2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *Určte počet všetkých nekonečných aritmetických postupností celých čísel, ktoré majú medzi svojimi prvými desiatimi členmi obe čísla* 1 *a* 2 005. (*V. Bálint, J. Šimša*)

Riešenie. Zaoberajme sa otázkou, pre ktoré celočíselné aritmetické postupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ existujú indexy $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$ také, že $a_i = 1$ a $a_j = 2\,005$. Zdôraznime, že ak taká dvojica indexov (i, j) existuje, potom je jediná, pretože v nekonštantnej aritmetickej postupnosti sa každé číslo vyskytuje najviac raz.

Predpokladajme, že uvedené indexy i a j poznáme a pomocou nich vyjadrime prvý člen a_1 a diferenciu d príslušnej postupnosti. Pretože všeobecný člen aritmetickej postupnosti má vyjadrenie $a_k = a_1 + (k-1)d$, dostávame sústavu rovníc

$$a_i = a_1 + (i-1)d = 1 \qquad \text{a} \qquad a_j = a_1 + (j-1)d = 2\,005,$$

ktorú ľahko vyriešime vzhľadom na neznáme a_1, d:

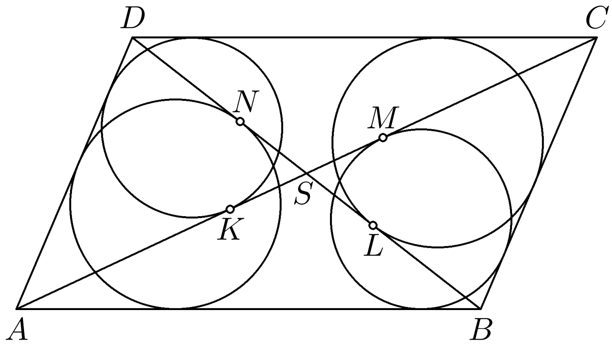
$$d = \frac{2\,004}{j-i} \quad \text{a} \quad a_1 = 1 - \frac{2\,004(i-1)}{j-i}.$$

Také hodnoty a_1, d sú celé čísla práve vtedy, keď je prirodzené číslo $|j-i|$ deliteľom čísla 2 004, takže $|j-i|$ musí byť jedno z čísel 1, 2, 3, 4 alebo 6 (z podmienky $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$ totiž vyplýva $|j-i| < 10$ a číslo 2 004 iné jednomiestne delitele nemá). Hľadaný počet postupností je preto rovný počtu dvojíc indexov (i, j) vybraných z množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$, pre ktoré platí $|j-i| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Takých dvojíc (i, j) je postupne $2 \cdot 9$, $2 \cdot 8$, $2 \cdot 7$, $2 \cdot 6$ a $2 \cdot 4$, takže všetkých postupností je $18 + 16 + 14 + 12 + 8 = 68$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za také považujte aj riešenie, v ktorom nie je výslovne uvedené, že v danej aritmetickej postupnosti sú podmienkami $a_i = 1$, $a_j = 2\,005$ indexy i, j určené jednoznačne. Ak riešiteľ určí správne počet 34 postupností s kladnou diferenciou d, ale možnosť $d < 0$ nespomenie, strhnite 2 body.

2. *V rovnobežníku ABCD platí $|AB| > |BC|$. Označme K, L, M a N postupne body dotyku kružníc vpísaných trojuholníkom ACD, BCD, ABC a ABD s príslušnou uhlopriečkou AC, resp. BD. Dokážte, že KLMN je obdĺžnik.* (*R. Horenský*)

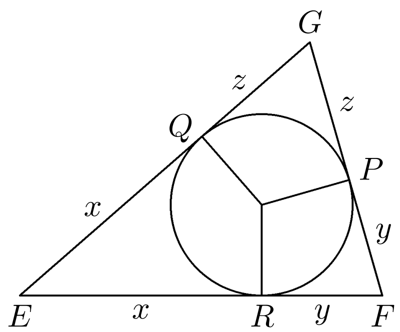
Riešenie. Rovnobežník $ABCD$ je stredovo súmerný podľa priesečníka S uhlopriečok AC, BD (obr. 1). Preto sú podľa stredu S súmerne združené trojuholníky ACD a CAB, a teda aj ich vpísané kružnice a zodpovedajúce si body dotyku K a M. To isté platí



Obr. 1

aj pre dvojicu bodov L a N. Prichádzame tak k záveru, že $KLMN$ je rovnobežník. (Možnosti $K = M = S$ alebo $L = N = S$ vylučuje podmienka $|AB| > |BC|$, ktorá zabezpečuje, že spomenuté trojuholníky nie sú rovnoramenné so základňou AC alebo BD, takže vpísané kružnice sa nedotýkajú týchto strán v ich strede.)

Uvedená úvaha o stredovej súmernosti však nestačí na dôkaz toho, že rovnobežník $KLMN$ je obdĺžnik, t. j. že má zhodné uhlopriečky KM a LN. Na to musíme urobiť výpočet založený na známych vzťahoch, ktoré vyjadrujú vzdialenosti vrcholov všeobecného trojuholníka od bodov dotyku vpísanej kružnice pomocou dĺžok strán tohto trojuholníka (obr. 2).



Obr. 2

$$x = |ER| = |EQ| = \frac{|EF| + |EG| - |FG|}{2},$$
$$y = |FP| = |FR| = \frac{|FG| + |FE| - |EG|}{2},$$
$$z = |GP| = |GQ| = \frac{|GF| + |GE| - |EF|}{2}.$$

Pripomeňme, že tieto vzťahy možno odvodiť zo sústavy rovníc

$$x + y = |EF|, \quad y + z = |FG|, \quad x + z = |EG|.$$

Vráťme sa k našej úlohe a v danom štvoruholníku $ABCD$ označme ešte dĺžky $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |AD|$, $e = |AC|$ a $f = |BD|$. Podľa vzťahov uvedených vedľa obr. 2 platia rovnosti

$$|AK| = \frac{e + b - a}{2} = |CM| \qquad \text{a} \qquad |BL| = \frac{f + b - a}{2} = |DN|.$$

Z predpokladu úlohy $a > b$ preto vyplýva $|AK| < e/2 = |AS|$, takže bod K leží medzi bodmi A a S a má od stredu S vzdialenosť

$$|KS| = |AS| - |AK| = \frac{e}{2} - \frac{e + b - a}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

Podobne vyjde, že body L, M, N ležia postupne na úsečkách BS, CS, DS a platia rovnosti $|LS| = |MS| = |NS| = (a - b)/2$. To spolu znamená, že štvoruholník $KLMN$ má zhodné uhlopriečky, ktoré se navzájom rozpoľujú, a teda je to obdĺžnik. (Keby to bol štvorec, muselo by platiť $KM \perp LN$, teda $AC \perp BD$, čo je v spore s tým, že $a \neq b$.)

Dodajme, že v predchádzajúcom odstavci sme podali úplné riešenie, ktoré nevyžaduje úvahy o stredovej súmernosti z úvodného odstavca.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov (absenciu zdôvodnenia, prečo pravouholník $KLMN$ nie je štvorec, tolerujte). Ak riešiteľ dokáže iba to, že $KLMN$ je rovnobežník, dajte mu 2 body. Ak v inak úplnom riešení chýba potrebné zdôvodnenie, v ktorých „poloviciach“ uhlopriečok AC, BD body K, L, M, N ležia, dajte 5 bodov.

3. *Zistite, pre ktoré prirodzené čísla k má sústava nerovníc*

$$k(k-2) \leqq \Big(k + \frac{1}{k}\Big)x \leqq k^2(k+3)$$

s neznámou x práve $(k+1)^2$ *riešení v obore celých čísel.* (J. Šimša)

Riešenie. Po vydelení (kladným) číslom $k + 1/k$ a úprave zlomkov dostaneme ekvivalentnú sústavu nerovníc

$$\frac{k^2(k-2)}{k^2+1} \leqq x \leqq \frac{k^3(k+3)}{k^2+1}. \tag{1}$$

Pre $k = 1$ má táto sústava tvar $-1/2 \leqq x \leqq 2$, takže má v celých číslach práve tri riešenia, čo je menej ako $(1+1)^2 = 4$. Teda $k = 1$ nevyhovuje. Dosadením hodnôt $k = 2$, $k = 3$ ľahko zistíme, že obe vyhovujú. Pokúsme sa preto zistiť, či okrem $k = 1$ nebudú vyhovovať všetky hodnoty.

Aby sme určili, medzi ktorými celými číslami ležia oba zlomky z (1), vydelíme najskôr (so zvyškom) mnohočleny z ich čitateľov mnohočlenom z menovateľa.

$$\begin{aligned} (k^3 - 2k^2) : (k^2+1) &= k-2, &&\text{zvyšok } -k+2,\\ (k^4 + 3k^3) : (k^2+1) &= k^2+3k-1, &&\text{zvyšok } -3k+1. \end{aligned}$$

Oba výsledky delenia dosadíme do (1).

$$k - 2 - \frac{k-2}{k^2+1} \leqq x \leqq k^2 + 3k - 1 - \frac{3k-1}{k^2+1}. \tag{2}$$

Ak pre „zvyškové členy“ z oboch krajných výrazov budú platiť nerovnosti

$$0 \leqq \frac{k-2}{k^2+1} < 1 \qquad \text{a} \qquad 0 < \frac{3k-1}{k^2+1} \leqq 1, \tag{3}$$

budú riešeniami sústavy (1) práve tie celé čísla x, pre ktoré platí $k-2 \leqq x \leqq k^2+3k-2$. Takých x je

$$(k^2+3k-2) - (k-2) + 1 = (k+1)^2,$$

čo je práve počet uvedený v zadaní úlohy.

Ľahko zdôvodníme, že nerovnosti (3) platia pre každé $k \geqq 2$. Vtedy totiž máme $0 \leqq k-2 < k+1 < k^2+1$, odkiaľ vyplýva ľavá časť (3). Pravá časť (3) je zrejmá pre každé $k \geqq 3$ (lebo vtedy $0 < 3k-1 \leqq k^2-1 < k^2+1$); pre $k = 2$ platí $3k-1 = 5 = k^2+1$, takže v (3) úplne napravo nastane rovnosť.

Záver. Hľadanými k sú všetky prirodzené čísla väčšie ako 1.

Poznámka. Presný počet celých čísel x, ktoré ležia v intervale (1), nemožno určit len z *dĺžky* tohto intervalu, lebo ani táto dĺžka, ani žiadny z krajných bodov intervalu nie je celé číslo. Nie je ťažké overiť ekvivalentnými úpravami, že pre dĺžku intervalu (1) pri každom $k > 2$ platia nerovnosti

$$(k+1)^2 - 1 < \frac{k^3(k+3)}{k^2+1} - \frac{k^2(k-2)}{k^2+1} < (k+1)^2. \tag{4}$$

Z nich však vyplýva iba to, že počet celých čísel v intervale (1) je rovný buď číslu $(k+1)^2-1$, alebo číslu $(k+1)^2$. K presnému určeniu tohto počtu sa zdá byť nevyhnutné určiť najmenšie celé číslo $(k-2)$ a najväčšie celé číslo (k^2+3k-2), ktoré v danom intervale ležia.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za určenie intervalu (1), 3 body za rozklady (2) a 2 body za diskusiu o nerovnostiach (3). Ak riešiteľ určí interval (1) a ďalej len dokáže, medzi ktorými celými číslami leží jeho *dĺžka* (nerovnosti (4)), dajte celkom 4 body.