2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

1. *Uvažujme ľubovoľné aritmetické postupnosti reálnych čísel $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, ktoré majú rovnaký prvý člen a spĺňajú pre niektoré $k > 1$ rovnosti*

$$x_{k-1}y_{k-1} = 42, \quad x_k y_k = 30 \quad \text{a} \quad x_{k+1}y_{k+1} = 16.$$

Nájdite všetky také postupnosti, pre ktoré je index k najväčší možný. (J. Šimša)

Riešenie. Označme c, resp. d diferencie hľadaných postupností. Z vyjadrenia $x_i = x_1 + (i-1)c$ a $y_i = x_1 + (i-1)d$ dostaneme pre každé i rovnosť

$$x_i y_i = x_1^2 + (i-1)x_1(c+d) + (i-1)^2 cd.$$

Budeme sa teda zaoberať otázkou, kedy pre niektorý index $k > 1$ platia rovnosti

$$x_1^2 + (k-2)x_1(c+d) + (k-2)^2 cd = 42, \tag{1}$$
$$x_1^2 + (k-1)x_1(c+d) + (k-1)^2 cd = 30, \tag{2}$$
$$x_1^2 + kx_1(c+d) + k^2 cd = 16. \tag{3}$$

Keď odčítame od dvojnásobku rovnosti (2) súčet rovností (1) a (3), dostaneme po úprave rovnosť $cd = -1$. Keď odčítame od rovnosti (3) rovnosť (2), získame vzťah

$$x_1(c+d) + (2k-1)cd = 14,$$

z ktorého po dosadení hodnoty $cd = -1$ dôjdeme k rovnosti

$$x_1(c+d) = 2k - 15. \tag{4}$$

Dosadením tohto výsledku do rovnice (3) dostaneme vzťah

$$x_1^2 + k(2k-15) - k^2 = 16,$$

z ktorého vyjadríme x_1^2 ako kvadratickú funkciu indexu k:

$$x_1^2 = 16 - k(2k-15) + k^2 = 16 + 15k - k^2 = (k+1)(16-k).$$

Pretože $x_1^2 \geqq 0$ a $k > 1$, vyplýva z posledného vzťahu odhad $k \leqq 16$. V prípade $k = 16$ však vychádza $x_1 = 0$ a rovnosť (4) tak prejde na tvar $0(c+d) = 2$, čo nie je možné. Pre $k = 15$ dostaneme $x_1^2 = 16$, takže $x_1 = \pm 4$. Pre $x_1 = 4$ (a $k = 15$) z (4) vyplýva $c + d = 15/4$, čo spolu s rovnosťou $cd = -1$ vedie k záveru, že $\{c, d\} = \{4, -1/4\}$. To znamená, že obe postupnosti sú (až na poradie) určené vzťahmi

$$x_i = 4 + (i-1)4 \quad \text{a} \quad y_i = 4 - \frac{i-1}{4} \quad \text{pre každé } i. \tag{5}$$

Pre takú dvojicu postupností naozaj platí

$$x_{14}y_{14} = 56 \cdot \tfrac{3}{4} = 42, \quad x_{15}y_{15} = 60 \cdot \tfrac{1}{2} = 30 \quad \text{a} \quad x_{16}y_{16} = 64 \cdot \tfrac{1}{4} = 16.$$

Podobne pre druhú možnú hodnotu $x_1 = -4$ dostaneme postupnosti, ktorých členy sú opačné k členom postupností (5), teda postupnosti

$$x_i = -4 - (i-1)4 \quad \text{a} \quad y_i = -4 + \frac{i-1}{4} \quad \text{pre každé } i. \tag{6}$$

Odpoveď. Najväčšia hodnota indexu k je 15 a všetky vyhovujúce postupnosti sú (až na možnú zámenu poradia vo dvojici) určené vzťahmi (5) a (6).

2. *Zistite, pre ktoré m existuje práve 2^{15} podmnožín X množiny $\{1,2,3,\dots,47\}$ s vlastnosťou: Číslo m je najmenší prvok množiny X a pre každé $x \in \mathsf{X}$ platí buď $x+m \in \mathsf{X}$, alebo $x+m > 47$.* (*R. Kučera*)

Riešenie. Najprv v závislosti od daného čísla m ($1 \leqq m \leqq 47$) vyjadríme, koľko množín X popísanej vlastnosti má najmenší prvok rovný zvolenému číslu m. Na to vydelíme číslo 47 číslom m so zvyškom,

$$47 = qm + r \quad (q \geqq 1,\ 0 \leqq r < m),$$

a ukážeme, že existuje práve $(q+1)^r q^{m-1-r}$ vyhovujúcich množín X s najmenším prvkom m. Pretože každá taká množina X je podmnožinou množiny

$$\mathsf{T}_m = \{m, m+1, \dots, 47\},$$

rozdelíme množinu T_m na najviac m skupín čísel tak, aby sa čísla v rovnakej skupine navzájom líšili o násobky čísla m. Dostaneme tak q-prvkovú skupinu

$$\mathsf{P}_0 = \{m, 2m, \dots, qm\},$$

v prípade $r > 0$ ďalších r skupín s q prvkami

$$\mathsf{P}_i = \{m+i, 2m+i, \dots, qm+i\} \quad (1 \leqq i \leqq r),$$

a v prípade $r < m-1$ a $q > 1$ ešte $m-r-1$ skupín s $q-1$ prvkami

$$\mathsf{P}_i = \{m+i, 2m+i, \dots, (q-1)m+i\} \quad (r+1 \leqq i \leqq m-1).$$

Vo všeobecnosti možno povedať, že každú skupinu P_i tvoria práve tie čísla z T_m, ktoré pri delení číslom m dávajú zvyšok i; ako sme uviedli, niektoré z týchto m skupín $\mathsf{P}_0, \dots, \mathsf{P}_{m-1}$ môžu byť prázdne.

Množina $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{T}_m = \mathsf{P}_0 \cup \mathsf{P}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{P}_{m-1}$ s najmenším prvkom m má zrejme požadovanú vlastnosť práve vtedy, keď obsahuje celú skupinu P_0 a zároveň pre každé $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ buď neobsahuje žiadny prvok z P_i, alebo obsahuje všetky prvky z P_i *od určitého prvku počnúc*. Pre každú z r skupín $\mathsf{P}_1, \dots, \mathsf{P}_r$ tak máme $q+1$ možností a pre každú z $m-r-1$ skupín $\mathsf{P}_{r+1}, \dots, \mathsf{P}_{m-1}$ máme q možností, ako vybrať prvky pre X. Pretože tieto výbery môžeme kombinovať nezávisle, je počet množín X naozaj rovný číslu $(q+1)^r q^{m-1-r}$. (Platí to aj pre prípady $r = 0$, $r = m-1$ alebo $q = 1$, keď niektoré zo skupín P_i sú prázdne.)

Teraz zistíme, kedy pre neúplný podiel q a zvyšok r z rovnosti $47 = qm + r$ platí

$$(q+1)^r q^{m-1-r} = 2^{15}. \tag{1}$$

V prípade $q = 1$ dostávame z (1) rovnosť $2^r = 2^{15}$, odkiaľ $r = 15$, a z rovnosti $47 = m + r$ potom vychádza $m = 32$.

V prípade $q > 1$ musí byť v rovnici (1) jedna z mocnín $(q+1)^r$, q^{m-1-r} rovná 2^{15} a druhá rovná jednej, teda musí mať nulový exponent. Rozoberieme teraz možné hodnoty $q > 1$ v rastúcom poradí a pri každej z nich overíme, či príslušné riešenie rovnice (1) spĺňa podmienku $47 = qm + r$:

a) $q = 2^1$, $m - 1 - r = 15$ a $r = 0$. Potom $m = 16$ a $qm + r = 32$ – nevyhovuje.

b) $q = 2^3 - 1$, $r = 5$ a $m - 1 - r = 0$. Potom $m = 6$ a $qm + r = 47$ – vyhovuje.

c) $q = 2^3$, $m - 1 - r = 5$ a $r = 0$. Potom $m = 6$ a $qm + r = 48$ – nevyhovuje.

Z podmienky $47 = qm + r$ vyplýva, že najväčšie možné hodnoty q sú 47 (pre $m = 1$) a 23 (pre $m = 2$). Zostávajúce možnosti ($q = 2^5 - 1$, $q = 2^5$, $q = 2^{15} - 1$, $q = 2^{15}$) už preto nie je nutné detailne preberať.

Odpoveď. Hľadané hodnoty m sú dve: $m = 6$ a $m = 32$.

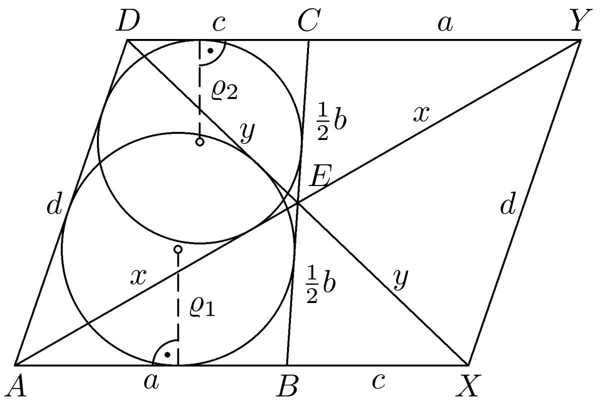
---

3. *V lichobežníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) označme E stred ramena BC. Ak sú oba štvoruholníky $ABED$ a $AECD$ dotyčnicové, spĺňajú dĺžky strán lichobežníka $ABCD$ označené zvyčajným spôsobom rovnosti*

$$a + c = \frac{b}{3} + d \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

Dokážte. (*R. Horenský*)

Riešenie. Označme $x = |AE|$, $y = |DE|$ a doplňme lichobežník $ABCD$ na rovnobežník $AXYD$ tak, aby bod E bol priesečníkom jeho uhlopriečok AY a DX (obr. 1). Zrejme platí $|AX| = |DY| = a + c$, $|AY| = 2x$ a $|DX| = 2y$.



Obr. 1

Označme ϱ_1 (resp. ϱ_2) polomer kružnice vpísanej dotyčnicovému štvoruholníku $ABED$ (resp. $AECD$), ktorá je zároveň vpísaná trojuholníku AXD (resp. AYD). Pre dĺžky strán týchto štvoruholníkov podľa známeho kritéria platia rovnosti

$$a + y = \frac{b}{2} + d = c + x,$$

čiže

$$a + y = c + x, \tag{1}$$

takže oba štvoruholníky majú rovnaký obvod. Trojuholníky AXD a AYD majú zasa rovnaký obsah (rovný $S_{AXYD}/2$, teda rovný S_{ABCD}). Pomer $\varrho_1 : \varrho_2$ sa preto rovná jednak pomeru obsahov $S_{ABED} : S_{AECD}$, jednak pomeru obvodov $o_{AYD} : o_{AXD}$

(tie sme zapísali v opačnom poradí ako príslušné polomery). Oba tieto pomery teraz vyjadríme a potom porovnáme (v označuje výšku lichobežníka $ABCD$):

$$\frac{S_{ABED}}{S_{AECD}} = \frac{S_{ABCD} - S_{CDE}}{S_{ABCD} - S_{ABE}} = \frac{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}v}{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}v} = \frac{2a+c}{a+2c},$$
$$\frac{o_{AYD}}{o_{AXD}} = \frac{2x + (a+c) + d}{2y + (a+c) + d}.$$

Spolu s (1) tak pre neznáme x, y dostávame sústavu lineárnych rovníc

$$\frac{2a+c}{a+2c} = \frac{2x+a+c+d}{2y+a+c+d} \qquad \text{a} \qquad x - y = a - c,$$

ktorá má pri podmienke $a \neq c$ (zaručenej tým, že $ABCD$ je *licho*bežník) jediné riešenie

$$x = \frac{3a+c-d}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{a+3c-d}{2}. \tag{2}$$

Dosadením (2) do rovnosti (1) dostaneme prvý dokazovaný vzťah $3(a+c) = b + 3d$. S jeho pomocou možno (2) prepísať do tvaru

$$x = a + \frac{b}{6} \qquad \text{a} \qquad y = c + \frac{b}{6}.$$

S týmto vyjadrením dĺžok x, y využijeme kosínusové vety pre trojuholníky ABE, CDE k výpočtu kosínusu uhla ABE resp. DCE:

$$\cos|\measuredangle ABE| = \frac{a^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (a + \frac{1}{6}b)^2}{2a \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9a} - \frac{1}{3},$$
$$\cos|\measuredangle DCE| = \frac{c^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (c + \frac{1}{6}b)^2}{2c \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}.$$

Pretože sa uhly ABE a DCE dopĺňajú do $180°$, je súčet ich kosínusov rovný nule:

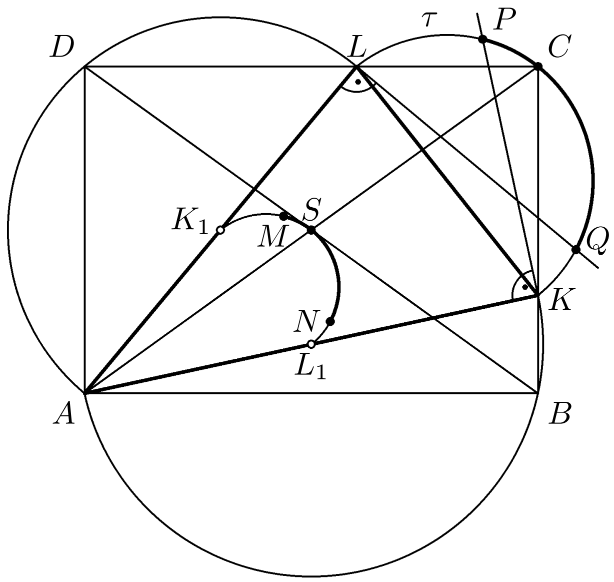
$$\left(\frac{2b}{9a} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Odtiaľ už jednoduchou úpravou dostaneme druhý dokazovaný vzťah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

4. *V rovine je daný ostrouhlý trojuholník AKL. Uvažujme ľubovoľný pravouholník $ABCD$, ktorý je trojuholníku AKL opísaný tak, že bod K leží na strane BC a bod L leží na strane CD. Určte množinu priesečníkov S uhlopriečok AC, BD všetkých takých pravouholníkov $ABCD$.* (J. Šimša)

Riešenie. Označme K_1 stred strany AL a L_1 stred strany AK. Ukážeme, že hľadanou množinou bodov S je oblúk MN, ktorý je časťou polkružnice zostrojenej nad priemerom K_1L_1 v polrovine opačnej k polrovine K_1L_1A, pritom krajné body M, N spomenutého oblúka sú určené podmienkami $ML_1 \perp AK$ a $NK_1 \perp AL$ (obr. 2).



Obr. 2

Pretože priesečník S uhlopriečok AC, BD je stredom úsečky AC, množinu všetkých bodov S dostaneme, keď najprv určíme množinu vrcholov C a tú potom zobrazíme v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom $1/2$. Pretože uhol KCL je pravý (nemôže byť ani $C = K$, ani $C = L$) a priamka KL body A a C oddeľuje, leží bod C na polkružnici τ zostrojenej nad priemerom KL v polrovine opačnej k polrovine KLA. Ktoré body $C \in \tau$ sú skutočne vrcholy vyhovujúcich pravouholníkov $ABCD$? Zrejme práve tie, pre ktoré polpriamky CK a CL pretnú analogicky zostrojené polkružnice nad priemermi AK a AL (v bodoch, ktoré budú vrcholmi B a D). Sú to body oblúka $PQ \subset \tau$, ktorého krajné body P, Q sú určené podmienkami $PK \perp AK$ a $QL \perp AL$. Hľadaná množina bodov S je preto obrazom oblúka PQ v spomenutej rovnoľahlosti, takže to je naozaj oblúk MN opísaný v úvode riešenia (body M, N sú obrazmi bodov P a Q, lebo bod L_1 je obrazom bodu K a bod K_1 je obrazom bodu L).

5. *Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla p, q, r, s za podmienok $q \neq -1$ a $s \neq -1$ platí: Kvadratické rovnice*

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 + rx + s = 0$$

majú v obore reálnych čísel spoločný koreň a ich ďalšie korene sú navzájom prevrátené čísla práve vtedy, keď koeficienty p, q, r, s spĺňajú rovnosti

$$pr = (q+1)(s+1) \quad \text{a} \quad p(q+1)s = r(s+1)q.$$

(Dvojnásobný koreň kvadratickej rovnice počítame dvakrát.) (J. Šimša)

Riešenie. V prvej časti riešenia predpokladajme, že prvá z daných kvadratických rovníc má korene u, v a druhá z nich má korene u, v^{-1}. Potom platia vzťahy

$$p = -(u+v), \quad q = uv, \quad r = -\Big(u + \frac{1}{v}\Big), \quad s = u \cdot \frac{1}{v}. \tag{1}$$

Po ich dosadení do jednotlivých strán rovností, ktoré máme dokázať, dostaneme

$$\begin{aligned} pr &= \quad (u+v)\Big(u+\frac{1}{v}\Big) &&= \frac{(u+v)(uv+1)}{v}, \\ (q+1)(s+1) &= \quad (uv+1)\Big(\frac{u}{v}+1\Big) &&= \frac{(uv+1)(u+v)}{v}, \\ p(q+1)s &= -(u+v)(uv+1)\cdot\frac{u}{v} &&= -\frac{(u+v)(uv+1)u}{v}, \\ r(s+1)q &= -\Big(u+\frac{1}{v}\Big)\Big(\frac{u}{v}+1\Big)\cdot uv &&= -\frac{(uv+1)(u+v)u}{v}, \end{aligned}$$

takže vidíme, že naozaj platia rovnosti

$$pr = (q+1)(s+1) \quad \text{a} \quad p(q+1)s = r(s+1)q. \tag{2}$$

Všimnime si ešte, že rovnako platia rovnosti

$$-\frac{ps}{s+1} = \frac{(u+v)\cdot\dfrac{u}{v}}{\dfrac{u}{v}+1} = u \qquad \text{a} \qquad -\frac{p}{s+1} = \frac{u+v}{\dfrac{u}{v}+1} = v,$$

ktoré nám naznačujú, ako postupovať pri dôkaze opačnej implikácie.

V druhej časti riešenia predpokladajme, že čísla p, q, r, s spĺňajú rovnosti (2) a navyše platí $q \neq -1$ a $s \neq -1$. Z prvej rovnosti (2) potom vyplýva $p \neq 0$ a $r \neq 0$, takže rovnosti (2) možno upraviť na tvar

$$\frac{p}{s+1} = \frac{q+1}{r} \quad \text{a} \quad \frac{ps}{s+1} = \frac{rq}{q+1}. \tag{3}$$

Definujme reálne čísla u, v pomocou vzťahov

$$u = -\frac{ps}{s+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{p}{s+1}. \tag{4}$$

Potom platí $v \neq 0$ a podľa (4) možno rovnako písať

$$u = -\frac{rq}{q+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{q+1}{r}. \tag{5}$$

Ak overíme, že čísla u, v spĺňajú všetky štyri vzťahy (1), bude to znamenať, že (u,v) a (u,v^{-1}) sú dvojice koreňov kvadratických rovníc z textu úlohy a riešenie úlohy bude hotové. Podľa (4) a (5) je ale overenie vzťahov (1) ľahké:

$$\begin{aligned} -(u+v) &= \frac{ps}{s+1} + \frac{p}{s+1} = p, \\ uv &= \frac{-rq}{q+1} \cdot \frac{-(q+1)}{r} = q, \\ -\Big(u+\frac{1}{v}\Big) &= \frac{rq}{q+1} + \frac{r}{q+1} = r, \\ u \cdot \frac{1}{v} &= \frac{-ps}{s+1} \cdot \frac{-(s+1)}{p} = s. \end{aligned}$$

---

6. *Rozhodnite, či pre každé poradie čísel* $1, 2, 3, \ldots, 15$ *možno tieto čísla zapísať najviac štyrmi rôznymi farbami tak, aby všetky čísla rovnakej farby tvorili v danom poradí monotónnu (t. j. rastúcu alebo klesajúcu) postupnosť. (Jednočlenná postupnosť je monotónna.)* (J. Šimša)

Riešenie. Ukážeme, že požadovaným spôsobom nemožno ofarbiť pätnásticu čísel

$$\underbrace{5,4,3,2,1}_{\text{I}}, \underbrace{9,8,7,6}_{\text{II}}, \underbrace{12,11,10}_{\text{III}}, \underbrace{14,13}_{\text{IV}}, \underbrace{\ 15\ }_{\text{V}},$$

pod ktorou sme vyznačili rozdelenie na päť skupín susedných čísel (tvoriacich klesajúce postupnosti).

Pripusťme, že uvedenú pätnásticu sme zapísali štyrmi farbami tak, že čísla s rovnakou farbou tvoria monotónne postupnosti. V skupine I je päť čísel, dve z nich preto majú rovnakú farbu; pretože tvoria klesajúcu postupnosť, farbu týchto dvoch čísel nemá žiadne z čísel skupín II až V. V nich sú teda iba čísla troch farieb; farbu dvoch čísel zo skupiny II nemá žiadne z čísel skupín III až V, v ktorých sú teda iba čísla dvoch farieb. Ešte jedným opakovaním predchádzajúcej úvahy zistíme, že čísla 14, 13 a 15 zo skupín IV a V sú jednej farby, a to je spor.

Iné riešenie. Ukážeme, že požadovaným spôsobom nemožno ofarbiť pätnásticu čísel

$$\underbrace{6,9,4,5,8,7}_{\text{I}}, \underbrace{1,3,2}_{\text{II}}, \underbrace{13,15,14}_{\text{III}}, \underbrace{10,12,11}_{\text{IV}},$$

pod ktorou sme vyznačili rozdelenie na štyri skupiny susedných čísel.

Pripusťme, že uvedenú pätnásticu sme zapísali štyrmi farbami tak, že čísla s rovnakou farbou tvoria monotónne postupnosti. Vyskúšaním možno ľahko overiť, že v skupine I musia byť použité aspoň 3 farby. Zrejme v každej zo skupín II, III a IV musia byť použité aspoň 2 farby. Z Dirichletovho princípu potom vyplýva, že niektorá farba je použitá v troch skupinách. A to je spor, pretože neexistuje monotónna postupnosť troch čísel, z ktorých je každé v inej skupine.