2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

---

1. *Na stole leží* 54 *kôpok s* $1, 2, 3, \dots, 54$ *kameňmi. V každom kroku vyberieme ľubovoľnú kôpku, povedzme s* k *kameňmi, a odoberieme ju celú zo stola spolu s* k *kameňmi z každej tej kôpky, v ktorej je aspoň* k *kameňov. Napríklad po prvom kroku, v ktorom vyberieme kôpku s* 52 *kameňmi, zostanú na stole kôpky s* 1, 2, 3, ..., 51, 1 *a* 2 *kameňmi. Predpokladajme, že po určitom počte krokov zostane na stole jediná kôpka. Zdôvodnite, koľko kameňov v nej môže byť.* (J. Šimša)

Riešenie. Ak v každom kroku zvolíme kôpku s najväčším počtom kameňov, budeme postupne odoberať kôpky s 54, 53, 52, ... kameňmi a po 53. kroku zostane na stole jediná kôpka s jedným kameňom.

Dokážeme, že pri ľubovoľnom postupe zostane v poslednej kôpke jediný kameň. Ukážeme totiž, že po každom kroku, po ktorom na stole zostáva aspoň jedna kôpka, tvoria počty kameňov v jednotlivých kôpkach vždy *celú* množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ pre nejaké prirodzené n (nevylučujeme však, že k niektorým číslam existuje viac kôpok s daným počtom kameňov). To teda znamená, že na stole je vždy aspoň jedna kôpka s práve jedným kameňom.

Na začiatku tvoria počty kameňov v kôpkach množinu $\{1, 2, \dots, 54\}$. Predpokladajme, že po určitom počte krokov tvoria počty kameňov v jednotlivých kôpkach množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geqq 2$). Ak teraz zvolíme kôpku s n kameňmi alebo kôpku s jedným kameňom, budú v ďalšom kroku počty kameňov v kôpkach tvoriť množinu $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Ak zvolíme kôpku s m kameňmi, kde $m \notin \{1, n\}$, budú počty kameňov v ďalšom kroku tvoriť množinu $\{1, 2, \dots, m-1\} \cup \{1, 2, \dots, n-m\} = \{1, 2, \dots, p\}$, kde $p = \max\{m-1, n-m\}$. Tým je tvrdenie o počte kameňov v jednotlivých kôpkach dokázané.

Odpoveď. Posledná kôpka bude bez ohľadu na zvolený postup vždy obsahovať jediný kameň.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za formuláciu hypotézy, že po každom kroku tvoria počty kameňov v kôpkach celú množinu $\{1, 2, \dots, n\}$.

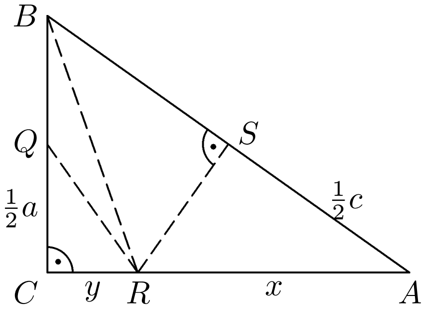
---

2. *Nech* ABC *je pravouhlý trojuholník so stranami* $a < b < c$. *Označme* Q *stred odvesny* BC *a* S *stred prepony* AB. *Priesečník osi úsečky* AB *s odvesnou* CA *označme* R. *Dokážte, že* $|RQ| = |RS|$ *práve vtedy, keď*

$$a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3.$$

(J. Švrček)

Riešenie. Podľa Pytagorovej vety je v pravouhlom trojuholníku rovnosť $a^2 : b^2 = 1 : 2$ splnená práve vtedy, keď $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Požadovanú ekvivalenciu teda stačí dokázať len pre jednu z rovností $a^2 : b^2 = 1 : 2$, $b^2 : c^2 = 2 : 3$.



Obr. 1

Trojuholníky ASR a ACB (obr. 1) majú spoločný uhol pri vrchole A a zhodujú sa v pravých uhloch ASR a ACB, takže sú podobné podľa vety uu. Odtiaľ vyplýva rovnosť

$$\frac{|AR|}{|AS|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

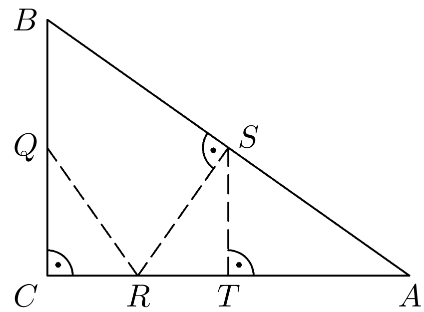
čiže

$$x = |AR| = \frac{|AB| \cdot |AS|}{|AC|} = \frac{c^2}{2b}. \tag{1}$$

Podľa Pytagorovej vety máme $|RS|^2 = |AR|^2 - |AS|^2 = x^2 - c^2/4$ a $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = a^2/4 + (b-x)^2 = a^2/4 + b^2 - 2bx + x^2$, takže $|RQ| = |RS|$ práve vtedy, keď $a^2/4 + c^2/4 + b^2 = 2bx$, čo po dosadení z (1) a $a^2 = c^2 - b^2$ po úprave dáva $3b^2/4 = c^2/2$, čiže $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Tým je požadovaná ekvivalencia dokázaná.

Iné riešenie. Podľa Pytagorovej vety platí (obr. 1) $|BR|^2 = |BC|^2 + |CR|^2 = a^2 + y^2$, $|RS|^2 = |BR|^2 - |BS|^2 = a^2 + y^2 - c^2/4$, $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = a^2/4 + y^2$. Rovnosť $|RQ| = |RS|$ teda platí práve vtedy, keď $a^2 + y^2 - c^2/4 = a^2/4 + y^2$, čiže $3a^2 = c^2$. V pravouhlom trojuholníku je táto rovnosť ekvivalentná s rovnosťou $3b^2 = 2c^2$, čiže $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

Iné riešenie. Označme T stred strany AC (obr. 2). Pretože $|QC| = |ST|$ a $|\measuredangle QCR| = |\measuredangle STR| = 90°$, sú trojuholníky QCR a STR zhodné práve vtedy, keď $|RQ| = |RS|$ a zároveň práve vtedy, keď $|RC| = |RT|$. Rovnosť $|RQ| = |RS|$ je teda ekvivalentná s tým, že bod R je stred úsečky CT, t. j. $x = |RA| = 3b/4$. Z podobnosti



Obr. 2

trojuholníkov ABC a ARS máme (rovnako ako v prvom riešení)

$$x = \frac{c^2}{2b},$$

takže $|RQ| = |RS|$ práve vtedy, keď

$$\frac{3b}{4} = \frac{c^2}{2b}, \quad \text{čiže} \quad 3b^2 = 2c^2.$$

V pravouhlom trojuholníku je to podľa Pytagorovej vety ekvivalentné s rovnosťou $3a^2 = c^2$, čiže $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. 1 bod dajte za zistenie, že stačí dokazovať len jednu z rovností $a^2 : b^2 = 1 : 2$, $b^2 : c^2 = 2 : 3$, 3 body za vyjadrenie dĺžok $|RQ|$, $|RS|$ pomocou strán trojuholníka ABC. Zostávajúce 2 body dajte za dokončenie ekvivalencie.

---

3. *V obore reálnych čísel riešte rovnicu*

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = \frac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje číslo a. (*J. Šimša*)

Riešenie. Výraz $\lfloor x/(1-x) \rfloor$ je celé číslo, preto aj

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor} = \frac{1}{1 - \lfloor x \rfloor} - 1$$

je celé, čo znamená, že $1 - \lfloor x \rfloor \in \{-1, 1\}$, čiže $\lfloor x \rfloor \in \{0, 2\}$.

Nech $\lfloor x \rfloor = 0$. Potom $0 \leqq x < 1$ a daná rovnica má tvar

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = 0,$$

takže je splnená práve vtedy, keď $0 \leqq x/(1-x) < 1$, čo je vzhľadom na predpoklad $1 - x > 0$ ekvivalentné s nerovnosťami $0 \leqq x < 1/2$. V tomto prípade danej rovnici vyhovujú všetky x z intervalu $\langle 0, 1/2)$.

Nech $\lfloor x \rfloor = 2$. Potom $2 \leqq x < 3$ a daná rovnica má tvar

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = -2,$$

takže je splnená práve vtedy, keď $-2 \leqq x/(1-x) < -1$. To je vzhľadom na predpoklad $2 \leqq x$ (a z neho vyplývajúcu nerovnosť $1 - x < 0$) ekvivalentné s nerovnosťami $-2 + 2x \geqq x > -1 + x$, čiže $x \geqq 2$. V tomto prípade danej rovnici vyhovujú všetky x z intervalu $\langle 2, 3)$.

Záver. Všetky riešenia danej rovnice tvoria množinu $\langle 0, 1/2) \cup \langle 2, 3)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. 1 bod dajte za zistenie, že $\lfloor x \rfloor / (1 - \lfloor x \rfloor)$ je celé číslo, ďalší bod za $\lfloor x \rfloor \in \{0, 2\}$. Za odvodenie sústavy nerovností a jej vyriešenie v každom z oboch prípadov dajte po 2 bodoch. Ak chýba správny záver, že vyhovujú všetky $x \in \langle 0, 1/2) \cup \langle 2, 3)$, strhnite 1 bod.