2015/2016
65. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 26. – 29. 6. 2016.*)

1. Daný je n-uholník $\mathcal{P}$, pričom $n > 4$. Dokážte, že existujú tri jeho rôzne vrcholy A, B, C spĺňajúce nasledujúcu vlastnosť: Ak l_1, l_2, l_3 sú dĺžky troch lomených čiar, na ktoré vrcholy A, B, C delia obvod mnohouholníka $\mathcal{P}$, tak existuje trojuholník so stranami dĺžok l_1, l_2, l_3. (*Poľsko*)

2. Nech $m, n > 2$ sú dané párne čísla. Uvažujme tabuľku s rozmermi $m \times n$, ktorej každé políčko je zafarbené buď čiernou, alebo bielou farbou. Hádajúca Hanka ofarbenie nevidí, ale môže klásť veštcovi určité otázky. Presnejšie, môže sa spýtať na dve susedné políčka (majúce spoločnú stranu) a veštec odhalí, či tieto dve políčka majú rovnakú, alebo rôznu farbu. Hanka má za úlohu určiť paritu počtu dvojíc susedných políčok, ktoré majú rôznu farbu. Koľko minimálne otázok Hanke určite stačí na to, aby dokázala určiť správnu odpoveď? (*Česká rep.*)

3. Nech n je dané kladné celé číslo. Pre konečnú množinu M kladných celých čísel a pre každé $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ označíme s_i počet takých neprázdnych podmnožín množiny M, ktorých súčet prvkov dáva po delení n zvyšok i. Hovoríme, že množina M je *n-vyvážená*, pokiaľ $s_0 = s_1 = \ldots = s_{n-1}$. Napríklad pre $n = 5$ a $\mathsf{M} = \{1, 3, 4\}$ máme $s_0 = s_1 = s_2 = 1$ a $s_3 = s_4 = 2$, takže M nie je 5-vyvážená. Dokážte, že pre každé nepárne kladné číslo n existuje n-vyvážená podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. (*Česká rep.*)

4. Nájdite všetky štvorice (a, b, c, d) reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a^2+b^2) &= (c+d)(c^2+d^2),\\
(a+c)(a^2+c^2) &= (b+d)(b^2+d^2),\\
(a+d)(a^2+d^2) &= (b+c)(b^2+c^2).
\end{aligned}
$$

(*Patrik Bak*)

5. Dokážte, že pre každé nezáporné celé číslo n existujú celé čísla x, y, z také, že

$$\operatorname{nsd}(x, y, z) = 1 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 3^{2^n}.$$

(*Poľsko*)

6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, pričom $|AB| < |AC|$. Označme Ω jeho opísanú kružnicu. Dotyčnica ku kružnici Ω vedená bodom A pretína priamku BC v bode D. Nech G je ťažisko trojuholníka ABC a priamka AG pretína kružnicu Ω v bode $H \neq A$. Predpokladajme, že priamka DG pretína priamky AB a AC postupne v bodoch E a F. Dokážte, že $|\angle EHG| = |\angle GHF|$. (*Patrik Bak*)