2016/2017
66. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 17. – 23. 7. 2017.*)

1. Pre dané celé číslo $a_0 > 1$ definujeme postupnosť $a_0, a_1, a_2, \dots$ tak, že pre všetky $n \geqq 0$ platí

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ak } \sqrt{a_n} \text{ je celé číslo,} \\ a_n + 3 & \text{inak.} \end{cases}$$

Určte všetky hodnoty a_0, pre ktoré existuje také číslo A, že pre nekonečne veľa indexov n platí $a_n = A$.
(*Južná Afrika*)

2. Označme $\mathbb{R}$ množinu reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

(*Albánsko*)

3. Poľovník a neviditeľný zajac hrajú hru v euklidovskej rovine. Zajacova počiatočná poloha A_0 a poľovníkova počiatočná poloha B_0 sú zhodné. Po $n-1$ kolách sa zajac nachádza v bode A_{n-1} a poľovník v bode B_{n-1}. V n-tom kole sa postupne udejú tieto tri veci:

i) Zajac sa neviditeľne presunie do bodu A_n, pričom vzdialenosť medzi A_{n-1} a A_n je presne 1.
ii) Sledovacie zariadenie ukáže poľovníkovi bod P_n. Jediná záruka, ktorú sledovacie zariadenie poľovníkovi poskytuje, je, že vzdialenosť medzi bodmi P_n a A_n je nanajvýš 1.
iii) Poľovník sa viditeľne presunie do bodu B_n, pričom vzdialenosť medzi B_{n-1} a B_n je presne 1.

Dokáže poľovník vždy (t. j. bez ohľadu na to, ako sa presúva zajac a bez ohľadu na to, aké body ukazuje sledovacie zariadenie) voliť svoje ťahy tak, že po 10^9 kolách má istotu, že vzdialenosť medzi ním a zajacom je nanajvýš 100?
(*Rakúsko*)

4. Na kružnici Ω sú dané dva rôzne body R a S, pričom RS nie je jej priemerom. Označme l dotyčnicu kružnice Ω v bode R. Nech T je taký bod, že S je stredom úsečky RT. Na kratšom oblúku RS kružnice Ω je zvolený bod J tak, že kružnica Γ opísaná trojuholníku JST pretína priamku l v dvoch rôznych bodoch. Označme A ten priesečník Γ s l, ktorý je bližšie k bodu R. Priamka AJ pretína kružnicu Ω v bode K ($K \neq J$). Dokážte, že priamka KT je dotyčnicou kružnice Γ.
(*Luxembursko*)

5. Dané je celé číslo $N \geqq 2$. Skupina $N(N+1)$ futbalistov, z ktorých žiadni dvaja nemajú rovnakú výšku, stojí v rade. Tréner Ján chce odstrániť $N(N-1)$ futbalistov z tohto radu tak, aby nový rad pozostávajúci zo zvyšných $2N$ futbalistov spĺňal nasledovných N podmienok:

1) nikto nestojí medzi dvoma najvyššími futbalistami,
2) nikto nestojí medzi tretím a štvrtým najvyšším futbalistom,

⋮

N) nikto nestojí medzi dvoma najnižšími futbalistami.

Dokážte, že je to vždy možné.
(*Rusko*)

6. Usporiadaná dvojica celých čísel (x, y) sa nazýva *primitívny mrežový bod*, keď najväčší spoločný deliteľ čísel x a y je 1. Dokážte, že pre ľubovoľnú konečnú množinu S primitívnych mrežových bodov existuje kladné celé číslo n a celé čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ také, že pre všetky (x, y) z S platí

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

(*USA*)