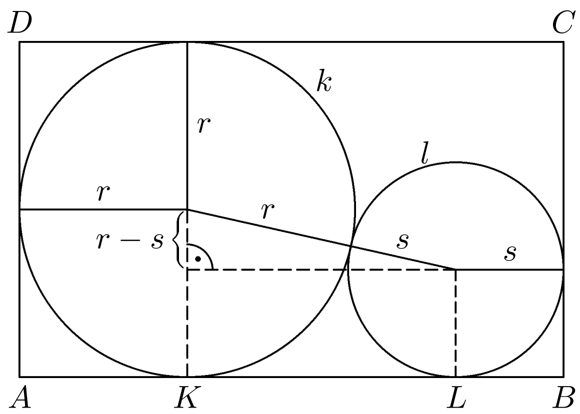
Za úplné riešenie dajte 6 bodov, 4 body za správne riešenie základného prípadu $c = a$, $d = b$ (z toho 2 body za vyšetrenie rovnosti). Zostávajúce 2 body za vyšetrenie zostávajúcich prípadov $c = -a$ alebo $d = -b$.

---

3. *Kružnice k, ℓ s vonkajším dotykom ležia obe v obdĺžniku $ABCD$, ktorého obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnica k sa pritom dotýka strán CD, DA a AB, zatiaľ čo kružnica ℓ sa dotýka strán AB a BC. Určte polomery kružníc k a ℓ, ak viete, že polomer kružnice k je v centimetroch vyjadrený celým číslom.* (J. Švrček)

Riešenie. Označme r, s polomery kružníc k, l (v centimetroch) a K, L ich body dotyku so stranou AB (obr. 2). Potom $|AK| = r$, $|LB| = s$, a ako ľahko spočítame pomocou Pytagorovej vety (pozri tiež 3. úlohu školského kola kategórie C),

$$|KL| = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs}.$$



Obr. 2

Pre dĺžky strán obdĺžnika $ABCD$ platí $|AD| = 2r$, $|AB| = r + 2\sqrt{rs} + s = (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2$. Podľa predpokladu má byť

$$2r\left(\sqrt{r} + \sqrt{s}\right)^2 = 72,$$

čiže po vykrátení dvoma a odmocnení

$$r + \sqrt{rs} = 6.$$

Odtiaľ vyplýva, že $r < 6$, a pre veľkosť polomeru s dostávame vyjadrenie

$$rs = (6 - r)^2,$$

$$s = \frac{(6 - r)^2}{r}. \tag{1}$$

Z podmienok úlohy ďalej vyplýva, že s nemôže byť väčšie ako r, pretože inak by kružnica l neležala v danom obdĺžniku, a pretože aj kružnica k musí ležať v danom obdĺžniku, musí byť $|AB| \geqq |AD| = 2r$. Z nerovnosti $s \leqq r$ podľa (1) dostaneme podmienku $36 - 12r + r^2 \leqq r^2$, t. j. $r \geqq 3$. Z nerovnosti $|AB| \geqq 2r$ potom vyplýva $72 = |AB| \cdot |AD| \geqq 4r^2$, čiže $r^2 \leqq 18$, čo pre celočíselné r znamená, že $r \leqq 4$. Pre polomer r nám tak vychádzajú len dve možnosti, $r \in \{3, 4\}$, prislúchajúce hodnoty polomeru s vypočítame zo vzťahu (1).

Úloha má práve dve riešenia: $r = s = 3\,\mathrm{cm}$ a $r = 4\,\mathrm{cm}$, $s = 1\,\mathrm{cm}$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov bez ohľadu na to, či riešiteľ určil jediné dve možnosti výpočtom, alebo z piatich možností vylúčil postupne tie, ktoré nevyhovujú daným podmienkam. Za každé nesprávne riešenie (napríklad keď žiak uvedie ako možný výsledok $r = 5$, $s = \frac{1}{5}$) strhnite bod.

---

4. *Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí*

$$p + q^2 = q + 145p^2.$$

(*J. Moravčík*)

Riešenie. Pre prvočísla p, q má platiť $q(q - 1) = p(145p - 1)$, takže prvočíslo p delí $q(q-1)$. Prvočíslo p nemôže deliť prvočíslo q, pretože to by znamenalo, že $p = q$, a teda $145p = p$, čo nie je možné. Preto p delí $q - 1$, t. j. $q - 1 = kp$ pre nejaké prirodzené k. Po dosadení do daného vzťahu dostaneme podmienku

$$p = \frac{k + 1}{145 - k^2}.$$

Vidíme, že menovateľ zlomku na pravej strane je kladný jedine pre $k \leqq 12$, zároveň však pre $k \leqq 11$ je jeho čitateľ menší ako menovateľ: $k + 1 \leqq 12 < 24 \leqq 145 - k^2$. Iba pre $k = 12$ tak vyjde p prirodzené a prvočíslo, $p = 13$. Potom $q = 157$, čo je tiež prvočíslo. Úloha má jediné riešenie.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za úvahu o deliteľnosti, ktorá vedie ku vzťahu $q = 1+kp$.