**2016/2017**
**66. ročník MO** *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 14. – 17. 5. 2017.*)

**Súťaž jednotlivcov:**

**I-1.** Nájdite najväčšie celé číslo $n \geqq 3$, pre ktoré existuje $n$-ciferné číslo $\overline{a_1a_2a_3\dots a_n}$ s nenulovými ciframi $a_1$, $a_2$ a $a_n$, ktoré je deliteľné číslom $\overline{a_2a_3\dots a_n}$. (*Jaromír Šimša*)

**I-2.** Daný je trojuholník $ABC$, pričom $|AB| + |AC| = 3 \cdot |BC|$. Označme $D$, $E$ také body, že $BCDA$ a $CBEA$ sú rovnobežníky. Na stranách $AC$ a $AB$ sú postupne zvolené body $F$ a $G$ tak, že $|AF| = |AG| = |BC|$. Dokážte, že priamky $DF$ a $EG$ sa pretínajú na úsečke $BC$. (*Patrik Bak*)

**I-3.** Dokážte, že pre všetky reálne čísla $x$, $y$ platí

$$(x^2+1)(y^2+1) \geqq 2(xy-1)(x+y).$$

Pre ktoré celé čísla $x$, $y$ nastáva rovnosť? (*Patrik Bak*)

**I-4.** Daný je pravouhlý trojuholník $ABC$ s obvodom 2, pričom $|\measuredangle ACB| = 90°$. Bod $S$ je stredom kružnice pripísanej k strane $AB$ daného trojuholníka a $H$ je priesečník výšok trojuholníka $ABS$. Určte najmenšiu možnú dĺžku úsečky $HS$. (*Jerzy Bednarczuk*)

**I-5.** V každom políčku tabuľky $(mn+1) \times (mn+1)$ je vpísané reálne číslo z intevalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pritom súčet čísel v každom štvorcovom výseku tabuľky s rozmermi $n \times n$ je rovný $n$. Určte, aký najväčší môže byť súčet všetkých čísel v tabuľke. (*Łukasz Bożyk*)

**Súťaž družstiev:**

**T-1.** Rozhodněte, zda existují prvočísla $p$, $q$, $r$ taková, že

$$(p^2+p)(q^2+q)(r^2+r)$$

je druhou mocninou některého celého čísla. (*Kamil Rychlewicz*)

**T-2.** Rozhodněte, zda existuje konvexní šestiúhelník, jehož všechny strany mají délky větší než 1 a všech devět jeho úhlopříček má délky menší než 2. (*Vojtech Bálint*)

**T-3.** Ile jest 8-cyfrowych liczb postaci $*2*0*1*7$, gdzie cztery nieznane cyfry zastąpiono gwiazdkami, które są podzielne przez 7? (*Peter Novotný*)

**T-4.** Bolek narysował na tablicy trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$), a w nim jego linię środkową $EF$. Punkt przecięcia jego przekątnych $AC$, $BD$ oznaczył przez $P$, a jego rzut prostokątny na prostą $AB$ oznaczył przez $Q$. Lolek, chcąc dokuczyć Bolkowi, zmazał z tablicy wszystko oprócz odcinków $EF$ i $PQ$. Gdy Bolek to zobaczył, chciał uzupełnić rysunek i dorysować wyjściowy trapez, ale nie wiedział jak to zrobić. Czy umiesz pomóc Bolkowi? (*Libuše Hozová, Jaroslav Švrček*)

**T-5.** Do každého políčka štvorcovej tabuľky $100 \times 100$ vpíšeme číslo 1, 2 alebo 3. Uvažujme všetky podtabuľky $m \times n$, pričom $m \geqq 2$ a $n \geqq 2$. Podtabuľku nazveme *vyrovnaná*, ak má vo svojich rohových políčkach štyri rovnaké čísla. Pre čo najväčšie číslo $k$ dokážte, že vždy môžeme nájsť $k$ vyrovnaných podtabuliek, z ktorých žiadne dve sa neprekrývajú, t. j. nemajú spoločné políčko. (*Jaromír Šimša*)

**T-6.** Na tabuli je napísaných 100 navzájom rôznych kladných reálnych čísel, pričom pre ľubovoľné tri rôzne čísla $a$, $b$, $c$ je číslo $a^2+bc$ celé. Dokážte, že pre ľubovoľné dve čísla $x$, $y$ z tabule je číslo $\frac{x}{y}$ racionálne. (*Dominik Burek*)