2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc*

$$x^2 + ax + b = 0, \qquad x^2 + (2a + 1)x + 2b + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom korene druhej rovnice sú prevrátenými hodnotami koreňov prvej rovnice. (*E. Kováč*)

Riešenie. Nech x_1, x_2 sú korene prvej rovnice. Potom

$$x_1 + x_2 = -a, \qquad x_1x_2 = b,$$

a pretože druhá rovnica má korene $1/x_1$ a $1/x_2$, platí

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -(2a + 1), \qquad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 2b + 1.$$

Platí teda $1/b = 2b + 1$, z čoho dostaneme kvadratickú rovnicu $2b^2 + b - 1 = 0$, ktorá má korene $b = -1$ a $b = 1/2$.

Pre $b = -1$ máme

$$-(2a + 1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-a}{-1},$$

čo je pre neznámu a lineárna rovnica s riešením $a = -1/3$.

Podobne pre $b = 1/2$ dostávame $-(2a+1) = -2a$, táto rovnica však nemá riešenie. Skúškou (treba overiť, že korene sú reálne) sa presvedčíme, že dvojica $a = -1/3$, $b = -1$ je (jediným) riešením úlohy.

Návodné a doplňajúce úlohy:

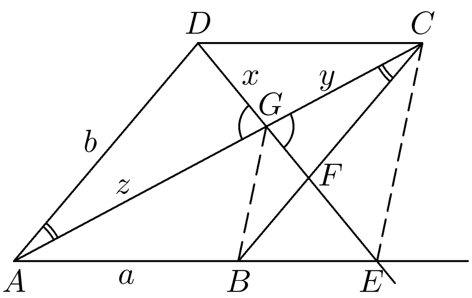
N1. Zistite, pre ktoré hodnoty parametra a má rovnica $x^2 + 3ax + 16a = 0$ dva rôzne korene, z ktorých jeden je druhou mocninou druhého. [$a = -4$, $a = -4/27$. Návod: Z rovníc $x_1 + x_1^2 = -3a$, $x_1 \cdot x_1^2 = 16a$ vyplýva $x_1^2/(x_1 + 1) = -16/3$.]

N2. Zistite, pre ktoré hodnoty parametrov a, b má rovnica $x^2 - (a^2 + 3)x + b = 0$ dva rôzne korene, ktoré sú druhými mocninami koreňov rovnice $x^2 - (a + 3)x + b = 0$. [$(a, b) = (-1, 0)$ a $(a, b) = (-2/3, 1)$.]

N3. Zistite, pre ktoré hodnoty parametrov a, b má rovnica $x^2+bx+b = 0$ dva rôzne korene, pričom každý z nich je o 1 väčší ako koreň rovnice $x^2 + ax + b = 0$. [$(a, b) = (-1, -3)$.]

2. *Daný je rovnobežník $ABCD$. Priamka vedená bodom D pretína úsečku AC v bode G, úsečku BC v bode F a polpriamku AB v bode E tak, že trojuholníky BEF a CGF majú rovnaký obsah. Určte pomer $|AG| : |GC|$.* (*T. Jurík*)

Riešenie. Z obr. 1 vidno, že trojuholníky AGD a CGF sú podobné podľa vety *uu*.



Obr. 1

Príslušný pomer podobnosti k je rovný hľadanému pomeru $|AG|:|GC|$. Ak teda označíme $b=|AD|$, $x=|DG|$ a $y=|CG|$, platí $|GF|=x/k$ a $|CF|=b/k$, odkiaľ

$$|FB|=|BC|-|FB|=b-\frac{b}{k}=(k-1)\frac{b}{k}$$

a

$$|DF|=|DG|+|GF|=x+\frac{x}{k}=(k+1)\frac{x}{k}.$$

Z podobnosti trojuholníkov BEF a CDF dostávame

$$|EF|=\frac{|DF|\cdot|BF|}{|CF|}=\frac{k^2-1}{k}\cdot x.$$

Z rovnosti obsahov trojuholníkov BEF a CGF vyplýva

$$|FB|\cdot|FE|=|FC|\cdot|FG|,$$

odkiaľ po dosadení vyjde

$$\frac{k-1}{k}\cdot b\cdot\frac{k^2-1}{k}\cdot x=\frac{b}{k}\cdot\frac{x}{k}.$$

Teda $k^3-k^2-k+1=1$, a pretože $k\neq 0$, dostávame pre hľadané k kvadratickú rovnicu $k^2-k-1=0$. Úlohe vyhovuje jej kladný koreň $k=(1+\sqrt{5})/2$.

Iné riešenie. Označme $|AG|=z$, $|GC|=y$. Pretože trojuholníky BEF a CGF majú rovnaký obsah, majú rovnaký obsah aj trojuholníky GBE a GBC. Preto platí $EC\parallel BG$. Z podobností trojuholníkov

$$ABG\sim AEC,\quad DFC\sim EFB,\quad CFE\sim BFG\quad \text{a}\quad AEC\sim ABG$$

postupne vyplýva

$$\frac{z}{y}=\frac{|AG|}{|GC|}=\frac{|AB|}{|BE|}=\frac{|DC|}{|BE|}=\frac{|FC|}{|BF|}=\frac{|CE|}{|BG|}=\frac{|AC|}{|AG|}=\frac{z+y}{z}.$$

Z výslednej rovnosti $z/y=1+y/z$ dostávame

$$\left(\frac{z}{y}\right)^2-\frac{z}{y}-1=0,$$

a pretože $z/y>0$, platí

$$\frac{z}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Označme P priesečník uhlopriečok konvexného štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že trojuholníky APD a CPB majú rovnaký obsah práve vtedy, keď $AB\parallel CD$.

N2. Označme P priesečník uhlopriečok konvexného štvoruholníka $ABCD$ a K, L priesečníky priamky vedenej bodom P rovnobežne so stranou AB. Dokážte, že rovnosť $|KP|=|PL|$ platí práve vtedy, keď $AB\parallel CD$.

3. *Na stole leží k hromádok o 1, 2, 3, ..., k kameňoch, kde* $k \geqq 3$. *V každom kroku vyberieme tri ľubovoľné hromádky na stole, zlúčime ich do jednej a pridáme k nej jeden kameň, ktorý dovtedy na stole nebol. Dokážte, že ak po niekoľkých krokoch vznikne jediná hromádka, potom výsledný počet kameňov nie je deliteľný tromi.* (J. Zhouf)

Riešenie. V každom kroku sa počet hromádok zmenší o dva. Aby vznikla jedna hromádka, musí byť na začiatku nepárny počet hromádok, teda $k = 2m + 1$. Na zmenšenie počtu hromádok o $2m$ potrebujeme m krokov. Pri každom pribudne jeden kameň, a preto je výsledný počet kameňov

$$p = 1 + 2 + 3 + \ldots + (2m + 1) + m = \frac{(2m + 1)(2m + 2)}{2} + m = 2m^2 + 4m + 1.$$

Číslo m má jeden z tvarov $m = 3n$, $m = 3n + 1$, $m = 3n + 2$. V prvom prípade $p = 18n^2 + 12n + 1 = 3(6n^2 + 2n) + 1$, v druhom $18n^2 + 24n + 7 = 3(6n^2 + 8n + 2) + 1$ a v treťom $p = 18n^2 + 36n + 17 = 3(6n^2 + 12n + 5) + 2$. Žiadne z týchto čísel nie je deliteľné tromi.

Poznámka. Stačí overiť, že p nie je deliteľné tromi pre $m = 0$, $m = 1$ a $m = 2$ [návodná úloha 1].

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech p je mnohočlen s celočíselnými koeficientmi, n je celé a k prirodzené číslo. Dokážte, že čísla $p(n + k)$ a $p(n)$ dávajú po delení číslom k rovnaký zvyšok.

N2. Nech n je celé číslo. Dokážte, že číslo $n^3 + n + 1$ nie je deliteľné siedmimi.

N3. Na stole leží k hromádok o $1, 2, 3, \ldots, k$ kameňoch, $k \geqq 5$. V každom kroku vyberieme 4 ľubovoľné hromádky, spojíme ich do jednej a ešte k nej pridáme jeden kameň z ktorejkoľvek ďalšej hromádky. Určte všetky k, pre ktoré po konečnom počte krokov môže vzniknúť jediná hromádka. [$k \in \{5, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18\}$ a všetky $k \geqq 20$.]

4. *Označme V priesečník výšok a S stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný. Dokážte, že ak uhol pri vrchole C má* $60°$, *potom os uhla ACB je osou úsečky VS.* (J. Zhouf)

Riešenie. Nech napríklad $|AC| < |BC|$. Predpokladajme najskôr, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Označme D stred strany BC a P pätu výšky z vrcholu B na stranu AC (obr. 2). Platí $|CP| = |BC| \cdot \cos 60° = |BC|/2 = |CD|$, $|\measuredangle CPV| = |\measuredangle CDS| = 90°$, $|\measuredangle CVP| = |\measuredangle CAB| = |\measuredangle CSD|$ (obvodový uhol a polovica stredového). Zo zhodnosti trojuholníkov CPV a CDS vyplýva $|CV| = |CS|$, $|\measuredangle PCV| = |\measuredangle DCS|$. Trojuholník VSC je teda rovnoramenný a os uhla ACB je tak aj osou uhla VCS a súčasne osou strany VS.

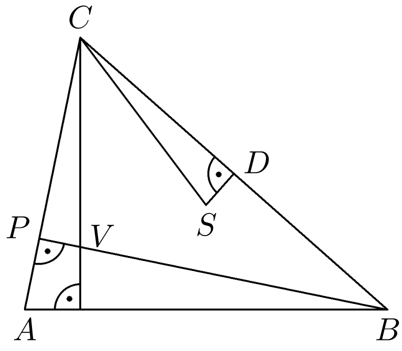
Ak je trojuholník ABC pravouhlý (obr. 3), je trojuholník VSC rovnostranný a os uhla VCS je aj osou strany VS.

Ak je trojuholník ABC tupouhlý, dokážeme tvrdenie úlohy rovnako ako v prípade ostrouhlého trojuholníka s tým rozdielom, že bude platiť $|\measuredangle CVP| = |\measuredangle CSD| = 180° - |\measuredangle CAB|$.

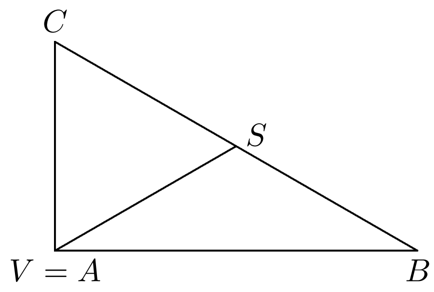
Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Označme V priesečník výšok a S stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Vypočítajte veľkosť uhla ACB, keď platí $|VC| = |SC|$.

N2. Nech V je priesečník výšok trojuholníka ABC. Dokážte, že body súmerne združené s bodom V podľa strán trojuholníka ABC ležia na kružnici opísanej tomuto trojuholníku.



Obr. 2



Obr. 3

---

5. *V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu*

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5\lfloor x \rfloor - 7}{7\lfloor x \rfloor - 5},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x). (J. Šimša)

Riešenie. Každé reálne číslo x môžeme zapísať v tvare $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je *celá časť* a $\{x\}$ tzv. *zlomková časť* čísla x. Zrejme platí $0 \leqq \{x\} < 1$, pričom $\{x\} = 0$ práve vtedy, keď x je celé. Odtiaľ vyplýva, že $\lfloor x \rfloor \leqq x < \lfloor x \rfloor + 1$, pričom rovnosť $\lfloor x \rfloor = x$ platí práve vtedy, keď x je celé. Tieto nerovnosti často používame pri riešení úloh s celou časťou. Keď označíme $\lfloor x \rfloor = k$, dostaneme z danej rovnice po odstránení zlomku a roznásobení

$$7kx - 5x = 5kx + 20k - 7x - 28$$

a odtiaľ

$$x = \frac{10k - 14}{k+1}. \tag{1}$$

Pretože $k = \lfloor x \rfloor$, musí platiť

$$k \leqq \frac{10k-14}{k+1} < k + 1.$$

Každou z nerovníc vyriešime samostatne:

$$0 \geqq \frac{k(k+1) - (10k-14)}{k+1} = \frac{(k-7)(k-2)}{k+1}, \qquad k \in (-\infty, -1) \cup \langle 2, 7 \rangle;$$

$$0 < \frac{(k+1)^2 - (10k-14)}{k+1} = \frac{(k-3)(k-5)}{k+1}, \qquad k \in (-1, 3) \cup (5, \infty).$$

Pretože k je celé, máme $k \in \{2, 6, 7\}$. Rovnica má teda tri riešenia, ktoré dostaneme dosadením do vzťahu (1): $x_1 = 2$, $x_2 = 46/7$, $x_3 = 7$.

Poznámky. Niektoré ďalšie vlastnosti celej časti: Ak k je celé, tak $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

Ak $\{x\} + \{y\} < 1$, platí $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$; ak $\{x\} + \{y\} \geqq 1$, platí $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Nech k je prirodzené číslo, $k > 1$. Ku každému reálnemu číslu x existuje práve jedno $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ také, že $\{x\} \in \langle (i-1)/k, i/k)$. Potom $k\lfloor x \rfloor + i - 1 \leqq kx < k\lfloor x \rfloor + i$, a preto $\lfloor kx \rfloor = k\lfloor x \rfloor + i - 1$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Vyriešte rovnicu $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+1 \rfloor = x+2$. [$x = 1$.]
N2. Vyriešte rovnicu $2x = \lfloor x \rfloor + 1$. [$x \in \{1/2, 1\}$.]
N3. Vyriešte rovnicu $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 4x - 1$. [$x \in \{-1/4, 1/4, 1/2, 1\}$.]
N4. Vyriešte sústavu rovníc $\lfloor x \rfloor = 2y + 1/3$, $\lfloor y \rfloor = 3x - 1/2$. [$x = -1/6$, $y = -2/3$.]

---

6. *Do kružnice k s polomerom r sú vpísané dve kružnice k_1, k_2 s polomerom $r/2$, ktoré sa vzájomne dotýkajú. Kružnica ℓ sa zvonka dotýka kružníc k_1, k_2 a s kružnicou k má vnútorný dotyk. Kružnica m má vonkajší dotyk s kružnicami k_2 a ℓ a vnútorný dotyk s kružnicou k. Vypočítajte polomery kružníc ℓ a m.* (*L. Boček*)

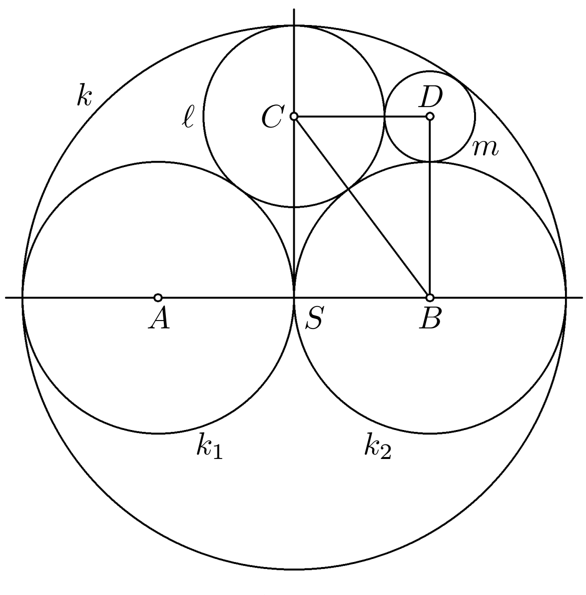
Riešenie. Označme S, A, B, C, D stredy kružníc k, k_1, k_2, ℓ, m a x, y polomery kružníc ℓ a m. Bod C leží na priamke, ktorá prechádza bodom S a je kolmá na AB (obr. 4). Z pravouhlého trojuholníka BCS máme podľa Pytagorovej vety

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2$$

a odtiaľ $x = r/3$. Označme P, Q päty kolmíc z bodu D na priamky AB a SC a $u = |SP|$, $v = |SQ|$. Ak $u \neq r/2$, tak BPD je pravouhlý trojuholník a podľa Pytagorovej vety

$$\left(\frac{r}{2} + y\right)^2 = v^2 + \left(u - \frac{r}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Táto rovnosť platí aj v prípade $u = r/2$.



Obr. 4

Podobne z pravouhlého trojuholníka QCD (keď $Q \neq C$) alebo porovnaním protiľahlých strán obdĺžnika (keď $Q = C$) dostaneme

$$\left(\frac{r}{3} + y\right)^2 = u^2 + \left(v - \frac{2r}{3}\right)^2. \tag{2}$$

Navyše z pravouhlého trojuholníka SPD máme

$$(r-y)^2 = u^2 + v^2. \tag{3}$$

Odčítaním rovností (3) a (2) dostaneme $4r^2/3 - 8ry/3 = 4vr/3$, teda $v = r - 2y$. Podobne odčítaním rovností (3) a (1) vyjde $r^2 - 3ry = ur$ a odtiaľ $u = r - 3y$. Dosadením do (3) a úpravou postupne dostaneme

$$\begin{aligned}(r-y)^2 &= (r-3y)^2 + (r-2y)^2,\\ r^2 - 8ry + 12y^2 &= 0,\\ (r-6y)(r-2y) &= 0.\end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že $y = r/2$ alebo $y = r/6$. Polomer $r/2$ má kružnica k_1, polomer $r/6$ kružnica m znázornená na obr. 4. Každá z týchto dvoch kružníc sa dotýka kružníc k, k_2 a ℓ požadovaným spôsobom.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Kružnica k_2 s polomerom $1/2$ sa dotýka zvnútra kružnice k_1 s polomerom 1. Priamka p prechádza stredmi kružníc k_1 a k_2. Vypočítajte polomer kružnice, ktorá sa dotýka priamky p a obidvoch kružníc k_1 a k_2. [4/9.]

N2. Každá z kružníc k_1, k_2, k_3 sa dotýka zvonka dvoch ostatných. Kružnice k_1 a k_2 majú rovnaký polomer r, kružnica k_3 má polomer $8r/5$. Všetky kružnice k_1, k_2, k_3 majú vnútorný dotyk s kružnicou k s polomerom 1. Vypočítajte polomer r. [3/8.]

N3. Každá z kružníc k_1, k_2, k_3 sa dotýka zvonka dvoch ostatných. Kružnica k_1 má polomer 1, kružnica k_2 má polomer 2 a kružnica k_3 má polomer 3. Vypočítajte polomery kružníc, ktoré sa dotýkajú všetkých troch kružníc k_1, k_2, k_3. [6/23 a 6.]