**2015/2016**
**65. ročník MO** *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 15. – 18. 5. 2016.*)

**Súťaž jednotlivcov:**

**I-1.** V rovine je daná úsečka $AB$ so stredom $M$. Uvažujme množinu všetkých pravouhlých trojuholníkov $ABC$ s preponou $AB$, v ktorých $D$ je päta výšky z vrcholu $C$ a $K$, $L$ sú päty kolmíc spustených z bodu $D$ postupne na odvesny $BC$, $AC$. Určte, aký je najväčší možný obsah štvoruholníka $MKCL$. (*Jaroslav Švrček*)

**I-2.** Pre reálne čísla $x$, $y$ platí $x^2 + y^2 - 1 < xy$. Dokážte, že potom $x + y - |x - y| < 2$. (*Pavol Kossaczký*)

**I-3.** Určte všetky celé čísla $n \geqq 3$ také, že vrcholy pravidelného $n$-bokého hranola sa dajú označiť navzájom rôznymi kladnými celými číslami tak, aby vrcholy s číslami $a$ a $b$ boli spojené hranou práve vtedy, keď $a \mid b$ alebo $b \mid a$. (*Barbara Roszkowska-Lech*)

**I-4.** Daný je ostrouhlý trojuholník $ABC$, v ktorom $|AB| < |AC| < |BC|$. Na stranách $AC$ a $BC$ sú postupne zvolené také body $K$ a $L$, že $|AB| = |CK| = |CL|$. Osi úsečiek $AK$ a $BL$ pretínajú priamku $AB$ postupne v bodoch $P$ a $Q$. Úsečky $KP$ a $LQ$ sa pretínajú v bode $M$. Dokážte, že $|AK| + |KM| = |BL| + |LM|$. (*Łukasz Bożyk*)

**I-5.** Určte najmenšie celé číslo $j$, pri ktorom možno do jednotlivých políčok štvorcovej tabuľky $10 \times 10$ vpísať celé čísla od 1 do 100 tak, aby každých 10 po sebe idúcich čísel ležalo v niektorej štvorcovej časti $j \times j$ celej tabuľky. (*Jaromír Šimša*)

**Súťaž družstiev:**

**T-1.** Je dán pravoúhlý trojúhelník $ABC$ s přeponou $AB$. Označme $D$ patu výšky z vrcholu $C$. Nechť $Q$, $R$ a $P$ jsou po řadě středy úseček $AD$, $BD$ a $CD$. Dokažte, že platí

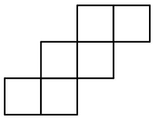
$$|\measuredangle APB| + |\measuredangle QCR| = 180^\circ.$$

(*Jaroslav Švrček*)

**T-2.** Najděte největší možné celé číslo $d$, které současně dělí tři trojciferná čísla $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ a $\overline{cab}$, kde $a$, $b$ a $c$ jsou vhodné nenulové a navzájem různé číslice. (*Jaromír Šimša*)

**T-3.** Na płaszczyźnie poprowadzono pewną liczbę prostych tak, że każda przecina dokładnie 15 innych. Ile prostych poprowadzono? Scharakteryzuj wszystkie możliwe konfiguracje i uzasadnij, że nie ma innych. (*Barbara Roszkowska-Lech*)

**T-4.** Pewną liczbę płytek przystających do przedstawionej na rysunku 1 należy umieścić wewnątrz kwadratu o wymiarach $11 \times 11$ podzielonego na pola będące kwadratami jednostkowymi w taki sposób, aby każda płytka pokrywała dokładnie 6 pól, żadna nie wystawała poza kwadrat oraz żadne dwie nie pokrywały tego samego pola.



Obr. 1

a) Wyznacz największą możliwą liczbę płytek, którą można umieścić wewnątrz kwadratu w opisany sposób.
b) Znajdź wszystkie pola, które muszą zostać przykryte przy każdym pokryciu z użyciem maksymalnej liczby płytek.

(*Jerzy Bednarczuk*)

**T-5.** Daný je trojuholník $ABC$ taký, že $|AB| : |AC| : |BC| = 5 : 5 : 6$. Označme $M$ stred strany $BC$ a $N$ taký bod na strane $BC$, že $|BN| = 5 \cdot |CN|$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku $ABN$ je stredom úsečky spájajúcej stredy kružníc vpísaných trojuholníkom $ABC$ a $ABM$. (*Patrik Bak*)

**T-6.** Dané je kladné celé číslo $k$. Nájdite všetky trojice kladných celých čísel $a$, $b$, $c$, ktoré spĺňajú rovnosti

$$a + b + c = 3k + 1,$$
$$ab + bc + ca = 3k^2 + 2k.$$

(*Patrik Bak*)