2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

1. *Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí*

$$x + yz = 2005,$$
$$y + xz = 2006.$$

(J. Šimša)

Riešenie. Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme

$$(x - y)(z - 1) = 1,$$

odkiaľ vyplýva, že buď platí $x - y = z - 1 = 1$, alebo $x - y = z - 1 = -1$.

V prvom prípade máme $z = 2$, $y = x - 1$ a po dosadení do ktorejkoľvek z pôvodných rovníc určíme $x = 669$, takže $y = 668$.

V druhom prípade máme $z = 0$, $y = x + 1$, takže $x = 2\,005$ a $y = 2\,006$.

Riešením sú dve trojice $x = 669$, $y = 668$, $z = 2$ a $x = 2\,005$, $y = 2\,006$, $z = 0$.

Iné riešenie. Z prvej rovnice vyjadríme $x = 2\,005 - yz$ a tento vzťah dosadíme do druhej rovnice, ktorú upravíme na

$$y + 2\,005z - yz^2 = 2\,006,$$
$$y(1 - z^2) = 2\,005(1 - z) + 1.$$

Z danej sústavy je zrejmé, že $z \neq 1$, takže môžeme písať

$$y(1 + z) = 2\,005 + \frac{1}{1 - z}.$$

Ľavá strana poslednej rovnosti je celé číslo, preto musí byť celé číslo aj pravá strana. Tejto podmienke vyhovuje jedine $z = 0$ a $z = 2$.

Rovnako ako v predchádzajúcom riešení dosadením do ktorejkoľvek rovnice pôvodnej sústavy dopočítame $x = 669$, $y = 668$ pre $z = 2$ a $x = 2\,005$, $y = 2\,006$ pre $z = 0$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za každé chýbajúce riešenie strhnite 2 body.

2. *Pre ktoré prirodzené čísla n možno z množiny $\{n, n+1, n+2, \dots, n^2\}$ vybrať štyri navzájom rôzne čísla a, b, c, d tak, aby platilo $ab = cd$?* (J. Šimša)

Riešenie. Pre $n = 1$ a $n = 2$ má daná množina menej ako štyri prvky.

Keďže pre každé prirodzené číslo n platí

$$n(2n + 2) = 2n(n + 1),$$

mohli by sme zvoliť $a = n$, $b = 2n + 2$, $c = 2n$, $d = n + 1$. Tieto čísla sú navzájom rôzne pre každé $n > 1$, lebo pre také n platí $n < n + 1 < 2n < 2n + 2$. Ešte zostáva overiť, pre ktoré čísla n platí $2n + 2 \leqq n^2$, aby takto zvolené štyri čísla a, b, c, d boli z danej množiny. Je vidieť, že táto nerovnosť platí pre každé $n > 2$, lebo je ekvivalentná s nerovnosťou $3 \leqq (n-1)^2$.

Môžeme teda zhrnúť, že požadované čísla a, b, c, d možno z danej množiny vybrať pre každé prirodzené číslo $n > 2$.

Iné riešenie. Pre $n = 1$ a $n = 2$ má daná množina menej ako štyri prvky.

Keďže pre každé prirodzené číslo n platí

$$n \cdot 6n = 2n \cdot 3n,$$

mohli by sme zvoliť $a = n$, $b = 6n$, $c = 2n$, $d = 3n$. Tieto čísla sú navzájom rôzne pre každé n, lebo $n < 2n < 3n < 6n$. Ešte zostáva overiť, pre ktoré čísla n platí $6n \leqq n^2$, aby zvolené štyri čísla a, b, c, d boli z danej množiny. Je vidieť, že táto nerovnosť platí pre každé $n > 5$.

Pre $n = 3$ vyberieme $a = 3$, $b = 8$, $c = 6$, $d = 4$, pre $n = 4$ vyberieme $a = 4$, $b = 10$, $c = 8$, $d = 5$ alebo $a = 5$, $b = 12$, $c = 6$, $d = 10$, pre $n = 5$ vyberieme $a = 5$, $b = 12$, $c = 10$, $d = 6$.

Môžeme teda zhrnúť, že požadované čísla a, b, c, d možno z danej množiny vybrať pre každé prirodzené číslo $n > 2$.

Poznámka. Štvoríc navzájom rôznych čísel a, b, c, d, ktoré spĺňajú dané podmienky, je veľa. Vždy je ale treba pri takej štvorici určiť, od ktorého najmenšieho čísla n dané podmienky platia a pre zostávajúce prirodzené čísla n je treba určiť konkrétne hodnoty čísel a, b, c, d.

Tak je možné voliť napríklad $a = n$, $b = 3n + 3$, $c = 3n$, $d = n + 1$ pre $n > 3$, alebo $a = n + 1$, $b = 2n + 4$, $c = 2(n + 1)$, $d = n + 2$ pre $n > 3$ a podobne.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za nezdôvodnenie rôznosti čísel a, b, c, d strhnite 1 bod. Za nezdôvodnenie, že čísla a, b, c, d patria do danej množiny, strhnite 1 bod. Pri voľbe takej všeobecnej štvorice čísel a, b, c, d, že je treba nájsť konkrétne čísla a, b, c, d pre niekoľko prvých čísel n, strhnite 2 body, ak tieto počiatočné konkrétne čísla chýbajú.

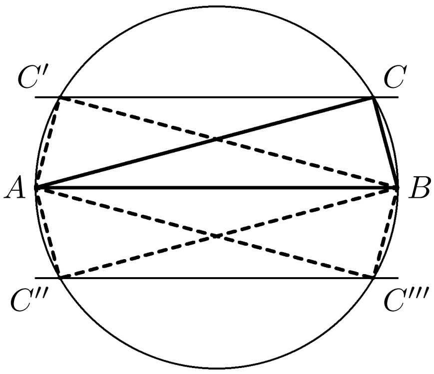
---

3. *Je daná úsečka AB. Zostrojte bod C tak, aby sa obsah trojuholníka ABC rovnal $1/8$ obsahu S štvorca so stranou AB a súčet obsahov štvorcov so stranami AC a BC sa rovnal S.* (*A. Jančařík*)

Riešenie. Podmienka, že obsah trojuholníka ABC sa má rovnať $1/8$ obsahu S štvorca so stranou AB znamená, že výška trojuholníka ABC na stranu AB má dĺžku $|AB|/4$, takže bod C musí ležať na jednej z dvoch rovnobežiek s priamkou AB vzdialených $|AB|/4$ od priamky AB.

Podmienka, že súčet obsahov štvorcov so stranami AC a BC sa má rovnať obsahu štvorca so stranou AB znamená podľa Pytagorovej vety pre trojuholník ABC, že tento trojuholník je pravouhlý s preponou AB, takže bod C musí ležať na Tálesovej kružnici so stredom v strede prepony AB a polomerom $|AB|/2$.

Konštrukcia bodu C je teda jednoduchá. Obe spomenuté rovnobežky zrejme pretnú kružnicu nad priemerom AB v štyroch bodoch (obr. 1). Vzhľadom na to, že sa jedná o polohovú úlohu, má úloha štyri riešenia.



Obr. 1

Za úplné riešenie je 6 bodov, z toho 2 body za správne určenie počtu riešení. Za zistenie, že bod C leží na určených rovnobežkách s priamkou AB, dajte 2 body. Za dôkaz, že bod C leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, dajte 2 body. Za uvedenie, že úloha má dve riešenia, dajte 1 bod, za uvedenie, že úloha má štyri riešenia, dajte 2 body. Pokiaľ nebude uvedený žiadny počet riešení, nedajte žiadny z 2 bodov určených na tento účel.