2016/2017

66. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 23. – 29. 4. 2017.*)

1. Tri zajace hodnotia kvalitu $2n+1$ mrkiev. Každý zajac priradí mrkvám ohodnotenia od 0 po $2n$, každé práve raz (každej mrkve práve jedno). Celkové ohodnotenie mrkvy je súčtom troch ohodnotení danej mrkvy zajacmi. Mrkva M_1 je lepšia ako mrkva M_2, ak aspoň dva zajace ohodnotili mrkvu M_1 ostro väčším ohodnotením ako M_2. Ukážte, že každá mrkva je lepšia ako práve n iných mrkiev práve vtedy, keď majú všetky mrkvy rovnaké celkové ohodnotenie.

2. Dokážte, že v každom trojuholníku so stranami a, b, c a polomerom opísanej kružnice R platí

$$9R^2 \geqq a^2 + b^2 + c^2.$$

3. Nech ABC je trojuholník s vpísanou kružnicou k. Označme body dotyku k so stranami BC a AC postupne D_1 a E_1. Body D_2 a E_2 ležia na stranách BC a AC, pričom platí $|CD_2| = |BD_1|$ a $|CE_2| = |AE_1|$. Priesečník AD_2 a BE_2 označme P. Kružnica k pretína AD_2 v dvoch bodoch, z ktorých ten bližší k vrcholu A označíme Q. Dokážte, že $|AQ| = |D_2P|$.

4. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pre ktoré platí

$$f(a^3 + b^3 + c^3) = f^3(a) + f^3(b) + f^3(c).$$

5. Pre ľubovoľné prirodzené číslo k označíme $S(k)$ jeho ciferný súčet. Nájdite všetky polynómy P s celočíselnými koeficientmi také, že pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 2017$ platí $P(n) > 0$ a

$$S(P(n)) = P(S(n)).$$

6. Nájdite všetky prirodzené čísla n s nasledujúcou vlastnosťou: Pre ľubovoľné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spĺňajúce $|a_i| + |b_i| = 1$ pre všetky $1 \leqq i \leqq n$ existujú čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ také, že

$$|x_i| = 1 \quad \text{pre všetky } 1 \leqq i \leqq n \qquad \text{a} \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right| \leqq 1.$$

7. Nech ABC je rovnoramenný trojuholník s $|AB| = |AC| > |BC|$ a nech I je stred vpísanej kružnice do tohto trojuholníka. Polpriamka BI pretína stranu AC v bode D a priamka kolmá na AC prechádzajúca bodom D pretína AI v bode E. Označme J obraz bodu I v osovej súmernosti podľa priamky AC. Dokážte, že body B, E, D, J ležia na jednej kružnici.

8. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňa $a_1 = 0$ a pre každé $i \geqq 1$ platí $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq -\frac{1}{2}.$$

9. V hoteli sa nachádza $n \geqq 3$ izieb, ktoré sú rozmiestnené pozdĺž kruhovej chodby. V každej izbe je prepínač svetla. Keď ho prepneme, zmeníme stav svetla (zo zapnutého na vypnutý a naopak) v danej izbe a tiež v oboch susedných izbách. Pre ktoré hodnoty n je možné vždy (bez ohľadu na počiatočný stav svetiel) pomocou konečného počtu prepnutí zhasnúť všetky svetlá?

10. Daný je trojuholník ABC. Priamka rovnobežná so stranou BC pretína strany AB a AC postupne v bodoch P a Q. Nech M je vnútorný bod trojuholníka APQ. Úsečky MB a MC pretínajú úsečku PQ postupne v bodoch E a F. Označme N druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom PMF a QME. Dokážte, že body A, M, N ležia na jednej priamke.

11. Nech p, q sú prvočísla, pričom $q \neq 2$. Dokážte, že celé číslo x spĺňajúce

$$q \mid (x+1)^p - x^p$$

existuje práve vtedy, keď

$$q \equiv 1 \pmod{p}.$$

12. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník s opísanou kružnicou k a nech r a s sú postupne obrazy priamky AB v osovej súmernosti podľa osi vnútorného uhla CAD a CBD. Priamky r a s sa pretínajú v bode P, ktorý sa nachádza vo vonkajšej oblasti kružnice k. Označme O stred kružnice k. Dokážte, že priamky OP a CD sú na seba kolmé.

13. Nájdite najväčší možný konečný počet koreňov rovnice

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_{42}| = |x - b_1| + |x - b_2| + \ldots + |x - b_{42}|,$$

kde a_1, a_2, …, a_{42}, b_1, b_2, …, b_{42} sú po dvoch rôzne reálne čísla.

14. Uvažujme štvorčekovú mriežku $n \times n$, kde n je kladné celé číslo. V jednom ťahu vyberieme štyri políčka, ktoré ležia na prieniku dvoch riadkov a dvoch stĺpcov a na každé z nich položíme žetón. Tento ťah môžeme spraviť len vtedy, keď aspoň jedno zo štyroch vybraných políčok je prázdne. V závislosti od čísla n určte najväčší počet ťahov, ktorý môžeme spraviť, ak začíname s prázdnou mriežkou.

15. Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že $\varphi(n)$ delí $n^2 + 3$. (Číslo $\varphi(n)$ označuje Eulerovu funkciu, t. j. počet kladných celých čísel neprevyšujúcich n, ktoré sú s číslom n nesúdeliteľné.)

16. Je daný rôznostranný ostrouhlý trojuholník ABC. Nech H je jeho ortocentrum a O stred kružnice opísanej. Ďalej nech $B' = BH \cap AC$, $C' = CH \cap AB$, $P = AH \cap B'C'$ a $T = AO \cap BC$. Označme M stred strany BC. Dokážte, že $MH \parallel TP$.

17. Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že do buniek obdĺžnikovej tabuľky vieme napísať všetky kladné delitele čísla n tak, že sú splnené nasledovné podmienky:

- všetky bunky obsahujú navzájom rôzne delitele;
- súčty vo všetkých riadkoch sú rovnaké;
- súčty vo všetkých stĺpcoch sú rovnaké.

18. Nájdite najmenšiu reálnu konštantu C takú, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a_1, a_2, a_3, a_4 a a_5 (nie nutne rôzne) vieme zvoliť rôzne indexy i, j, k a l také, že

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leqq C.$$