2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Ak je súčin kladných reálnych čísel a, b, c rovný 1, platí nerovnosť*

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geqq\frac{3}{4}.$$

Dokážte a zistite, kedy nastáva rovnosť. (J. Šimša)

Riešenie. Po vynásobení kladným číslom $4(a+1)(b+1)(c+1)$ postupnými ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}4a(c+1)+4b(a+1)+4c(b+1)&\geqq 3(a+1)(b+1)(c+1),\\ 4(ac+c)+4(ab+b)+4(bc+c)&\geqq 3(ab+a+b+1)(c+1),\\ 4(ab+ac+bc+a+b+c)&\geqq 3(abc+ab+ac+bc+a+b+c+1),\\ ab+ac+bc+a+b+c&\geqq 3(abc+1).\end{aligned}$$

Pretože $abc=1$, dostaneme po dosadení do pravej strany poslednej nerovnosti nerovnosť

$$ab+ac+bc+a+b+c\geqq 6. \tag{1}$$

Ak ešte dosadíme do ľavej strany $ab=1/c$, $ac=1/b$ a $bc=1/a$, dostaneme nerovnosť

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\geqq 6,$$

ktorá platí, lebo hodnota každej zátvorky na ľavej strane je aspoň 2. Pre každé $t>0$ je totiž splnená nerovnosť $t+t^{-1}\geqq 2$, v ktorej nastane rovnosť práve vtedy, keď $t=1$. (Tento známy fakt možno zdôvodniť napr. úpravou nerovnosti $(\sqrt{t}-\sqrt{t^{-1}})^2\geqq 0$, alebo sa možno odvolať na nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch navzájom prevrátených čísel.) Zároveň vidíme, že rovnosť v nerovnosti (1), a teda aj v nerovnosti z textu úlohy, nastane práve vtedy, keď platí $a=b=c=1$. Tým je riešenie celej úlohy ukončené.

Poznámka. Dodajme, že za predpokladu $abc=1$ nerovnosť (1) vyplýva priamo z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom šestice čísel ab, ac, bc, a, b, c:

$$\frac{ab+ac+bc+a+b+c}{6}\geqq\sqrt[6]{ab\cdot ac\cdot bc\cdot a\cdot b\cdot c}=\sqrt{abc}=1.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ získa ekvivalentnú nerovnosť (1) alebo eliminuje jednu z premenných a, b, c, avšak ďalší pokrok nedosiahne, dajte najviac 2 body. Ak podmienka rovnosti $a=b=c=1$ v riešení chýba alebo nie je zdôvodnená, dajte najviac 5 bodov. Za poznatok o rovnosti v prípade $a=b=c=1$ dajte 1 bod len v prípade, že riešiteľ nezíska žiadne iné čiastkové body. Známu nerovnosť $t+t^{-1}\geqq 2$ je možné použiť v riešení bez dôkazu.

2. *V obore celých čísel riešte sústavu rovníc*

$$
\begin{aligned}
x(y+z+1) &= y^2+z^2-5,\\
y(z+x+1) &= z^2+x^2-5,\\
z(x+y+1) &= x^2+y^2-5.
\end{aligned}
$$

(*J. Šimša*)

Riešenie. Keď odčítame od prvej rovnice druhú, dostaneme postupnými úpravami

$$
\begin{aligned}
(xy+xz+x)-(yz+xy+y) &= (y^2+z^2-5)-(z^2+x^2-5),\\
(x-y)z+x-y &= (y-x)(y+x),\\
(x-y)(x+y+z+1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Analogicky odvodíme rovnosti

$$(y-z)(x+y+z+1)=0 \quad \text{a} \quad (x-z)(x+y+z+1)=0. \tag{1}$$

Vo všetkých troch odvodených rovnostiach vystupuje činiteľ $x+y+z+1$. Rozlíšime preto, či je rovný nule, alebo nie.

A. Nech $x+y+z+1=0$. Potom môžeme pôvodnú sústavu rovníc prepísať na

$$x\cdot(-x)=y^2+z^2-5,\quad y\cdot(-y)=z^2+x^2-5,\quad z\cdot(-z)=x^2+y^2-5.$$

Vidíme, že sústava je ekvivalentná s jedinou rovnicou $x^2+y^2+z^2=5$, ktorá (vzhľadom k nezápornosti druhých mocnín) má v obore celých čísel iba také riešenia, že trojica (x^2,y^2,z^2) je (až na poradie) trojicou $(4,1,0)$, takže (x,y,z) je permutácia niektorej z trojíc $(\pm2,\pm1,0)$. Znamienka čísel x, y, z ľahko určíme z podmienky $x+y+z+1=$ $=0$ – vyhovuje jedine trojica $(-2,1,0)$ a ľubovoľná jej permutácia. V prípade A teda dostávame práve šesť riešení danej sústavy.

B. Nech $x+y+z+1\neq0$. Potom z rovníc odvodených v úvode riešenia vyplýva, že platí $x=y=z$. Daná sústava je teda ekvivalentná s jedinou rovnicou $x(2x+$ $+1)=2x^2-5$, ktorej vyhovuje iba $x=-5$. V prípade B preto máme jediné riešenie $x=y=z=-5$.

Dodajme, že v prvej časti riešenia sme mohli pôvodnú sústavu rovníc upraviť aj na tvar

$$x^2+y^2+z^2-5=x(x+y+z+1)=y(x+y+z+1)=z(x+y+z+1). \tag{2}$$

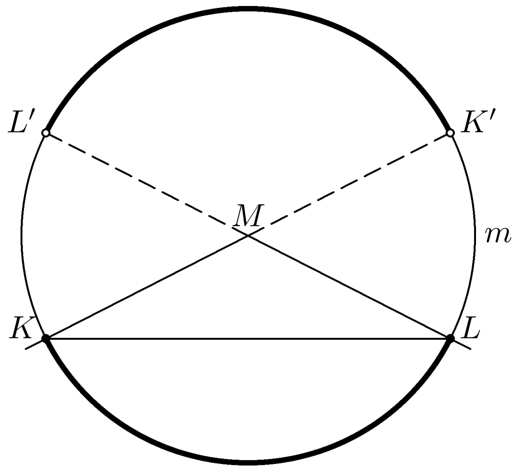
Odtiaľ opäť dostávame, že platí buď $x+y+z+1=0$, alebo $x=y=z$.

Odpoveď. Sústava má sedem riešení – trojicu $(-5,-5,-5)$, trojicu $(-2,1,0)$ a jej ľubovoľnú permutáciu.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ pôvodné rovnice vhodne odčíta, avšak nedokáže výsledok rozložiť do súčinového tvaru (1), dajte 1 bod, za nájdenie rozkladov (1) alebo sústavy (2) dajte 3 body, ďalšie body dajte podľa úplnosti následnej diskusie. Zrejmý poznatok o riešení rovnice $x^2+y^2+z^2=5$ v obore celých čísel a následné určenie znamienok v rovnosti $\pm2\pm1+0+1=0$ môžu byť uvedené bez vysvetlenia.

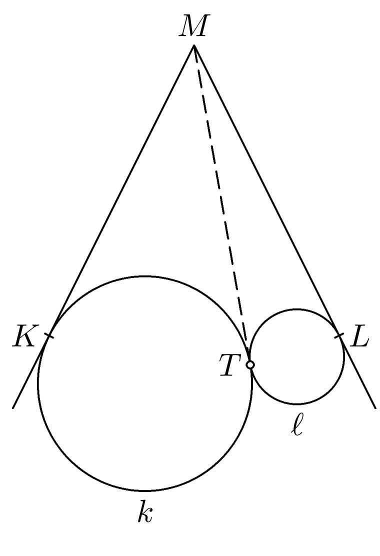
3. *V rovine je daný rovnoramenný trojuholník KLM so základňou KL. Uvažujme ľubovoľné dve kružnice k a ℓ, ktoré majú vonkajší dotyk a ktoré sa dotýkajú priamok KM a LM postupne v bodoch K a L. Určte množinu dotykových bodov T všetkých takých kružníc k a ℓ.* (J. Švrček)

Riešenie. Ukážeme, že hľadanú množinu tvoria body K a L a ďalej vnútorné body kratšieho oblúka KL kružnice $m(M, |MK|)$ a oblúka $K'L'$ súmerne združeného s oblúkom KL v stredovej súmernosti podľa stredu M (obr. 1).



Obr. 1

Dokážme najskôr, že priamka MT (obr. 2) je (vnútornou) spoločnou dotyčnicou kružníc k a ℓ. Pripusťme, že priamka MT pretne kružnicu k v bodoch T, T_1 a kružnicu ℓ



Obr. 2

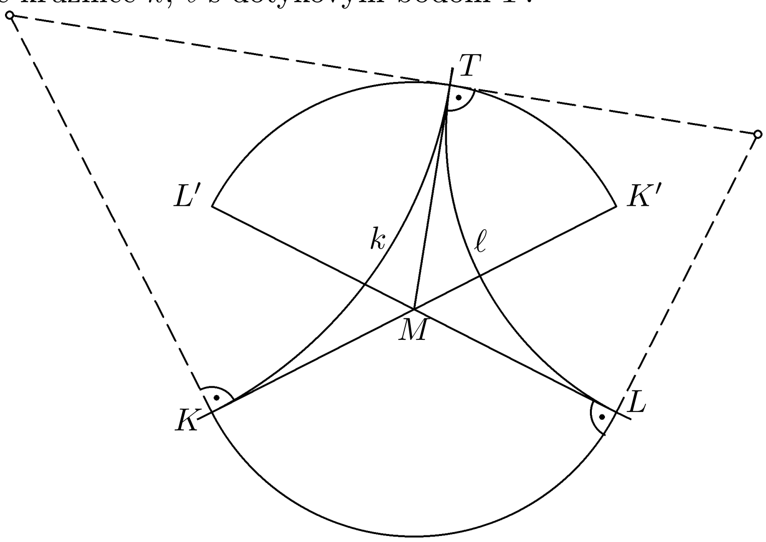
v bodoch T, T_2. Pre mocnosti bodu M (je to bod dotyčnice, preto leží vo vonkajšej oblasti každej z oboch kružníc k a ℓ) k obom kružniciam platí

$$|MT| \cdot |MT_1| = |MK|^2 = |ML|^2 = |MT| \cdot |MT_2|,$$

odkiaľ $|MT_1| = |MT_2|$. Pretože oba body T_1, T_2 ležia na polpriamke MT, vyplýva odtiaľ $T_1 = T_2$. Obe kružnice k a ℓ však majú spoločný jediný bod, takže $T_1 = T_2 = T$. Preto je MT spoločná dotyčnica oboch kružníc a navyše $|MT| = |MK| = |ML|$, bod T teda leží na kružnici $m(M, |MK|)$.

Pretože priamka MT obe kružnice oddeľuje, neležia body K a L vnútri tej istej polroviny určenej priamkou MT. Priamka MT pretína stranu KL trojuholníka KLM, a preto bod T leží na jednom z kratších oblúkov KL, $K'L'$ kružnice m.

Ak je naopak T ľubovoľný vnútorný bod jedného z týchto oblúkov (obr. 3), ležia konvexné uhly KMT a LMT na opačných stranách spoločného ramena MT. Z rovností $|MK| = |MT|$ a $|ML| = |MT|$ potom vyplýva, že do spomenutých uhlov možno vpísať kružnice tak, aby sa dotkli ramien príslušného uhla v bodoch K a T, resp. L a T. To sú vyhovujúce kružnice k, ℓ s dotykovým bodom T.



Obr. 3

Ak $T = K$, vyhovuje ľubovoľná kružnica k dotýkajúca sa priamky MK v bode K a ležiaca v polrovine MKL' a kružnica ℓ dotýkajúca sa ramien uhla KML v bodoch K a L (tá je určená jednoznačne). Analogicky zostrojíme vyhovujúce kružnice k a ℓ pre bod $T = L$.

Bod K' ani bod L' do hľadanej množiny patriť nemôžu, pretože K' leží na dotyčnici KM k ľubovoľnej z kružníc k a analogicky bod L' leží na dotyčnici LM k ľubovoľnej z kružníc ℓ.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ dokáže, že bod T leží na spomenutých oblúkoch, avšak neoverí, že naopak každý ich bod je bodom dotyku niektorej vyhovujúcej dvojice kružníc, strhnite 2 body. Pokiaľ riešiteľ nespomenie existenciu bodov T na oblúku $K'L'$, strhnite tiež 2 body. Pokiaľ riešiteľ zabudne aspoň na jednu z možností $T = K$, $T = L$, strhnite 1 bod.

---

4. *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých súčet má poslednú číslicu* 3*, rozdiel je prvočíslo a súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla.* (J. Földes)

Riešenie. Označme x a y hľadané čísla, pričom $x > y$. Pretože $p = x - y$ je prvočíslo a pre najväčší spoločný deliteľ d čísel x a y platí $d \mid (x - y)$, čiže $d \mid p$, platí buď $d = p$, alebo $d = 1$.

Keby platilo $d = p$, mali by sme $y = kp$ a $x = y + p = (k + 1)p$ pre vhodné prirodzené k, takže súčin xy by sa rovnal číslu $k(k + 1)p^2$. To ale nie je druhá mocnina prirodzeného čísla (ďalej stručnejšie „štvorec“) pre žiadne k, lebo číslo $k(k+1)$ nie je nikdy štvorec.[1] Preto nutne $d = 1$, takže čísla x a y sú nesúdeliteľné. Ich súčin xy je potom štvorcom jedine v prípade, keď oba činitele sú štvorce, teda $x = u^2$ a $y = v^2$ pre vhodné $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$, odkiaľ $p = x - y = (u - v)(u + v)$. Taký rozklad prvočísla p na súčin má jediné možné činitele $u - v = 1$ a $u + v = p$. Odtiaľ jednoducho vyplývajú rovnosti $u = (p+1)/2$ a $v = (p-1)/2$, z ktorých pre súčet $s = x + y$ získame vyjadrenie

$$s = x + y = u^2 + v^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2}.$$

Dekadický zápis čísla s podľa zadania končí číslicou 3, takže zápis čísla $p^2 + 1$ (rovného číslu $2s$) končí číslicou 6. Zápis čísla p^2 preto končí číslicou 5, je teda násobkom piatich, čo nastane jedine pre prvočíslo $p = 5$. Dosadením tejto hodnoty do odvodených vzťahov dostaneme $u = 3$, $v = 2$, $x = 9$ a $y = 4$. Skúška je triviálna: $9 - 4 = 5$, $9 + 4 = 13$, $9 \cdot 4 = 6^2$.

Odpoveď. Podmienkam úlohy vyhovuje jediná dvojica čísel 9 a 4.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za zdôvodnenie, že hľadané čísla x a y sú nesúdeliteľné, dajte 2 body, 1 bod dajte za konštatovanie, že z nesúdeliteľnosti čísel x, y vyplýva vyjadrenie $x = u^2$ a $y = v^2$, 1 bod za zdôvodnenie vzťahu $u - v = 1$ a konečne 2 body za diskusiu o deliteľnosti číslom 5 vedúcu k určeniu hodnoty prvočísla $p = 5$. Ak riešiteľ nezíska žiadne čiastkové body za vyššie uvedené položky, avšak uhádne výsledok, dajte 1 bod. Zrejmý poznatok, že číslo $k(k+1)$ nie je štvorec, je možné použiť bez dôkazu. Pokiaľ ale chýba akákoľvek zmienka o nutnosti skúšky, dajte najviac 5 bodov.

[1] Platí totiž $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2$, takže číslo $k(k+1)$ leží medzi dvoma susednými štvorcami. Iné vysvetlenie možno založiť na tom, že čísla k, $k+1$ sú navzájom nesúdeliteľné, takže by obe museli byť štvorcami líšiacimi sa o 1. Také štvorce však neexistujú.