2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *Neprázdnu podmnožinu prirodzených čísel nazveme malou, keď má menej prvkov, ako je jej najmenší prvok. Určte počet všetkých tých malých množín* M*, ktoré sú podmnožinami množiny* $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ *a majú nasledovnú vlastnosť: ak do* M *patria dve rôzne čísla* x *a* y*, potom do* M *patrí aj číslo* $|x - y|$. (*J. Földes*)

Riešenie. Zistíme najskôr, ako vyzerajú všetky konečné neprázdne množiny M prirodzených čísel s (kľúčovou) vlastnosťou zo záveru zadania. Až potom posúdime, ktoré z týchto množín sú malé a určíme počet tých z nich, ktoré sú zostavené z čísel od 1 do 100.

Nech M je teda ľubovoľná konečná neprázdna množina prirodzených čísel s vlastnosťou: ak $x, y \in \mathsf{M}$ a $x \neq y$, tak aj $|x - y| \in \mathsf{M}$. Predpokladajme, že M má práve k prvkov a usporiadajme ich podľa veľkosti od najmenšieho čísla po najväčšie:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k.$$

V prípade $k = 1$ spĺňa množina $\mathsf{M} = \{x_1\}$ danú vlastnosť triviálne, predpokladajme preto ďalej, že $k > 1$. Potom číslo $x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$ podľa posudzovanej vlastnosti patrí do M a je menšie ako x_2, takže sa musí rovnať číslu x_1. Z rovnosti $x_2 - x_1 = x_1$ dostávame $x_2 = 2x_1$. Analogicky platí, že čísla $x_3 - x_2$, $x_3 - x_1$ sú dve čísla z M, ktoré sú menšie ako x_3. Pritom $x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, takže musí platiť $x_3 - x_2 = x_1$ a $x_3 - x_1 = x_2$. To spolu s dokázanou rovnosťou $x_2 = 2x_1$ vedie k záveru, že $x_3 = x_1 + x_2 = 3x_1$. V rovnakých úvahách môžeme pokračovať a získavať rovnosti $x_4 = 4x_1, \ldots, x_k = kx_1$. Formálne možno tieto rovnosti dokázať indukciou: ak platí rovnosť $x_n = nx_1$ pre niektoré n, $1 \leqq n < k$, tak úvahou o n číslach

$$x_{n+1} - x_n < x_{n+1} - x_{n-1} < \ldots < x_{n+1} - x_1,$$

ktoré podľa posudzovanej vlastnosti patria do M a sú menšie ako x_{n+1}, prichádzame k záveru, že $x_{n+1} - x_n = x_1$, odkiaľ $x_{n+1} = x_n + x_1 = nx_1 + x_1 = (n + 1)x_1$. Dôkaz indukciou je hotový. Ak označíme $x_1 = m$, vyplýva z našich úvah, že skúmaná k-prvková množina M má nutne tvar

$$M = \{m, 2m, 3m, \ldots, km\}. \tag{1}$$

Na druhej strane je zrejmé, že taká množina M má požadovanú vlastnosť, nech sú prirodzené čísla m a k vybrané akokoľvek.

Množina M zapísaná v (1) má k prvkov, pričom najmenší z nich je číslo m. Podľa zadania úlohy je taká množina malá práve vtedy, keď platí nerovnosť $k < m$. Zároveň je jasné, že taká množina M je podmnožinou množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ práve vtedy, keď platí nerovnosť $km \leqq 100$. Našou úlohou je teda nájsť počet všetkých dvojíc prirodzených čísel k, m, pre ktoré platí $k < m$ a $km \leqq 100$. Ako býva pri riešení podobných kombinatorických úloh zvykom, hľadaný počet určíme, keď vyhovujúce dvojice (k, m) vhodne rozdelíme do menších skupín a určíme počty dvojíc v jednotlivých skupinách. V našej úlohe sa ponúka jednak rozdelenie do skupín dvojíc (k, m) s rovnakou hodnotou k, jednak rozdelenie do skupín dvojíc (k, m) s rovnakou hodnotou m. (To zodpovedá tomu, že pôvodné objekty (množiny M vyhovujúce úlohe) rozdelíme do skupín buď podľa počtu ich prvkov, alebo podľa veľkosti ich najmenších prvkov.)

Uveďme oba výpočty. Kvôli tomu označme $p(k)$, $q(m)$ počty vyhovujúcich dvojíc (k, m) s daným k, resp. s daným m. Uvedomme si, že z nerovností $k < m$ a $km \leqq 100$ vyplývajú odhady $1 \leqq k \leqq 9$ a $2 \leqq m \leqq 100$, ktoré naznačujú, že výpočet pomocou hodnôt $p(k)$ bude menej náročný ako výpočet pomocou hodnôt $q(m)$.

Pri pevnom k sú vyhovujúce čísla m určené nerovnosťami $k+1 \leqq m \leqq 100/k$. Dosadením jednotlivých hodnôt k zistíme, že $p(1) = 99$, $p(2) = 48$, $p(3) = 30$, $p(4) = 21$, $p(5) = 15$, $p(6) = 10$, $p(7) = 7$, $p(8) = 4$ a $p(9) = 2$. Hľadaný celkový počet je teda rovný

$$99 + 48 + 30 + 21 + 15 + 10 + 7 + 4 + 2 = 236.$$

Naopak, pri pevnom m je číslo k ohraničené takto: $1 \leqq k \leqq \min\{m-1, 100/m\}$. Odtiaľ vypočítame, že $q(2) = 1$, $q(3) = 2$, $q(4) = 3, \ldots$, $q(9) = 8$, $q(10) = q(11) = 9$, $q(12) = 8$, $q(13) = q(14) = 7$, $q(15) = q(16) = 6$, $q(17) = \ldots = q(20) = 5$, $q(21) = \ldots = q(25) = 4$, $q(26) = \ldots = q(33) = 3$, $q(34) = \ldots = q(50) = 2$, $q(51) = \ldots = q(100) = 1$. Hľadaný počet je teda rovný

$$1 + 2 + \ldots + 8 + 2 \cdot 9 + 8 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 50 = 236.$$

Pri výpočte jednotlivých hodnôt $q(m)$ je výhodné si uvedomiť, že pre každé prirodzené $m \leqq 10$ platí nerovnosť $m - 1 < 100/m$, zatiaľ čo pre každé $m \geqq 11$ platí opačná nerovnosť $m - 1 > 100/m$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Koľko je všetkých malých množín (v zmysle úlohy MO), ktoré možno vybrať z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$? [9 jednoprvkových, $\binom{8}{2}$ dvojprvkových, $\binom{7}{3}$ trojprvkových, $\binom{6}{4}$ štvorprvkových a 1 päťprvková, spolu 88 malých množín.]

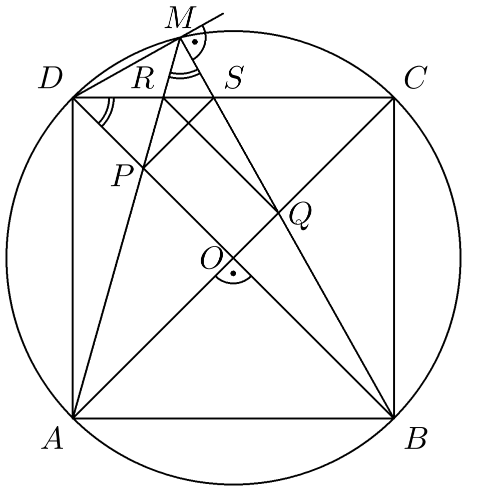
N2. Nájdite všetky konečné neprázdne množiny M prirodzených čísel s vlastnosťou: ak $x, y \in \mathsf{M}$ a $x \neq y$, tak aj $|x - y| \in \mathsf{M}$. [$\mathsf{M} = \{m, 2m, 3m, \ldots, km\}$. Návod: poz. vyššie prvú časť riešenia úlohy MO.]

N3. Nájdite všetky neprázdne množiny M celých čísel s vlastnosťou: ak $x, y \in \mathsf{M}$, tak aj $x - y \in \mathsf{M}$. [Každá množina M je tvorená všetkými celými násobkami niektorého nezáporného celého čísla m. Návod: Najskôr ukážte, že $0 \in M$ a $x \in \mathsf{M} \Leftrightarrow -x \in \mathsf{M}$. V prípade, keď $\mathsf{M} \neq \{0\}$, definujte m ako najmenší kladný prvok M a ukážte pomocou vety o delení celých čísel so zvyškom, že pre každé celé x platí: $x \in \mathsf{M} \Leftrightarrow m \mid x$.]

---

2. *Nech M je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme P, R priesečníky priamky AM postupne s úsečkami BD, CD a podobne Q, S priesečníky priamky BM s úsečkami AC, DC. Dokážte, že priamky PS a QR sú navzájom kolmé.* *(J. Švrček)*

Riešenie. Označme O stred daného štvorca $ABDC$ (obr. 1). Pretože bod M leží na spomenutom oblúku, má uhol AMB veľkosť rovnú polovici veľkosti stredového (pravého) uhla AOB, teda 45°. Pretože rovnakú veľkosť má vo štvorci $ABCD$ uhol BDC, je



Obr. 1

pod uhlom 45° z bodov D, M vidno tú istú úsečku PS. Pretože navyše oba body D, M ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou PS, je $PSMD$ tetivový štvoruholník. Jeho vnútorný uhol DMS je pravý (bod M totiž leží na Tálesovej kružnici nad priemerom BD), takže je pravý aj vnútorný uhol DPS. Tak sme dokázali, že $PS \perp BD$. Zrejme podobne vieme ukázať, že $QR \perp AC$. Z posledných dvoch vzťahov už vyplýva, že $PS \perp QR$ (lebo $AC \perp BD$).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pripomeňte si a dokážte vety o obvodových, stredových a úsekových uhloch na kružnici.

N2. Nech L je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme K priesečník priamok AL a CD, M priesečník priamok AD a CL a N priesečník priamok MK a BC. Dokážte, že body B, L, M, N ležia na jednej kružnici. [MO 53–A–III–5, poz. internetové stránky MO.]

N3. V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ platia rovnosti $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC| = 36°$. Na základni AB je daný bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AKD a KBC majú vonkajší dotyk. [MO 53–B–I–2, poz. internetové stránky MO.]

---

3. *Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Uvažujme dvojice (a, b) celých čísel, pre ktoré majú kvadratické rovnice*

$$x^2 - 2ax + b = 0, \qquad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálne korene (nie nutne rôzne), ktoré možno označiť $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takom poradí, že platí rovnosť $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$.

a) Pre dané k určte najväčšiu možnú hodnotu b zo všetkých takých dvojíc (a, b).

b) Pre $k = 2\,004$ určte počet všetkých takých dvojíc (a, b).

c) Pre dané k vypočítajte súčet čísel b zo všetkých takých dvojíc (a, b), pričom každé číslo b sa pripočíta toľkokrát, v koľkých dvojiciach (a, b) vystupuje.

(E. Kováč)

Riešenie. Úpravou rovníc doplnením na štvorce

$$(x-a)^2 = a^2 - b, \qquad (y+a)^2 = a^2 - b \tag{1}$$

(alebo priamym použitím známeho vzorca s diskriminantom) zisťujeme, že dané rovnice majú v obore $\mathbb{R}$ korene práve vtedy, keď celé čísla a, b spĺňajú podmienku $a^2 - b \geqq 0$. Tieto korene potom tvoria dvojice

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \left\{a + \sqrt{a^2-b}, a - \sqrt{a^2-b}\right\}, \\ \{y_1, y_2\} &= \left\{-a + \sqrt{a^2-b}, -a - \sqrt{a^2-b}\right\}. \end{aligned}$$

Teraz stojíme pred otázkou, ako efektívne (t. j. bez stereotypného opakovania navzájom podobných výpočtov) určiť všetky štyri hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$. Ten možno zapísať neurčitým spôsobom ako

$$\left(a \pm \sqrt{a^2-b}\right)\left(-a \pm \sqrt{a^2-b}\right) - \left(a \pm \sqrt{a^2-b}\right)\left(-a \pm \sqrt{a^2-b}\right),$$

pričom pri prvom a treťom výskyte znaku $\pm$, rovnako ako pri druhom a štvrtom, vyberáme navzájom opačné znamienka. Naznačíme tri možné prístupy. (Celá diskusia bude síce dlhšia, ako keby sme vypísali výpočet všetkých štyroch rôznych výrazov, ale o to nám v komentári nejde.)

(i) Ak zvolíme pevne označenie x_1, x_2, y_1, y_2, stačí vypočítať dve hodnoty $V_1 = x_1y_1 - x_2y_2$, $V_2 = x_1y_2 - x_2y_1$, ostatné dve hodnoty sú k nim opačné čísla $V_3 = x_2y_2 - x_1y_1 = -V_1$ a $V_4 = x_2y_1 - x_1y_2 = -V_2$. Oddelený výpočet oboch hodnôt V_1, V_2 však nie je nutný, ako ihneď uvidíme.

(ii) Výber znamienok pre čísla x_1 a y_1 možno zapísať v tvare $x_1 = a + \varepsilon\sqrt{a^2-b}$ a $y_1 = -a + \delta\sqrt{a^2-b}$, pričom koeficienty ε a δ sú čísla z množiny $\{-1, 1\}$. Potom $x_2 = a - \varepsilon\sqrt{a^2-b}$, $y_2 = -a - \delta\sqrt{a^2-b}$ a stačí urobiť jediný výpočet so všeobecnými ε, δ (pre stručnosť zápisu označíme ešte $c = \sqrt{a^2-b}$):

$$\begin{aligned} x_1y_1 - x_2y_2 &= (a+\varepsilon c)(-a+\delta c) - (a-\varepsilon c)(-a-\delta c) = \\ &= \left(-a^2 - \varepsilon ac + \delta ac + \varepsilon\delta c^2\right) - \left(-a^2 + \varepsilon ac - \delta ac + \varepsilon\delta c^2\right) = \\ &= -2a(\varepsilon - \delta)c. \end{aligned}$$

Pretože $\varepsilon - \delta$ nadobúda hodnoty -2, 0 a 2, hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$ sú práve čísla $4a\sqrt{a^2-b}$, 0 a $-4a\sqrt{a^2-b}$.

(iii) Výber znamienok pre čísla x_1 a y_1 môžeme vyriešiť zápismi $x_1 = a + u$ a $y_1 = -a + v$, pričom u a v sú reálne čísla spĺňajúce rovnosti $u^2 = v^2 = a^2 - b$. (Dodajme, že čísla u, v sú vlastne základy druhých mocnín v rovniciach (1), alebo tiež čísla $\varepsilon\sqrt{a^2-b}$, $\delta\sqrt{a^2-b}$ z predchádzajúceho odstavca.) Potom platí $x_2 = a - u$, $y_2 = -a - v$ a

$$V = x_1y_1 - x_2y_2 = (a+u)(-a+v) - (a-u)(-a-v) = -2a(u-v).$$

Pretože hodnoty $u - v$ pri podmienke $u^2 = v^2 = a^2 - b$ sú $-2\sqrt{a^2-b}$, 0 a $2\sqrt{a^2-b}$, prichádzame k rovnakému záveru ako v (ii).

Po výpočte hodnôt výrazu V zisťujeme, že rovnosť $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$ nastane práve vtedy, keď $4k \in \{-4a\sqrt{a^2-b}, 0, 4a\sqrt{a^2-b}\}$. Pretože k je prirodzené číslo, platí $a \neq 0$ a posledná podmienka je ekvivalentná s rovnosťou

$$k = |a|\sqrt{a^2-b}, \tag{2}$$

ktorá je rozkladom čísla k na súčin dvoch činiteľov, ktoré musia byť tiež prirodzené čísla. (Číslo $\sqrt{a^2-b}$ je rovné zlomku $k/|a|$, takže je to číslo racionálne, a teda číslo celé.) Preto môžeme všetky celočíselné riešenia (a, b) rovnice (2) ľahko popísať: vezmeme ľubovoľný rozklad $k = m \cdot n$ daného čísla k na dva (kladné) činitele m, n a z rovností $|a| = m$ a $\sqrt{a^2-b} = n$ jednoducho určíme obe vyhovujúce dvojice (a, b):

$$a = \pm m, \quad b = m^2 - n^2. \tag{3}$$

Teraz už máme všetko pripravené na riešenie otázok pôvodnej úlohy.

Časť a). Pretože pre činitele m, n z ľubovoľného rozkladu $k = m \cdot n$ platí $m \leqq k$ a $n \geqq 1$, vyplýva zo vzťahu (3) odhad $b \leqq m^2 - 1$. Pritom rovnosť nastane, keď zvolíme $m = k$ a $n = 1$. Pre dané k je teda najväčšia hodnota b rovná $b_{\max} = k^2 - 1$.

Časť b). Pre $k = 2\,004$ existuje práve 12 usporiadaných dvojíc (m, n), pre ktoré $2\,004 = m \cdot n$, lebo všetkých rozkladov čísla $2\,004$ na dva činitele (keď nezohľadníme ich poradie) je práve šesť: $1 \cdot 2\,004 = 2 \cdot 1\,002 = 3 \cdot 668 = 4 \cdot 551 = 6 \cdot 334 = 12 \cdot 167$. Pretože môžeme dvoma spôsobmi zvoliť znamienko čísla a vo vzťahu (3), hľadaný počet dvojíc (a, b) je rovný dvojnásobku počtu dvojíc (m, n), teda číslu $2 \cdot 12 = 24$.

Časť c). Našou úlohou je určiť súčet čísel b z dvojíc (a, b) určených vzťahmi (3), keď dvojice (m, n) prebiehajú všetkými rozkladmi $k = m \cdot n$ daného čísla k. Ak $m = n$, podľa (3) platí $b = 0$, preto môžeme uvažovať len také dvojice činiteľov (m, n), v ktorých $m \neq n$, a zoskupiť ich do párov (m, n) a (n, m). Pretože v každom páre pre súčet príslušných hodnôt b platí $(m^2 - n^2) + (n^2 - m^2) = 0$ (ako pre jednu, tak pre druhú voľbu znamienka čísla a), je hľadaný súčet čísel b zo všetkých uvažovaných dvojíc (a, b) rovný nule (pre každé pevné k).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Rovnica $x^2 + px + q = 0$ má korene x_1 a x_2. Vyjadrite pomocou čísel p, q hodnoty výrazov

$$x_1^2 + x_2^2, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \quad |x_1 - x_2|.$$

[$p^2 - 2q$, $-p/q$, $\sqrt{p^2 - 4q}$.]

N2. Určte koeficient p rovnice $x^2 + px + 12 = 0$, keď viete, že v obore $\mathbb{R}$ má dva korene, ktoré možno označiť $x_{1,2}$ tak, že platí $2x_1 + 3x_2 = 18$. [Návod: riešte sústavu rovníc $2x_1 + 3x_2 = 18$ a $x_1x_2 = 12$. Vyhovuje $p = -7$ a $p = -8$.]

---

4. *Dané aritmetické postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ majú rovnaký prvý člen a nasledovnú vlastnosť: existuje index k $(k > 1)$, pre ktorý platia rovnosti*

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \quad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \quad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Nájdite všetky také indexy k. (*V. Bálint*)

Riešenie. Označme c, d diferenciu prvej, resp. druhej z daných aritmetických postupností. Pretože podľa zadania platí $y_1 = x_1$, majú členy oboch postupností všeobecné vyjadrenia

$$x_i = x_1 + (i-1)c \quad \text{a} \quad y_i = x_1 + (i-1)d$$

pre každý index i. Rozdiel $x_i^2 - y_i^2$ možno preto upraviť na tvar

$$\begin{aligned} x_i^2 - y_i^2 &= \left(x_1^2 + 2x_1(i-1)c + (i-1)^2c^2\right) - \left(x_1^2 + 2x_1(i-1)d + (i-1)^2d^2\right) = \\ &= 2x_1(i-1)(c-d) + (i-1)^2(c^2-d^2). \end{aligned}$$

Pre index k podľa zadania úlohy platia rovnosti

$$53 = 2x_1(k-1)(c-d) + (k-1)^2(c^2-d^2), \tag{1}$$
$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) + (k-2)^2(c^2-d^2), \tag{2}$$
$$27 = 2x_1k(c-d) + k^2(c^2-d^2). \tag{3}$$

Tieto rovnosti alebo ich násobky teraz vhodne navzájom sčítame. Aby sme sa zbavili členov s x_1, odčítame od dvojnásobku rovnosti (1) súčet rovností (2) a (3). Pri člene $2x_1(c-d)$ tak zostane koeficient $2(k-1)-(k-2+k) = 0$. Pretože $2\cdot 53-(78+27) = 1$ a $2(k-1)^2-(k-2)^2-k^2 = -2$, dostaneme spomenutou kombináciou jednoduchú rovnosť $1 = -2(c^2-d^2)$, z ktorej určíme $c^2-d^2 = -1/2$. To dosadíme do rovností (2) a (3), ktoré tak prejdú na tvar

$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) - \frac{1}{2}(k-2)^2, \tag{4}$$
$$27 = 2x_1k(c-d) - \frac{1}{2}k^2. \tag{5}$$

Členov s x_1 sa opäť zbavíme, keď od k-násobku rovnosti (4) odčítame $(k-2)$-násobok rovnosti (5). Získanú rovnicu s neznámou k potom vyriešime:

$$\begin{aligned} 78k - 27(k-2) &= -\frac{1}{2}(k-2)^2\cdot k + \frac{1}{2}k^2\cdot(k-2), \\ 51k + 54 &= -\frac{1}{2}(k^3-4k^2+4k) + \frac{1}{2}(k^3-2k^2), \\ 0 &= k^2 - 53k - 54, \\ 0 &= (k+1)(k-54). \end{aligned}$$

Pretože index k je prirodzené číslo, platí nutne $k = 54$. Tým je úloha vyriešená.

Dodajme, že zadanie úlohy nevyžaduje skúmať, či pre nájdenú (jedinú) hodnotu indexu k dvojica postupností spĺňajúcich podmienky úlohy existuje. Pre zaujímavosť uveďme, že takých dvojíc postupností je dokonca nekonečne veľa. Je nutné a stačí, aby ich spoločný prvý člen x_1 a diferencie c, d spĺňali podmienky $c^2-d^2 = -1/2$ a $x_1(c-d) = 55/4$. Vyplýva to jednoducho z ktorejkoľvek z rovností (1) až (3) po dosadení hodnôt $k = 54$ a $c^2-d^2 = -1/2$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre členy dvoch aritmetických postupností $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ platia rovnosti $x_1 = y_1$ a $x_9 = y_{13}$. Dokážte, že existuje index k taký, že $x_k = y_{100}$. Ktoré ďalšie rovnosti $x_i = y_j$ sú zaručené? [$k = 67$, všeobecne $x_{2n+1} = y_{3n+1}$.]

N2. Nájdite všetky aritmetické postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, pre ktoré platí

$$x_1^2 = x_2^2 = x_5^2 - 48.$$

[Dve postupnosti so všeobecnými členmi $x_i = 2i - 3$, resp. $x_i = 3 - 2i$.]

N3. Nájdite všetky aritmetické postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, pre ktoré platí $x_4^2 - x_3^2 = 15$ a zároveň $x_7^2 - x_5^2 = 120$. [Dve postupnosti s o všeobecnými členmi $x_i = 3i - 8$, resp. $x_i = 8 - 3i$.]

N4. Ak pre nekonštantnú aritmetickú postupnosť $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ platí rovnosť $x_k^2 = x_{2k}^2$ pre niektorý index k, tak $x_{3k-1} = -x_1$. Dokážte. [Návod: Zdôvodnite, prečo $x_{2k} = -x_k$. Odtiaľ $x_{2k+i} = -x_{k-i}$ pre každé $i < k$.]

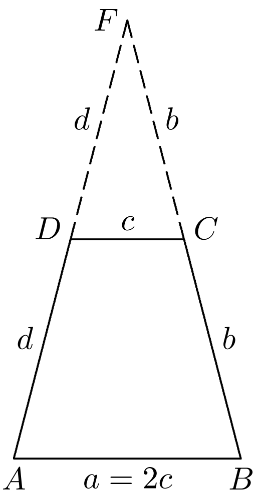
N5. Ktoré aritmetické postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ spĺňajú rovnosti $x_1 = y_1 = 1$, $x_5^2 - y_5^2 = 9$ a $x_{13}^2 - y_{13}^2 = 45$? [$x_i = (1 + i)/2$ a $y_i = (5 - i)/4$.]

---

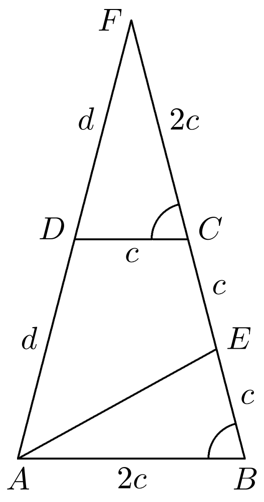
5. *V lichobežníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E stred ramena BC. Dokážte, že rovnosť $|AB| = |BC|$ platí práve vtedy, keď štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový.* (R. Horenský)

Riešenie. Označme zvyčajným spôsobom a, b, c, d dĺžky strán daného lichobežníka. Podľa zadania platí rovnosť $a = 2c$, ktorá znamená, že základňa CD je strednou priečkou trojuholníka ABF, pričom F je priesečník ramien BC a AD predĺžených za vrchol C resp. D (obr. 2). Preto platí aj $|CF| = b$ a $|DF| = d$.

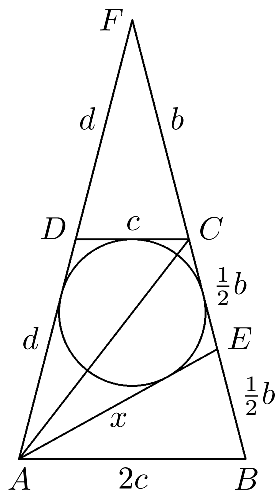
V prvej časti riešenia predpokladajme, že $|AB| = |BC|$, čiže $2c = b$ (obr. 3). Potom $|CF| = b = 2c$ a $|EB| = |EC| = b/2 = c$, takže trojuholníky ABE a FCD sú zhodné podľa vety *sus* (ich strany dĺžok $2c$ a c zvierajú súhlasné uhly určené priamkou BC medzi rovnobežkami AB a CD). Zo zhodnosti tretích strán AE a FD potom vyplýva rovnosť $|AE| = d$. Tak prichádzame k záveru, že strany štvoruholníka $AECD$ majú dĺžky d, c, c, d. Je to teda dotyčnicový štvoruholník (dokonca deltoid, prípadne kosoštvorec).



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

V druhej časti riešenia predpokladajme, že štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový, takže podľa známej vety pre dĺžky jeho strán platí rovnosť $|AE|+|CD| = |EC|+|AD|$, čiže $x + c = b/2 + d$, pričom $x = |AE|$ (obr. 4). Odtiaľ vyjadríme dĺžku x, s ktorou budeme ďalej pracovať, v tvare

$$x = \frac{b}{2} - c + d. \tag{1}$$

Všimnime si teraz, že úsečky CD, AC a AE delia trojuholník ABF na štyri trojuholníky s rovnakým obsahom. (Podrobnejšie: z $|AD| = |DF|$, $|BC| = |CF|$ a $|BE| = |EC|$ vyplýva sled rovností $S_{ADC} = S_{CDF} = S_{ACF}/2 = S_{ABC}/2 = S_{ABE} = S_{ACE}$.) Preto pre obsahy štvoruholníka $AECD$ a trojuholníka AEF platí $S_{AECD} : S_{AEF} = 2 : 3$. Tieto dva mnohouholníky však majú spoločnú vpísanú kružnicu, takže v rovnakom pomere $2 : 3$ musia byť aj ich odvody (pripomeňme, že obsah mnohouholníka s obvodom o a vpísanou kružnicou s polomerom ϱ je rovný $o \cdot \varrho/2$). Pretože tieto obvody majú vyjadrenia

$$o_{AECD} = x + \frac{b}{2} + c + d, \quad o_{AEF} = x + \frac{3b}{2} + 2d,$$

platí $(x + b/2 + c + d) : (x + 3b/2 + 2d) = 2 : 3$. Odtiaľ ľahko vyjadríme neznámu x ako

$$x = \frac{3b}{2} - 3c + d. \tag{2}$$

Porovnaním (1) a (2) dostaneme rovnosť $b = 2c$, čiže $b = a$. Tým je rovnosť $|AB| = |BC|$ dokázaná.

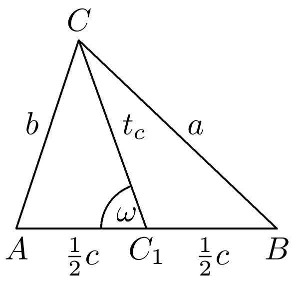
Iné riešenie. (Podľa *Pavla Novotného.*) Pripomeňme najskôr vyjadrenie dĺžok ťažníc trojuholníka pomocou dĺžok jeho strán: vo všeobecnom trojuholníku ABC pri zvyčajnom označení platí vzťah

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \tag{1}$$

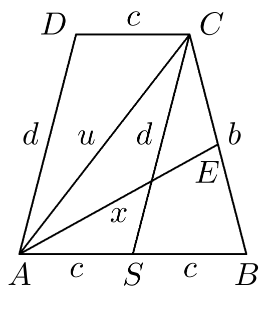
Odvodenie (1) je jednoduché: stačí sčítať rovnosti

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 - ct_c\cos\omega, \quad a^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 + ct_c\cos\omega,$$

ktoré platia podľa kosínusovej vety pre trojuholníky ACC_1 a BCC_1, pričom C_1 je stred strany AB a $\omega = |\measuredangle AC_1C|$ (obr. 5).



Obr. 5



Obr. 6

V danom lichobežníku $ABCD$ (v ktorom platí $a = 2c$) uvažujme okrem stredu E ramena BC ešte stred S základne AB a označme $x = |AE|$ a $u = |AC|$ (obr. 6). Pretože $|AS| = |SB| = a/2 = c$, je $ASCD$ rovnobežník, teda $|CS| = d$. Teraz podľa vzťahu (1) vyjadríme dĺžky ťažníc AE a CS trojuholníka ABC:

$$4x^2 = 2u^2 + 2(2c)^2 - b^2 \quad \text{a} \quad 4d^2 = 2u^2 + 2b^2 - (2c)^2.$$

Vzájomným odčítaním týchto rovností vylúčime veličinu u a dostaneme

$$4(x^2 - d^2) = 3(4c^2 - b^2), \quad \text{čiže} \quad 4(x - d)(x + d) = 3(2c - b)(2c + b).$$

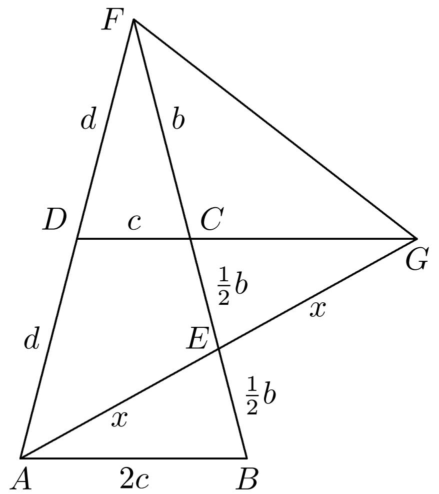
Odtiaľ vyplýva, že znamienko rozdielu $x-d$ je vždy rovnaké ako znamienko rozdielu $2c-$ $- b$. Ukážme, že z tohto poznatku vyplýva celé riešenie našej úlohy. Použijeme k tomu známe kritérium pre dotyčnicové štvoruholníky: štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový práve vtedy, keď sa rovnajú oba súčty dĺžok jeho protiľahlých strán, t. j. práve vtedy, keď $x + c = d + b/2$.

Ak $b = 2c$, tak podľa nášho poznatku $x = d$, a teda $AECD$ je deltoid (pripadne kosoštvorec). (Rovnosť $x + c = d + b/2$ vtedy platí dokonca sčítanec po sčítanci.)

Ak $b > 2c$, tak podľa nášho poznatku $x < d$, a teda $x + c < d + b/2$, takže štvoruholník $AECD$ nie je dotyčnicový.

Ak $b < 2c$, tak podľa nášho poznatku $x > d$, a teda $x + c > d + b/2$, takže štvoruholník $AECD$ nie je dotyčnicový.

Iné riešenie. V lichobežníku $ABCD$, v ktorom platí $a = 2c$, uvažujme okrem stredu E ramena BC a priesečníku F predĺžených ramien BC, AD ešte priesečník G priamok AE, CD (obr. 7). Ľahko vysvetlíme, že úsečky EF a DG sú ťažnice trojuhol-



Obr. 7

níka AFG (a bod C jeho ťažisko). Ak platí rovnosť $b = 2c$, sú tieto ťažnice zhodné, a preto je trojuholník AFG rovnoramenný so základňou FG, teda $AECD$ je deltoid (alebo kosoštvorec). Ak sa naopak štvoruholníku $AECD$ dá vpísať kružnica, je táto kružnica vpísaná aj obom trojuholníkom AEF a ADG, ktoré majú zhodné obsahy (rovné vždy polovici obsahu trojuholníka AFG). Potom sa však musia rovnať aj ich obvody, čo pre dĺžku $x = |AE| = |EG|$ dáva rovnicu

$$x + \frac{3b}{2} + 2d = 2x + 3c + d,$$

z ktorej vychádza vyjadrenie neznámej x v tvaru (2) z prvého riešenia. Rovnako ako tam potom dôjdeme k rovnosti $b = 2c$.

Nad obr. 7 možno uvažovať aj takto: štvoruholník $AECD$ bude dotyčnicový práve vtedy, keď splynú kružnice vpísané trojuholníkom AEF a ADG. Tieto trojuholníky majú totožné ramená vnútorných uhlov pri spoločnom vrchole A, takže ich vpísané kružnice splynú práve vtedy, keď budú mať zhodné polomery. To je však ekvivalentné s tým, že oba trojuholníky majú rovnaký obvod (vždy totiž majú rovnaký obsah). Pretože spoločná časť hraníc trojuholníkov AEF a ADG je tvorená lomenou čiarou EAD, rovnajú sa ich obvody práve vtedy, keď platí rovnosť $|DF|+|FE| = |DG|+|GE|$. Pretože $DE \parallel FG$, je z úvahy o elipse s ohniskami D, E jasné, že odvodená rovnosť nastane práve vtedy, keď úsečky DE a FG majú spoločnú os súmernosti (a $AECD$ je potom deltoid, prípadne kosoštvorec).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pripomeňte si a dokážte *kritérium pre dotyčnicové štvoruholníky*: Konvexný štvoruholník $ABCD$ je dotyčnicový práve vtedy, keď sa rovnajú oba súčty dĺžok jeho protiľahlých strán, t. j. práve vtedy, keď $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.

N2. Nech D, E sú body dotyku strany AB a kružnice vpísanej trojuholníku ABC, resp. kružnice pripísanej jeho strane AB (t. j. kružnice dotýkajúcej sa strany AB a polpriamok opačných k polpriamkam AC a BC). Dokážte, že body D, E majú vzdialenosti od vrcholov A, B dané vzťahmi

$$|AD| = |BE| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \quad |BD| = |AE| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2}.$$

[Návod: Využite niekoľkokrát, že pre body dotyku $T_{1,2}$ oboch dotyčníc zostrojených z ľubovoľného vonkajšieho bodu X k danej kružnici platí $|XT_1| = |XT_2|$.]

N3. Vnútri strán AB, BC, CD a DA konvexného štvoruholníka $ABCD$ sú postupne zvolené body K, L, M a N. Označme S priesečník priamok KM a LN. Ak možno vpísať kružnice štvoruholníkom $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, tak možno vpísať kružnicu aj štvoruholníku $ABCD$. Dokážte. [MO 51–B–II–3, poz. internetové stránky MO.]

---

6. *Nájdite všetky funkcie $f : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, ktoré splňujú zároveň tri nasledovné podmienky:*

a) Pre ľubovoľné nezáporné čísla x, y také, že $x + y > 0$, platí rovnosť

$$f\big(xf(y)\big)f(y) = f\Big(\frac{xy}{x+y}\Big);$$

b) $f(1) = 0$;

c) $f(x) > 0$ pre ľubovoľné $x > 1$. (*P. Calábek*)

Riešenie. V prvej časti riešenia predpokladajme, že $f : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$ je ľubovoľná z hľadaných funkcií. Keď dosadíme do danej rovnice hodnotu $y = 1$ a číslo $x \geqq 0$ ponecháme ľubovoľné, dostaneme

$$f\big(xf(1)\big)f(1) = f\Big(\frac{x}{x+1}\Big).$$

Vzhľadom na to, že podľa podmienky b) platí $f(1) = 0$, posledná rovnosť znamená, že

$$f\Big(\frac{x}{x+1}\Big) = 0 \quad \text{pre každé } x \geqq 0.$$

Vidíme, že funkcia f nadobúda hodnoty nula vo všetkých bodoch definičného oboru, ktoré možno vyjadriť v tvare zlomku $x/(x+1)$ s vhodným $x \geqq 0$. Každý taký zlomok určite leží v intervale $\langle 0, 1)$. Naopak, pre každé reálne číslo $t \in \langle 0, 1)$ má zrejme rovnica $t = x/(x+1)$ nezáporné riešenie $x = t/(1-t)$.

Zistený poznatok spolu s podmienkou c) zo zadania úlohy vedie k záveru, že rovnosť $f(t) = 0$ platí práve vtedy, keď $t \in \langle 0, 1\rangle$. Aby sme určili (kladnú) hodnotu $f(t)$ pre pevné $t > 1$, budeme uvažovať dve rovnice s takým parametrom t a neznámou x:

$$f\big(x\,f(t)\big)f(t) = 0 \qquad \text{a} \qquad f\Big(\frac{xt}{x+t}\Big) = 0.$$

Pretože podľa zadania úlohy sa ľavé strany oboch rovníc rovnajú (zvoľme $y = t$ v danej funkcionálnej rovnici) a $f(t) > 0$, musia mať obe rovnice rovnaké množiny riešení. Pre prvú z nich je táto množina určená sústavou nerovníc $0 \leqq x\,f(t) \leqq 1$, takže tvorí interval $\langle 0, 1/f(t)\rangle$. Druhá rovnica je ekvivalentná so sústavou nerovníc $0 \leqq xt/(x+t) \leqq$ $\leqq 1$, ktorej riešenia (vzhľadom na $x + t > 0$) tvoria interval $\langle 0, t/(t-1)\rangle$. Z totožnosti oboch intervalov vyplýva rovnosť

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{t}{t-1}, \quad \text{čiže} \quad f(t) = \frac{t-1}{t}.$$

Našli sme hodnotu $f(t)$ pre každé $t > 1$. Môžeme teda zhrnúť, že hľadaná funkcia f musí mať tvar

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t \leqq 1), \\ \dfrac{t-1}{t} & (t > 1). \end{cases}$$

V druhej časti riešenia ukážeme, že funkcia f určená ostatným predpisom má naozaj vlastnosť a) zo zadania úlohy (vlastnosti b) a c) sú zrejmé). Rovnosti oboch strán

$$L = f\big(x\,f(y)\big)f(y), \quad P = f\Big(\frac{xy}{x+y}\Big)$$

danej funkcionálnej rovnice dokážeme v každom zo štyroch prípadov rozlíšených podľa možných hodnôt premennej y a zlomku $xy/(x+y)$:

$$\text{(i)} \quad y = 0 \ (\text{a } x > 0), \qquad \text{(ii)} \quad 0 < y \leqq 1,$$
$$\text{(iii)} \quad y > 1 \text{ a } \frac{xy}{x+y} \leqq 1, \qquad \text{(iv)} \quad y > 1 \text{ a } \frac{xy}{x+y} > 1.$$

Prípad (i). Z $y = 0$ vyplýva $f(y) = 0$ a $xy/(x+y) = 0$, takže tiež $f(xy/(x+y)) = 0$, teda $L = P = 0$.

Prípad (ii). Z $0 < y \leqq 1$ vyplýva $xy/(x+y) < 1$, takže opäť $L = P = 0$.

Prípad (iii). Z $y > 1$ a $xy/(x + y) \leqq 1$ vyplýva $x \leqq y/(y - 1)$, takže vzhľadom na hodnotu $f(y) = (y - 1)/y$ platí nerovnosť $xf(y) \leqq 1$, teda opäť $L = P = 0$.

Prípad (iv). Z $y > 1$ a $xy/(x + y) > 1$ vyplýva $x > y/(y - 1)$, takže vzhľadom na hodnotu $f(y) = (y - 1)/y$ platí nerovnosť $xf(y) > 1$, teda

$$L = \frac{x \cdot \dfrac{y-1}{y} - 1}{x \cdot \dfrac{y-1}{y}} \cdot \frac{y-1}{y} = \frac{xy - x - y}{xy},$$

$$P = \frac{\dfrac{xy}{x+y} - 1}{\dfrac{xy}{x+y}} = \frac{xy - x - y}{xy}.$$

Rovnosť $L = P$ je tak dokázaná vo všetkých prípadoch.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

K zoznámeniu s témou a riešenými príkladmi funkcionálnych rovníc odporúčame knižku L. Davidov: *Funkcionální rovnice*, ŠMM č. 55, Mladá fronta, Praha 1984.

N1. Nech $\mathbb{R}^+$ označuje množinu všetkých kladných reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre ľubovoľné kladné čísla x, y spĺňajú rovnosť

$$x^2\Big(f(x) + f(y)\Big) = (x + y)f\Big(f(x)y\Big).$$

[MO 53–A–III–6, poz. internetové stránky MO.]

N2. Nech $\mathbb{R}^+$ označuje množinu všetkých kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spĺňajúce pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnosť

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

[MO 51–A–III–6, poz. internetové stránky MO.]