2004/2005
54. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

1. *Určte číslice x, y, z tak, aby platila rovnosť*

$$\frac{x+y}{z} = \overline{z{,}yx},$$

kde $\overline{z{,}yx}$ označuje číslo zložené zo z jednotiek, y desatín a x stotín. (J. Zhouf)

Riešenie. Z danej rovnosti pre $z \neq 0$ postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{z} &= \overline{z,yx},\\ \frac{x+y}{z} &= z+\frac{y}{10}+\frac{x}{100},\\ 100(x+y) &= (100z+10y+x)\cdot z.\end{aligned}$$

Keďže x, y, z sú číslice, platia nerovnosti $100\cdot(9+9) \geqq 100(x+y)$ a $(100z+10y+x)\cdot z \geqq 100z\cdot z$; odtiaľ $18 \geqq z^2$. To znamená, že $z \in \{1,2,3,4\}$, lebo hodnota $z=0$ nie je prípustná.

Pre $z=1$ má daná rovnosť tvar

$$\begin{aligned}100(x+y) &= 100+10y+x, \qquad \text{teda}\\ 99x+90y &= 100.\end{aligned}$$

Úvahou o deliteľnosti desiatimi zistíme, že musí byť $x=0$. Potom ale neexistuje žiadne celé y spĺňajúce rovnosť $90y=100$. Preto nemôže byť $z=1$.

Pre $z=2$ má daná rovnosť tvar

$$\begin{aligned}100(x+y) &= (200+10y+x)\cdot 2, \qquad \text{teda}\\ 49x+40y &= 200.\end{aligned}$$

Úvahou o deliteľnosti desiatimi zistíme, že musí byť $x=0$. Potom $y=5$, takže v tomto prípade spĺňajú danú rovnosť číslice $x=0$, $y=5$, $z=2$.

Pre $z=3$ má daná rovnosť tvar

$$\begin{aligned}100(x+y) &= (300+10y+x)\cdot 3, \qquad \text{teda}\\ 97x+70y &= 900.\end{aligned}$$

Úvahou o deliteľnosti desiatimi zistíme, že musí byť $x=0$. Potom ale neexistuje žiadne celé y spĺňajúce rovnosť $70y=900$. Preto nemôže byť $z=3$.

Pre $z=4$ má daná rovnosť tvar

$$\begin{aligned}100(x+y) &= (400+10y+x)\cdot 4, \qquad \text{teda}\\ 24x+15y &= 400.\end{aligned}$$

Tu máme $400 = 24x+15y \leqq 24\cdot 9+15\cdot 9 = 351$, teda nemôže byť $z=4$.

Daná rovnosť je splnená jedine pre $x=0$, $y=5$, $z=2$. Naozaj platí $(0+5)/2 = 2{,}50$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pokiaľ bude riešenie urobené uvedeným spôsobom, tak za ohraničenie $z<5$ dajte 2 body, za vyriešenie rovnice pre jednotlivé hodnoty $z \in \{1,2,3,4\}$ dajte po jednom bode.

2. *Ku každému prirodzenému číslu $n > 2$ nájdite aspoň jednu dvojicu rôznych prirodzených čísel p, q tak, aby číslo $1/n$ bolo aritmetickým priemerom čísel $1/p$ a $1/q$.*

(*L. Boček*)

Riešenie. K ľubovoľne zvolenému prirodzenému číslu $n > 2$ hľadáme príklad takých rôznych prirodzených čísel p, q závislých na čísle n, aby platilo

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

Po úpravách má táto rovnosť tvar

$$2pq = n(p+q), \quad \text{čiže} \quad p(2q-n) = nq.$$

Keďže stačí nájsť jedinú dvojicu čísel p, q, je možné ju hľadať skúšaním niekoľkých jednoduchých možností v poslednej rovnici.

Keď položíme $2q - n = 1$, bude $q = (n+1)/2$ a $p = n(n+1)/2$. Tieto čísla sú prirodzené a navzájom rôzne pre ľubovoľné nepárne číslo $n > 2$.

Ďalej skúsme položiť $2q - n = 2$. Získame tak $q = (n+2)/2$ a $p = n(n+2)/4$. Tieto čísla sú prirodzené a navzájom rôzne pre ľubovoľné párne číslo $n > 2$.

Pre nepárne číslo $n > 2$ teda môžeme položiť $q = (n+1)/2$ a $p = n(n+1)/2$ a pre párne číslo $n > 2$ zasa $q = (n+2)/2$ a $p = n(n+2)/4$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho za vytvorenie rovnosti $p(2q-n) = nq$ alebo inej vhodnej rovnosti, ktorá poslúži pri konštrukcii čísel p a q, dajte 2 body.

---

3. *Ľubovoľným vnútorným bodom P uhlopriečky AC daného obdĺžnika $ABCD$ sú vedené rovnobežky s jeho stranami tak, že pretínajú úsečky AB, BC, CD a DA postupne v bodoch K, L, M a N. Dokážte, že*

a) priamky LM a KN sú rovnobežky,

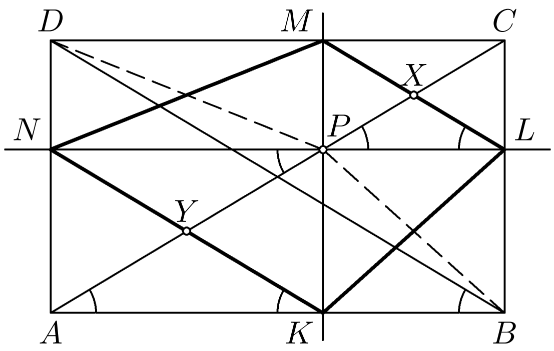
b) vzdialenosť rovnobežiek LM a KN je konštantná (nezávisí na voľbe bodu P),

c) pre obvod o štvoruholníka $KLMN$ platí nerovnosť $o \geqq 2|AC|$.

(*J. Švrček*)

Riešenie. a) AC a BD sú uhlopriečky obdĺžnika $ABCD$, preto sú uhly ABD a BAC zhodné. AP a KN sú uhlopriečky pravouholníka $AKPN$, preto sú uhly AKN, KAP a APN zhodné (obr. 1). PC a LM sú uhlopriečky pravouholníka $PLCM$, preto sú uhly PLM a LPC zhodné. Uhly APN a LPC sú zhodné (vrcholové uhly), preto sú zhodné aj uhly AKN, PLM a ABD. Priamky LM a KN sú teda rovnobežné s uhlopriečkou BD

daného obdĺžnika, a preto sú rovnobežné aj navzájom.



Obr. 1

b) Ak X a Y sú priesečníky priamok LM a KN s uhlopriečkou AC, platí $|XY| = |XP| + |PY| = |CP|/2 + |PA|/2 = (|CP| + |PA|)/2 = |CA|/2$. Úsečka XY má teda dĺžku nezávislú na polohe bodu P. Podľa a) zviera priamka XY s priamkami KN a LM rovnaký uhol ako s priamkou BD, takže tento uhol tiež nezávisí na polohe bodu P. Preto je aj vzdialenosť priamok LM a KN nezávislá na polohe bodu P (a je jednoznačne určená veľkosťou $|XY|$ a uhlom MXP, pričom $|\angle MXP| = 2|\angle ABD|$).

c) KL a BP sú uhlopriečky pravouholníka $KBLP$, sú preto zhodné. Podobne sú MN a PD zhodné uhlopriečky pravouholníka $NPMD$, LM a PC zhodné uhlopriečky pravouholníka $PLCM$ a NK a AP zhodné uhlopriečky pravouholníka $AKPN$. Pre obvod štvoruholníka $KLMN$ tak platí

$$\begin{aligned} o &= |KL| + |LM| + |MN| + |NK| = (|KL| + |MN|) + (|LM| + |NK|) = \\ &= (|BP| + |PD|) + (|PC| + |AP|) \geqq |BD| + |AC| = 2|AC|, \end{aligned}$$

pričom sme využili trojuholníkovú nerovnosť $|BP| + |PD| \geqq |BD|$ pre trojicu bodov B, D, P.

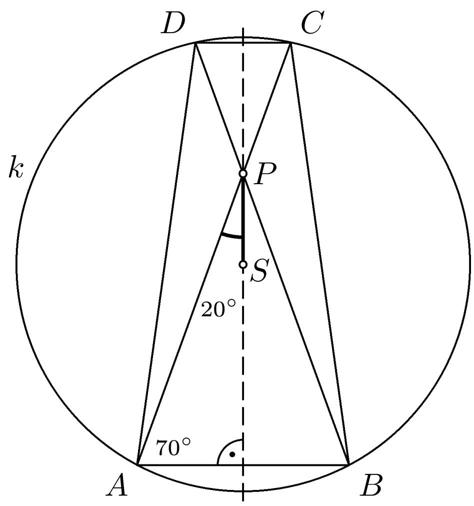
Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za dôkaz tvrdenia a), 2 body za dôkaz tvrdenia b) a 2 body za dôkaz tvrdenia c).

---

4. *Popíšte konštrukciu lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD, ktorému sa dá opísať kružnica s polomerom $r = 5\,\mathrm{cm}$, keď je daná vzdialenosť $d = 2\,\mathrm{cm}$ jej stredu od priesečníka uhlopriečok a $|\angle BAC| = 70°$.* (E. Kováč)

Riešenie. Všimnime si lichobežník $ABCD$, ktorému možno opísať kružnicu. Priamka prechádzajúca jej stredom S kolmo na obe základne AB a CD je osou súmernosti oboch tetív AB a CD, teda aj osou súmernosti celého lichobežníka $ABCD$. Jeho ramená AD a BC sú preto zhodné a priesečník P uhlopriečok AC a BD leží tiež na osi úsečiek AB

a CD. Keďže podľa zadania $|\measuredangle BAC| = 70°$, platí $|\measuredangle APS| = 20°$ (obr. 2).



Obr. 2

Konštrukcia. Zostrojíme úsečku SP, pričom $|SP| = d = 2\,\text{cm}$, a kružnicu $k(S; 5\,\text{cm})$. Bodom P vedieme polpriamky PX a PY tak, aby $|\measuredangle SPX| = |\measuredangle SPY| = 20°$. Priesečníky polpriamok PX a PY s kružnicou k sú body A a B. Potom priesečníky vnútier polpriamok AP a BP s kružnicou k sú body C a D.

Úloha má jediné riešenie.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za zdôvodnenie toho, že body S a P ležia na osi strany AB, 3 body za popis konštrukcie a 1 bod za určenie počtu riešení.