2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

1. *Nech a, b, c, d sú také reálne čísla, že $a+d=b+c$. Dokážte nerovnosť*

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c) \geqq 0.$$

(*E. Kováč*)

Riešenie. Keď vyjadríme z rovnosti v predpoklade napr. $d=b+c-a$ a dosadíme túto hodnotu do ľavej strany dokazovanej nerovnosti, postupne dostaneme

$$\begin{aligned}&(a-b)(a-b)+(a-c)(a-c)+(b+c-2a)(b-c)=\\&=a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2+bc-2ab-bc-c^2+2ac=\\&=2a^2-4ab+2b^2=2(a^2-2ab+b^2)=2(a-b)^2.\end{aligned}$$

Tento výraz je nezáporný pre všetky reálne čísla a, b, čím je daná nerovnosť dokázaná.

Iné riešenie. Najskôr ponecháme podmienku $a+d=b+c$ bokom a ukážeme, že výraz na ľavej strane dokazovanej nerovnosti možno upraviť na súčin. Prvá časť výrazu, súčin $(a-b)(c-d)$, je rovný nule v prípadoch, keď $a=b$ alebo $c=d$. Druhá časť výrazu, súčet $(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)$, má tiež v oboch prípadoch $a=b$, $c=d$ nulovú hodnotu. Takže výraz musí byť deliteľný súčinom $(a-b)(c-d)$. Presvedčíme sa o tom roznásobením a následným postupným vynímaním:

$$\begin{aligned}(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)&=(ab-bc-ad+cd)+(bd-ab-cd+ac)=\\&=(-bc+bd)+(-ad+ac)=-b(c-d)+a(c-d)=\\&=(a-b)(c-d).\end{aligned}$$

Dokazovaná nerovnosť má preto tvar

$$2(a-b)(c-d) \geqq 0,$$

do ktorého teraz dosadíme $c-d=a-b$. Dostaneme tak nerovnosť

$$2(a-b)^2 \geqq 0,$$

ktorá platí pre všetky reálne čísla a, b. Tým je daná nerovnosť dokázaná.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Nech pre reálne čísla a, b, c platí $a+b+c=0$. Dokážte rovnosť

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

$[a^3+b^3-(a+b)^3=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=-3ab(a+b)=3abc.]$

N2. Dokážte, že pre všetky reálne čísla a, b, c platí

$$bc(c-b)+ac(a-c)+ab(b-a)=(a-b)(b-c)(c-a).$$

2. *Zistite, pre ktoré prirodzené čísla $n \geqq 2$ je možné z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ vybrať navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom n.* (J. Zhouf)

Riešenie. Ak je n párne a v danej množine sú párne čísla 2 a $n-2$, pričom $2 < n-2$, je ich súčet $2 + (n-2) = n$ deliteľný číslom n. Z podmienky $2 < n-2$ tak dostávame, že všetky párne čísla $n > 4$ vyhovujú podmienke úlohy.

Z množín $\{1\}$ (pre $n = 2$) a $\{1, 2, 3\}$ (pre $n = 4$) zrejme nemožno požadovaný výber uskutočniť.

Ak je n nepárne, môžeme pre $n > 7$ z danej množiny vybrať tri párne čísla 4, $n-3$, $n-1$, pričom $4 < n-3 < n-1$, so súčtom $4 + (n-3) + (n-1) = 2n$, ktorý je deliteľný číslom n.

Z množín $\{1, 2\}$ (pre $n = 3$), $\{1, 2, 3, 4\}$ (pre $n = 5$) a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (pre $n = 7$) zrejme nemožno vybrať ani dve, ani tri rôzne párne čísla s požadovanou vlastnosťou.

Podmienke úlohy vyhovuje číslo $n = 6$ a všetky prirodzené čísla $n \geqq 8$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

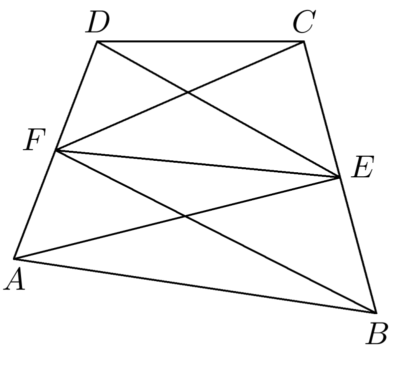
N1. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré možno z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ vybrať niekoľko navzájom rôznych čísel, ktorých súčet je deliteľný číslom $2n$. [$n \geqq 3$.]

N2. Pre ktoré prirodzené čísla n možno z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ vybrať niekoľko navzájom rôznych čísel, ktorých súčin je deliteľný číslom n^2? [Všetky zložené čísla $n > 4$.]

3. *V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme E stred strany BC a F stred strany AD. Dokážte, že trojuholníky AED a BFC majú rovnaký obsah práve vtedy, keď sú strany AB a CD rovnobežné.* (J. Šimša)

Riešenie. Priečka EF daného štvoruholníka $ABCD$ je v každom z trojuholníkov AED aj BFC ťažnicou (obr. 1), čo znamená, že pre ich obsahy platí

$$\begin{aligned} S_{AED} &= 2S_{FED} = 2S_{FEA}, \\ S_{BFC} &= 2S_{FEC} = 2S_{FEB}. \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 1

Oba trojuholníky FED, FEC majú spoločnú stranu FE a ich obsahy sú rovnaké práve vtedy, keď $CD \parallel FE$. Podobne aj trojuholníky FEA, FEB majú spoločnú stranu FE a ich obsahy sú rovnaké práve vtedy, keď $AB \parallel FE$. Ak teda majú trojuholníky AED a BFC rovnaký obsah, tak $CD \parallel FE$ a $AB \parallel FE$, čiže $AB \parallel CD$.

Ak naopak $AB \parallel CD$, je stredná priečka EF lichobežníka $ABCD$ rovnobežná s oboma základňami AB a CD, takže podľa prechádzajúcej úvahy $S_{FED} = S_{FEC}$ a podľa (1) tiež $S_{AED} = S_{BFC}$. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že v každom lichobežníku $ABCD$ so základňami AB a CD sú si rovné obsahy trojuholníkov ADP a BCP, pričom P je priesečník uhlopriečok lichobežníka. [Uvedomte si, že práve o spomenuté trojuholníky sa líšia trojuholníky ABC a ABD.]

N2. Dokážte, že v každom trojuholníku ABC sú obsahy trojuholníkov ABP, BCP a CAP rovnaké práve vtedy, keď P je ťažiskom trojuholníka ABC. [$S_{APC} = S_{BPC}$ práve vtedy, keď bod P leží na ťažnici z vrcholu C.]

---

4. *Tri štvormiestne čísla k, ℓ, m majú rovnaký tvar $ABAB$, t. j. číslica na mieste jednotiek je rovnaká ako číslica na mieste stoviek a číslica na mieste desiatok je rovnaká ako číslica na mieste tisícok. Číslo ℓ má číslicu na mieste jednotiek o 2 väčšiu a číslicu na mieste desiatok o 1 menšiu ako číslo k. Číslo m je súčtom čísel k a ℓ a je deliteľné deviatimi. Určte všetky také čísla k.* (T. Joska)

Riešenie. Aby bolo číslo $m = \overline{CDCD}$ deliteľné deviatimi, musí byť súčet $2(C + D)$ jeho číslic deliteľný deviatimi, teda aj súčet $C + D$ musí byť deliteľný deviatimi, čiže číslo $\overline{CD}$ musí byť deliteľné deviatimi.

Ak má číslo k číslice A, B, A, B, má číslo ℓ číslice $A - 1$, $B + 2$, $A - 1$, $B + 2$. Keďže číslo $B + (B + 2) = 2B + 2$ je párne, je číslica D čísla $m = k + \ell$ párna. Preto prichádzajú vzhľadom na deliteľnosť deviatimi do úvahy len tieto čísla m: 1 818, 3 636, 5 454, 7 272, 9 090. Pretože číslica C je vo všetkých prípadoch nepárna a súčet číslic $A + (A - 1) = 2A - 1$ je tiež nepárny, nemôže byť $B + (B + 2) > 10$, teda $B + (B + 2) = D$ a $A + (A - 1) = C$. Odtiaľ už ľahko určíme zodpovedajúce číslice C, D a čísla k, ℓ zapíšeme do nasledujúcej tabuľky:

m	1 818	3 636	5 454	7 272	9 090
k	1 313	2 222	3 131	4 040	neexistuje
ℓ	0 505	1 414	2 323	3 232	neexistuje

Číslo 0505 nie je štvormiestne, preto sú riešením úlohy iba čísla $k \in \{2\,222, 3\,131, 4\,040\}$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Trojmiestne číslo m je deliteľné číslom 18 a dá sa napísať ako súčet dvojmiestneho čísla a jeho päťdesiatnásobku. Určte všetky čísla m s touto vlastnosťou. [$m = 51 \cdot 18$.]

N2. Nájdite všetky trojmiestne čísla, ktoré majú tú vlastnosť, že súčet druhých mocnín ich číslic je 118 a súčet ich číslic sa rovná poslednému dvojčísliu uvažovaného trojmiestneho čísla. [916.]

N3. K prirodzenému číslu m zapísanému rovnakými číslicami sme pripočítali štvormiestne prirodzené číslo n. Získali sme štvormiestne číslo s opačným poradím číslic, ako má číslo n. Určte všetky také dvojice čísel m a n. [MO 52–C–I–5.]

---

5. *Určte počet všetkých trojíc dvojmiestnych prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky číslice rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t. j. započítavame ich len raz.* (J. Šimša)

Riešenie. Pre dvojmiestne čísla a, b, c je súčin abc číslo štvormiestne, alebo päťmiestne, alebo šesťmiestne. Ak sú teda všetky číslice čísla abc rovné jednej číslici k, platí jedna z rovností $abc = k \cdot 1\,111$, $abc = k \cdot 11\,111$ alebo $abc = k \cdot 111\,111$, $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Čísla $1\,111 = 11 \cdot 101$ a $11 \cdot 111 = 41 \cdot 271$ však majú vo svojom rozklade trojmiestne prvočísla, takže nemôžu byť súčinom dvojmiestnych čísel. Ostáva preto jediná možnosť:

$$abc = k \cdot 111\,111 = k \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

Pozrime sa, ako môžu byť prvočísla 3, 7, 11, 13, 37 rozdelené medzi jednotlivé činitele a, b, c. Pretože súčiny $37 \cdot 3$ a $3 \cdot 7 \cdot 11$ sú väčšie ako 100, musí byť prvočíslo 37 samo ako jeden činiteľ a zvyšné štyri prvočísla 3, 7, 11, 13 musia byť rozdelené do dvojíc. Keďže aj súčin $11 \cdot 13$ je väčší ako 100, prichádzajú do úvahy iba rozdelenia na činitele $3 \cdot 11$, $7 \cdot 13$ a 37, alebo na činitele $3 \cdot 13$, $7 \cdot 11$ a 37. K týmto činiteľom ešte pripojíme možné činitele z rozkladu číslice k a dostaneme riešenia dvoch typov:

$$\begin{aligned} a &= 33k_1,\ b = 91,\ c = 37k_2, \quad \text{pričom } k_1 \in \{1,2,3\},\ k_2 \in \{1,2\},\\ a &= 39k_1,\ b = 77,\ c = 37k_2, \quad \text{pričom } k_1 \in \{1,2\},\ k_2 \in \{1,2\}, \end{aligned}$$

Hľadaný počet trojíc čísel a, b, c je teda $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$.

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Určte počet všetkých dvojíc dvojmiestnych prirodzených čísel a, b, ktorých súčin ab má zápis, v ktorom sú všetky číslice párne a rovnaké. Dvojice líšiace sa iba poradím čísel považujeme za rovnaké, t. j. započítavame ich iba raz. [6.]

N2. Určte počet všetkých dvojíc trojmiestnych prirodzených čísel a, b, ktorých súčin ab má zápis, v ktorom sú všetky číslice rovnaké. Dvojice líšiace sa iba poradím čísel považujeme za rovnaké, t. j. započítavame ich iba raz. [26.]

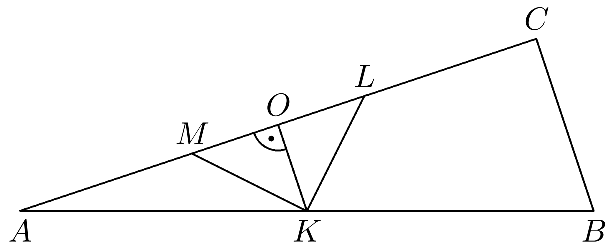
---

6. *V trojuholníku ABC so stranou BC dĺžky* 2 cm *je bod K stredom strany AB. Body L a M rozdeľujú stranu AC na tri zhodné úsečky. Trojuholník KLM je rovnoramenný a pravouhlý. Určte dĺžky strán AB, AC všetkých takých trojuholníkov ABC.*

(*P. Leischner*)

Riešenie. Body L a M na strane AC zvolíme tak, aby $|AM| = |ML| = |LC|$. Ťažnica KO trojuholníka KLM je strednou priečkou trojuholníka ABC, platí teda $|KO| = |BC|/2$, $|AC| = 6|MO|$ a $|AB| = 2|AK|$. Rozoberieme tri možnosti.

(a) Nech $|KL| = |KM|$ (obr. 2). Potom $|\measuredangle MKL| = |\measuredangle MOK| = 90°$ a $|MO| =$



Obr. 2

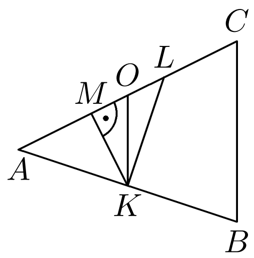
$= |KO|$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník AKO vyplýva

$$|AK| = \sqrt{(3|MO|)^2 + |KO|^2} = \sqrt{10|KO|^2} = \sqrt{10}|KO| = \tfrac{1}{2}\sqrt{10}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \sqrt{10}|BC| = 2\sqrt{10}\,\text{cm},$$
$$|AC| = 6|MO| = 6|KO| = 3|BC| = 6\,\text{cm}.$$

(b) Nech $|ML| = |MK|$ (obr. 3). Potom $|\measuredangle KML| = 90^\circ$ a $|AM| = |ML| =$



Obr. 3

$= |MK| = 2|MO|$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník KMO vyplýva

$$|KO| = \sqrt{|MO|^2 + (2|MO|)^2} = \sqrt{5}|MO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\ \text{cm}.$$

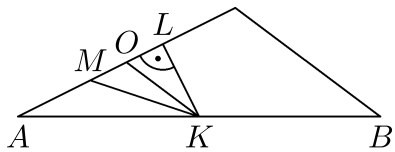
Z Pytagorovej vety pre trojuholník AKM vyplýva

$$|AK| = \sqrt{|AM|^2 + |MK|^2} = \sqrt{2}|MK| = 2\sqrt{2}|MO| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|KO| = \frac{\sqrt{10}}{5}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|BC| = \frac{4\sqrt{10}}{5}\ \text{cm}.$$

(c) Nech $|ML| = |KL|$ (obr. 4). Potom $|\measuredangle MLK| = 90^\circ$, takže $|KL| = |ML| =$



Obr. 4

$= 2|LO| = 2|MO|$ a $|AL| = |AM| + |ML| = 4|MO|$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník KLO tak vyplýva

$$|KO| = \sqrt{|LO|^2 + (2|LO|)^2} = \sqrt{5}|LO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = 6|LO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\ \text{cm}.$$

Z Pytagorovej vety pre trojuholník AKL vyplýva

$$|AK| = \sqrt{|AL|^2 + |LK|^2} = \sqrt{(4|LO|)^2 + (2|LO|)^2} =$$
$$= 2\sqrt{5}|LO| = 2|KO| = |BC| = 2\,\mathrm{cm},$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = 2|BC| = 4\,\mathrm{cm}.$$

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Trojuholník má dĺžky strán 4 cm, 5 cm, 6 cm. Určte veľkosti výšok a ťažníc tohto trojuholníka. [Návod: Označme x vzdialenosť päty výšky od stredu strany dĺžky 4, potom podľa Pytagorovej vety $(2+x)^2 + 6^2 = (2-x)^2 + 5^2$, atď.]

N2. Obdĺžnik $ABCD$ má strany dĺžok a, b. Bod M je pätou kolmice vedenej z vrcholu B na uhlopriečku AC. Vypočítajte dĺžky úsečiek AM, CM, BM. [$|MB| = ab/\sqrt{a^2+b^2}$, $|AM| = \sqrt{a^2 - |MB|^2}$.]