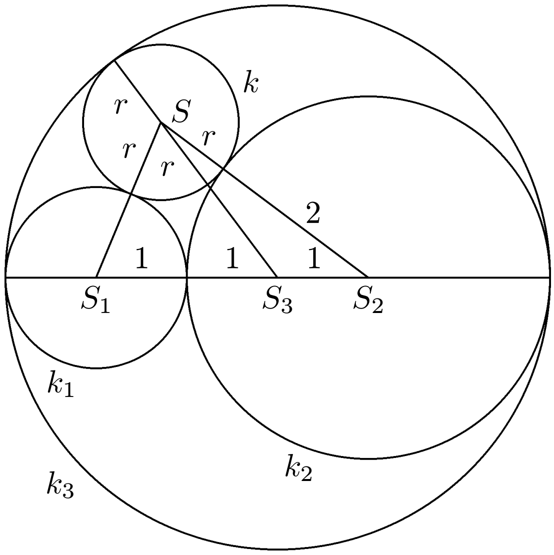
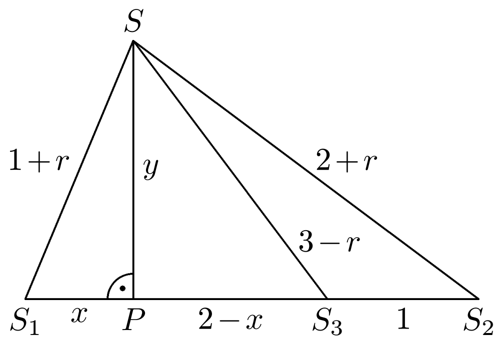
2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

1. *Kružnica k_1 s polomerom 1 má vonkajší dotyk s kružnicou k_2 s polomerom 2. Každá z kružníc k_1, k_2 má vnútorný dotyk s kružnicou k_3 s polomerom 3. Vypočítajte polomer kružnice k, ktorá má s kružnicami k_1, k_2 vonkajší dotyk a s kružnicou k_3 vnútorný dotyk.* (P. Novotný)

Riešenie. Pretože sa súčet priemerov kružníc k_1 a k_2 rovná priemeru kružnice k_3, ležia ich stredy S_1, S_2 a S_3 na priamke. Existujú dve zhodné kružnice, ktoré spĺňajú podmienky úlohy, a sú súmerne združené podľa priamky S_1S_2. Označme k jednu z nich (obr. 1), S jej stred a r zodpovedajúci polomer.



Obr. 1



Obr. 2

Pre veľkosti strán trojuholníka S_1S_2S platí $|S_1S| = 1+r$, $|S_2S| = 2+r$, $|S_1S_2| = 3$ a $|S_3S| = 3 - r$. Pre bod S_3 zároveň platí $|S_3S_1| = 2$ a $|S_3S_2| = 1$. Keď označíme P pravouhlý priemet bodu S na priamku S_1S_2 (obr. 2) a $x = |S_1P|$, $y = |SP|$, môžeme podľa Pytagorovej vety písať

$$(1+r)^2 = x^2 + y^2,$$
$$(2+r)^2 = (3-x)^2 + y^2,$$
$$(3-r)^2 = (2-x)^2 + y^2.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme $3 + 2r = 9 - 6x$, čiže $2r = 6 - 6x$. Odčítanie prvej rovnice od tretej dá $8 - 8r = 4 - 4x$, čiže $2r = 1 + x$. Porovnaním oboch dôsledkov vyjde rovnica $6 - 6x = 1 + x$, odkiaľ $x = 5/7$, $r = 3 - 3x = 6/7$.

Poznámka. So znalosťou kosínusovej vety sa zaobídeme bez pomocného bodu P. Keď napíšeme kosínusové vety pre trojuholníky S_1S_3S a S_1S_2S, dostaneme dve rovnice

$$(3-r)^2 = 4 + (1+r)^2 - 2\cdot 2(1+r)\cos\omega,$$
$$(2+r)^2 = 9 + (1+r)^2 - 2\cdot 3(1+r)\cos\omega,$$

kde $\omega = |\measuredangle S_2 S_1 S|$. Po úprave a vyjadrení $(1+r)\cos\omega$ z oboch rovníc dostaneme rovnicu $2r - 1 = 1 - r/3$, z ktorej vyplýva $r = 6/7$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za zistenie, že stredy kružníc k_1, k_2, k_3 ležia na priamke, dajte 1 bod, zostavenie kvadratických rovníc pre hľadaný polomer r oceňte 3 bodmi, 2 body dajte za výpočet polomeru r.

---

2. *Na jednej internetovej stránke prebieha hlasovanie o najlepšieho hokejistu sveta posledného desaťročia. Počet hlasov pre jednotlivých hráčov sa uvádza po zaokrúhlení v celých percentách. Po Jožkovom hlasovaní pre Miroslava Šatana sa jeho zisk 7 % nezmenil. Najmenej koľko ľudí vrátane Jožka hlasovalo? Predpokladáme, že každý účastník ankety hlasoval práve raz, a to pre jediného hráča.* (*M. Panák*)

Riešenie. Označme p počet účastníkov ankety vrátane Jožka a j počet hlasov pre Šatana. Na celých 7 % sa zaokrúhlia čísla z intervalu $\langle 6{,}5\,\%; 7{,}5\,\%)$, čiže $\langle 0{,}065; 0{,}075)$. Pred Jožkovým hlasovaním mal Šatan $j-1$ hlasov a po ňom j hlasov. Musí preto platiť

$$0{,}065 \leqq \frac{j-1}{p-1} < 0{,}075, \quad 0{,}065 \leqq \frac{j}{p} < 0{,}075.$$

Pretože z nerovnosti $0 < j < p$ vyplýva $(j-1)/(p-1) < j/p$, stačí riešiť dve nerovnice

$$0{,}065 \leqq \frac{j-1}{p-1} \quad \text{a} \quad \frac{j}{p} < 0{,}075. \tag{1}$$

Prvá z nich je ekvivalentná s nerovnicou $0{,}065p - 0{,}065 + 1 \leqq j$ a druhá s nerovnicou $j < 0{,}075p$, preto musí platiť $0{,}065p + 0{,}935 < 0{,}075p$, odkiaľ vyplýva $p > 93{,}5$. Pretože p je celé číslo, dostávame $p \geqq 94$. Musíme však ešte zistiť, pre ktoré najmenšie $p \geqq 94$ existuje celé číslo j, ktoré vyhovuje nerovniciam (1). Z podmienky $p \geqq 94$ dostaneme $j \geqq 0{,}065 \cdot 94 + 0{,}935 = 7{,}045$, a teda $j \geqq 8$. Z nerovnice $j < 0{,}075p$ potom máme $p > 320/3$, čiže $p \geqq 107$. Pretože $0{,}065 \cdot 107 + 0{,}935 < 8$, je dvojica $j = 8$, $p = 107$ riešením sústavy (1), takže $p = 107$ je najmenší možný počet ľudí, ktorí v ankete hlasovali.

Iné riešenie. Nerovnice $0{,}065p + 0{,}935 \leqq j < 0{,}075p$, ekvivalentné s nerovnicami (1), upravíme na tvar

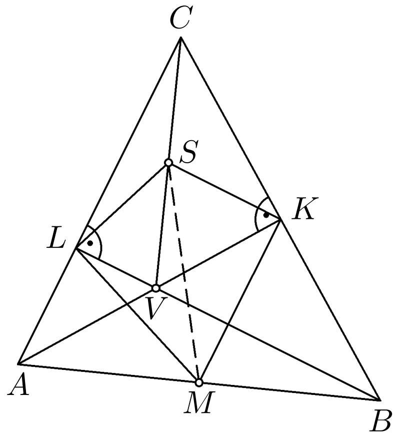
$$\frac{j}{0{,}075} < p \leqq \frac{j - 0{,}935}{0{,}065},$$

čo dáva podmienku $0{,}065j < 0{,}075j - 0{,}075 \cdot 0{,}935$, čiže $j > 7{,}5 \cdot 0{,}935 > 7$, takže $j \geqq 8$. Z nerovnosti $p > j/0{,}075$ tak dostávame nerovnosť $p \geqq 107$. Teraz stačí overiť, že $p = 107$ vyhovuje pre $j = 8$ aj druhej podmienke, t. j. že platí $107 \leqq (8 - 0{,}935)/0{,}065$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za odvodenie takej sústavy dvoch nerovníc, ktorá je analogická sústave (1), dajte 2 body, za postupné odvodenie odhadov pre celé čísla p a j dajte 3 body, za overenie, že $p = 107$ je najmenšie hľadané p, dajte 1 bod.

3. *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme K a L päty výšok z vrcholov A a B, M stred strany AB a V priesečník výšok trojuholníka ABC. Dokážte, že os uhla KML prechádza stredom úsečky VC.* (J. Švrček)

Riešenie. Označme S stred úsečky CV (obr. 3). Body K a L ležia na Tálesovej kružnici s priemerom AB, takže $|ML| = |MK|$. Body K a L zároveň ležia aj na Tálesovej kružnici s priemerom CV, takže $|SL| = |SK|$. Trojuholníky SLM a SKM sú teda zhodné (sss), takže $|\measuredangle SML| = |\measuredangle SMK|$, čiže os uhla LMK prechádza stredom S úsečky VC.



Obr. 3

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Po dvoch bodoch oceňte odvodenie každej z rovností $|ML| = |MK|$ a $|SL| = |SK|$, zostávajúce dva body dajte za dokončenie dôkazu (argumentovať možno napr. tiež tým, že oba trojuholníky LKM a LKS sú rovnoramenné, a teda $LMKS$ je deltoid).

4. *Nájdite všetky trojice reálnych čísel x, y, z, pre ktoré platí*

$$\lfloor x \rfloor - y = 2 \cdot \lfloor y \rfloor - z = 3 \cdot \lfloor z \rfloor - x = \frac{2004}{2005},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje číslo a. (J. Šimša)

Riešenie. Danú sústavu rovníc prepíšeme na ekvivalentný tvar

$$\begin{aligned} y &= \lfloor x \rfloor - \alpha, \\ z &= 2\lfloor y \rfloor - \alpha, \\ x &= 3\lfloor z \rfloor - \alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

pričom α sme označili číslo 2004/2005 z intervalu $(0, 1)$. Zo sústavy (1) vyplývajú postupne rovnosti

$$\begin{aligned} \lfloor y \rfloor &= \lfloor x \rfloor - 1, \\ \lfloor z \rfloor &= 2\lfloor y \rfloor - 1 = 2\lfloor x \rfloor - 3, \\ \lfloor x \rfloor &= 3\lfloor z \rfloor - 1 = 6\lfloor x \rfloor - 10. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice dostávame $\lfloor x \rfloor = 2$ a zo zostávajúcich dvoch rovníc dopočítame $\lfloor y \rfloor = \lfloor z \rfloor = 1$. Dosadením do (1) tak máme

$$x = 3 - \frac{2004}{2005} = 2 + \frac{1}{2005}, \quad y = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}, \quad z = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}.$$

Vyšli necelé čísla x, y a z, ktoré majú práve také celé časti, aké sme dosadzovali do pravých strán rovností (1). Tak sme zároveň urobili skúšku (ktorú však možno urobiť aj priamym dosadením do pôvodnej sústavy). Uvedená trojica je (jediným) riešením danej úlohy.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za odvodenie vzťahu pre jednu celú časť. Dokončenie výpočtu oceňte 2 bodmi, za chýbajúcu zmienku o skúške 1 bod strhnite.