2016/2017
66. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 25. – 28. 6. 2017.*)

1. Nájdite všetky kladné reálne čísla c s nasledujúcou vlastnosťou: Existuje nekonečne veľa dvojíc kladných celých čísel (n, m) takých, že $n \geqq m + c\sqrt{m-1} + 1$ a medzi číslami $n, n+1, \ldots, 2n-m$ sa nenachádza žiadna druhá mocnina celého čísla. (*Patrik Bak*)

2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s opísanou kružnicou ω. Na oblúku BC kružnice ω neobsahujúcom bod A je daný bod D. Bod E leží vnútri trojuholníka ABC mimo priamky AD a spĺňa $|\measuredangle DBE| = |\measuredangle ACB|$ a $|\measuredangle DCE| = |\measuredangle ABC|$. Uvažujme bod F na priamke AD taký, že $EF \parallel BC$ a bod $G \neq A$ na kružnici ω taký, že $|AF| = |FG|$. Dokážte, že body D, E, F, G ležia na jednej kružnici. (*Patrik Bak*)

3. Nech k je kladné celé číslo. Na tabuli je napísaná konečná postupnosť celých čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Maťko a Kubko hrajú hru, ktorá prebieha v nasledujúcich kolách:

- V každom kole najskôr Maťko rozdelí postupnosť, ktorá je na tabuli, na dve alebo viac súvislých podpostupností (t. j. takých, že každá podpostupnosť pozostáva z po sebe idúcich členov pôvodnej postupnosti). Pritom ak je počet podpostupností väčší ako 2, súčet čísel v každej z nich musí byť násobkom k.
- Následne Kubko vyberie jednu z podpostupností a všetky ostatné podpostupnosti z tabule zotrie.

Hra končí v momente, keď na tabuli zostane napísané iba jedno číslo. Dokážte, že Maťko môže svoje ťahy voliť tak, že nezávisle na ťahoch Kubka hra skončí po nanajvýš $3k$ kolách. (*Poľsko*)

4. Daný je trojuholník ABC. Priamka l je rovnobežná so stranou BC a pretína strany AB, AC postupne v bodoch D, E a kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bodoch F, G tak, že body F, D, E, G ležia na priamke l v tomto poradí. Kružnice opísané trojuholníkom FEB a DCG sa pretínajú v bodoch P a Q. Dokážte, že body A, P, Q ležia na jednej priamke. (*Patrik Bak*)

5. Každé zo $4n^2$ políčok tabuľky $2n \times 2n$ $(n \geqq 1)$ je ofarbené buď načerveno, alebo namodro. Hovoríme, že množina štyroch navzájom rôznych políčok tabuľky je *pekná*, ak tieto políčka možno označiť A, B, C, D tak, že A a B ležia v tom istom riadku, C a D ležia v tom istom riadku, A a C ležia v tom istom stĺpci, B a D ležia v tom istom stĺpci, políčka A a D sú modré a políčka B a C sú červené. Určte najväčší možný počet pekných množín v takej tabuľke. (*Poľsko*)

6. Nájdite všetky funkcie $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ také, že

$$f(x) - f(x+y) = f\left(\frac{x}{y}\right) f(x+y) \qquad \text{pre všetky } x, y > 0.$$

(*Rakúsko*)