2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *Určte všetky dvojice (p, q) reálnych čísel také, že rovnica $x^2 + px + q = 0$ má riešenie v obore reálnych čísel, pričom platí: Ak t je koreňom tejto rovnice, potom aj $|2t - 15|$ je jej koreňom.* (*P. Černek*)

Riešenie. Nech t, s sú reálne korene danej kvadratickej rovnice. Zaoberajme sa najskôr prípadom, keď uvažovaná kvadratická rovnica má dvojnásobný (reálny) koreň. Vtedy platí $t = s$, pričom podľa podmienok úlohy je $t = |2t - 15|$. Pre $t \geqq 15/2$ dostávame rovnicu $t = 2t - 15$ s riešením $t = 15$, pre $t < 15/2$ rovnicu $t = -(2t - 15)$ s riešením $t = 5$. Im prislúchajúce kvadratické rovnice majú tvar $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 = 0$ a $(x - 15)^2 = x^2 - 30x + 225 = 0$.

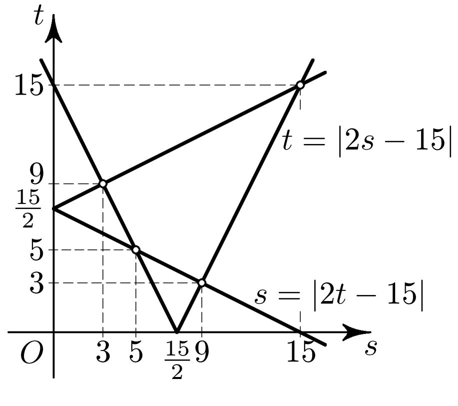
Venujme sa ďalej prípadu, keď uvažovaná kvadratická rovnica má dva rôzne reálne korene t, s. Rozoberieme tri prípady.

Ak $t = |2t - 15|$ a súčasne $s = |2s - 15|$, tak riešenia oboch rovníc (podľa predchádzajúceho) tvoria dvojicu $\{t, s\} = \{5, 15\}$. Prislúchajúca kvadratická rovnica má tvar $(x - 5)(x - 15) = x^2 - 20x + 75 = 0$.

Ak $t = |2s - 15|$ a súčasne $s = |2t - 15|$, tak riešením štyroch sústav rovníc

$$t = \pm(2s - 15), \quad s = \pm(2t - 15)$$

(ktoré zodpovedajú rôznym voľbám znamienok) dostaneme dvojice (s, t) rovné $(15, 15)$, $(5, 5)$, $(3, 9)$ a $(9, 3)$. Z nich len posledné dve vyhovujú pôvodnej sústave a podmienke $s \neq t$. Dodajme, že sústavu rovníc $t = |2s - 15|$ a $s = |2t - 15|$ možno riešiť aj graficky v rovine Ost, do ktorej zakreslíme obe lomené čiary $t = |2s - 15|$ a $s = |2t - 15|$ (obr. 1). Dvojiciam $(3, 9)$ a $(9, 3)$ prislúcha kvadratická rovnica $(x - 3)(x - 9) = x^2 - 12x + 27 = 0$.



Obr. 1

Ak $t = |2t - 15| = |2s - 15|$, tak už vieme, že rovnica $t = |2t - 15|$ má riešenie $t = 5$ a $t = 15$. Pre $t = 5$ z rovnice $5 = |2s - 15|$ vyplýva $s = 5$ alebo $s = 10$, pre $t = 15$ z rovnice $15 = |2s - 15|$ vyplýva $s = 0$ alebo $s = 15$. Vzhľadom na podmienku $s \neq t$ tak dostávame dve riešenia $(t, s) = (5, 10)$ a $(t, s) = (15, 0)$. Týmto riešeniam potom prislúchajú postupne dve kvadratické rovnice $(x-5)(x-10) = x^2 - 15x + 50 = 0$ a $(x-15)x = x^2 - 15x = 0$.

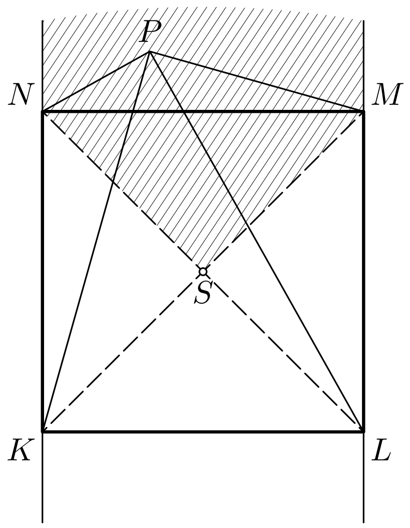
Záver. Danej úlohe vyhovuje šesť dvojíc (p, q) reálnych čísel, a to dvojice $(-10, 25)$, $(-30, 225)$, $(-20, 75)$, $(-12, 27)$, $(-15, 50)$ a $(-15, 0)$.

---

2. *V rovine daného štvorca $KLMN$ určte množinu všetkých bodov P, pre ktoré sú uhly NPK, KPL a LPM zhodné.* (J. Švrček)

Riešenie. Označme $\mathcal{P}$ hľadanú množinu bodov a S stred štvorca $KLMN$. Zrejme $S \in$ $\in \mathcal{P}$ (obr. 2).

Ďalej určíme všetky hľadané body P ($P \neq S$), ktoré ležia vnútri pásu ohraničeného rovnobežkami KN a LM. Ukážeme, že každý taký bod P leží v polrovine opačnej k polrovine MNK alebo vnútri trojuholníka MNS. Pre každý bod P uvažovaného pásu, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine KLM, totiž platí $|\measuredangle KPL| > |\measuredangle KPN|$, lebo polpriamka PN leží v uhle KPL. Ďalej pre body P vnútri trojuholníka KSN zrejme platí $|\measuredangle NPK| > 90° > |\measuredangle LPM|$ a pre body P vnútri trojuholníka LMS zasa $|\measuredangle NPK| < 90° < |\measuredangle LPM|$. A konečne pre každý bod P v trojuholníku KLS (mimo jeho vrcholov) je uhol KPL väčší ako $90°$, zatiaľ čo aspoň jeden z uhlov NPK a LPM je menší ako $90°$ (vnútorné oblasti Tálesových kružníc nad priemermi NK a LM majú prázdny prienik).



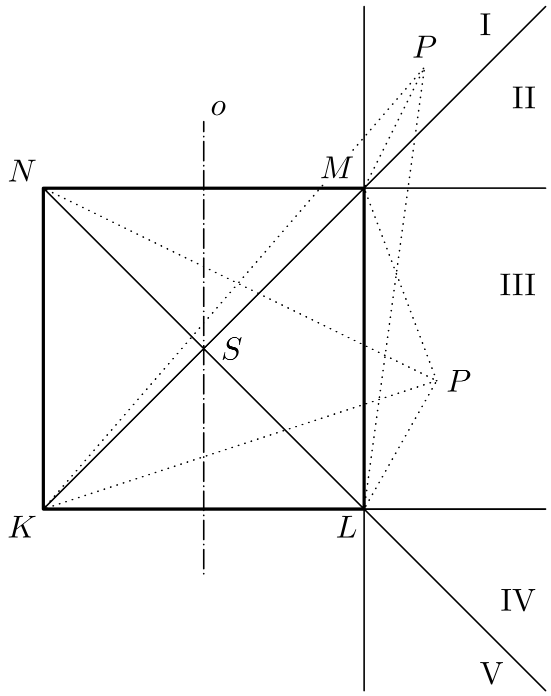
Obr. 2

Ak teda hľadaný bod P leží vo vyšrafovanej oblasti na obr. 2, sú priamky PK a PL podľa zadania osami uhlov NPL a KPM. Preto v trojuholníku LPN os PK uhla NPL pretína kružnicu opísanú tomuto trojuholníku (okrem bodu P) v bode ležiacom na osi strany NL. Týmto bodom je však vrchol K štvorca $KLMN$. Body P, N, K, L teda ležia na jednej kružnici, ktorou je kružnica opísaná štvorcu $KLMN$. (Analogický výsledok dostaneme, keď uvažujeme os PL uhla KPM.) Bod P preto leží na kratšom oblúku MN kružnice opísanej štvorcu $KLMN$ (označme ho ℓ). Naopak, pre každý bod $P \in \ell$ platí podľa vety o obvodových uhloch (pre zhodné tetivy NK, KL, LM)

$$|\measuredangle NPK| = |\measuredangle KPL| = |\measuredangle LPM| = 45°.$$

Tým je hľadanie bodov P v páse medzi rovnobežkami KM a LM ukončené.

Ďalej ľahko nahliadneme, že ľubovoľný vnútorný bod P každej z polpriamok opačných k polpriamkam KM, LN, MK, NL danú vlastnosť má. Ukážeme, že žiadny ďalší bod roviny štvorca $KLMN$ uvedenú vlastnosť nemá. Stačí sa pritom vďaka symetrii zaoberať len jednou z polrovín ohraničených osou o strany KL daného štvorca. Pretože sme už vyšetrili celý pás ohraničený rovnobežkami KN a LM, stačí (bez ujmy na všeobecnosti) skúmať len body polroviny opačnej k polrovine LMN. Priamky KL, MN, LM, KM a LN delia túto polrovinu na päť častí (obr. 3), pritom žiadny bod priamok KL, LM a MN danú vlastnosť očividne nemá.

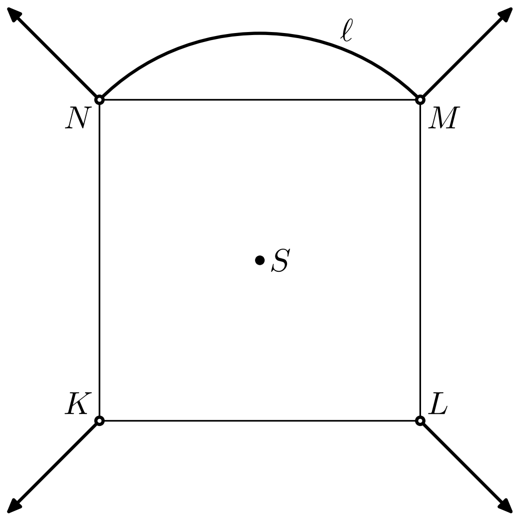


Obr. 3

Ukážeme, že žiadny vnútorný bod každej z oblastí I až V roviny štvorca $KLMN$ nie je prvkom množiny $\mathcal{P}$. Ak P je vnútorným bodom oblasti I, evidentne platí $|\measuredangle KPL| > |\measuredangle LPM|$ (obr. 3). Ak P je vnútorným bodom ľubovoľnej z oblastí II alebo III, platí naopak $|\measuredangle KPL| < |\measuredangle LPN|$. Pre ľubovoľný vnútorný bod oblasti IV zasa platí $|\measuredangle NPK| > |\measuredangle KPL|$ a pre ľubovoľný vnútorný bod P oblasti V platí naopak $|\measuredangle NPK| < |\measuredangle KPL|$. Vo všetkých piatich uvažovaných prípadoch sme sa tak vždy dostali do sporu s podmienkami úlohy.

Tým sme preskúmali všetky body roviny štvorca $KLMN$.

Záver. Hľadaná množina bodov P sa skladá zo všetkých vnútorných bodov kratšieho oblúka MN kružnice opísanej danému štvorcu $KLMN$, zo všetkých vnútorných bodov polpriamok opačných k polpriamkam KM, LN, MK a NL a zo stredu S daného štvorca (obr. 4).



Obr. 4

---

3. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo k zostavme z písmen A, B všetky možná „slová“ dĺžky k. Rozdeľme ich do dvoch skupín P_k a N_k podľa toho, či je v danom slove párny alebo nepárny počet „slabík“ BA (za párny považujeme aj počet 0). Napríklad slová $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patria do skupiny P_7, slová $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patria do skupiny N_7. Zistite, pre ktoré k majú skupiny P_k a N_k rovnaký počet prvkov.*

(J. Šimša)

Riešenie. Skupinu P_k rozdeľme na dve časti $(PA)_k$ a $(PB)_k$ podľa toho, či slovo skupiny P_k končí písmenom A, alebo písmenom B. Skupinu N_k rozdeľme analogicky na dve časti $(NA)_k$ a $(NB)_k$. Označme ďalej p_k, n_k, $(pA)_k$, $(pB)_k$, $(nA)_k$, $(nB)_k$ postupne počty prvkov skupín P_k, N_k, $(PA)_k$, $(PB)_k$, $(NA)_k$, $(NB)_k$. Pre každé prirodzené číslo k potom podľa nášho rozdelenia platí

$$\begin{aligned} p_k &= (pA)_k + (pB)_k, \\ n_k &= (nA)_k + (nB)_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Každé slovo zo skupiny $(PA)_{k+1}$ vznikne tak, že pripíšeme písmeno A buď na koniec slova zo skupiny $(PA)_k$, alebo na koniec slova zo skupiny $(NB)_k$. Platí preto

$$(pA)_{k+1} = (pA)_k + (nB)_k.$$

Analogicky platia tiež vzťahy

$$\begin{aligned} (pB)_{k+1} &= (pA)_k + (pB)_k, \\ (nA)_{k+1} &= (pB)_k + (nA)_k, \\ (nB)_{k+1} &= (nA)_k + (nB)_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Pre $n = 1$ majú skupiny tvar

$$(PA)_1 = \{A\}, \quad (PB)_1 = \{B\}, \quad (NA)_1 = \emptyset, \quad (NB)_1 = \emptyset,$$

a teda $(pA)_1 = (pB)_1 = 1$ a $(nA)_1 = (nB)_1 = 0$.

Predpokladajme, že pre nejaké prirodzené číslo m obsahujú skupiny $(PA)_m$ a $(PB)_m$ rovnaký počet prvkov, ktorý označíme q, a zároveň skupiny $(NA)_m$ a $(NB)_m$ majú rovnaký počet prvkov, ktorý označíme r. Naviac predpokladajme, že platí $q \neq r$, ako to platí v prípade $m = 1$, keď $q = 1$ a $r = 0$. Do nasledujúcej tabuľky zapíšme počty prvkov v skupinách pre čísla k rovné m, $m+1$, $m+2$, $m+3$ a $m+4$. Pritom pre výpočty hodnôt využijeme vzťahy (1) a (2).

k	m	$m+1$	$m+2$	$m+3$	$m+4$
$(pA)_k$	q	$q+r$	$q+3r$	$2q+6r$	$6q+10r$
$(pB)_k$	q	$2q$	$3q+r$	$4q+4r$	$6q+10r$
$(nA)_k$	r	$q+r$	$3q+r$	$6q+2r$	$10q+6r$
$(nB)_k$	r	$2r$	$q+3r$	$4q+4r$	$10q+6r$
p_k	$2q$	$3q+r$	$4q+4r$	$6q+10r$	$12q+20r$
n_k	$2r$	$q+3r$	$4q+4r$	$10q+6r$	$20q+12r$

Z tabuľky možno vyčítať niekoľko poznatkov. Pretože $q \neq r$, platí aj $2q \neq 2r$, $3q + r \neq$ $\neq q + 3r$ a $6q + 10r \neq 10q + 6r$. Vidíme, že $p_m \neq n_m$, $p_{m+1} \neq n_{m+1}$, $p_{m+2} = n_{m+2}$, $p_{m+3} \neq n_{m+3}$ a že skupiny $(PA)_{m+4}$ a $(PB)_{m+4}$ obsahujú opäť rovnaký počet prvkov a skupiny $(NA)_{m+4}$ a $(NB)_{m+4}$ opäť rovnaký počet prvkov, pritom tieto počty sú navzájom rôzne.

Použitím matematickej indukcie zdôvodníme, že uvedená tabuľka má všetky spomenuté vlastnosti pre každé $m = 4\ell + 1$, kde ℓ je celé nezáporné číslo, takže rovnosť $p_k = n_k$ platí práve vtedy, keď $k = m + 2 = 4\ell + 3$.

Záver. Skupiny P_k a N_k majú rovnaký počet prvkov práve vtedy, keď $k = 4\ell + 3$, kde ℓ je celé nezáporné číslo.

---

4. *Určte najmenšie reálne číslo p také, že nerovnosť*

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leqq \frac{1}{2}n(n+p)$$

platí pre každé prirodzené číslo n. (*S. Trávníček*)

Riešenie. Pre $n = 1$ má daná nerovnosť tvar

$$\sqrt{2} \leqq \frac{1}{2}(p+1), \quad \text{čiže} \quad p \geqq 2\sqrt{2} - 1.$$

Označme $p_1 = 2\sqrt{2} - 1$. Zistili sme, že žiadne číslo p menšie ako p_1 požadovanú vlastnosť nemá. Číslo p_1 teda bude hľadaným číslom, ak ukážeme, že pre každé $n \geqq 1$ platí

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \leqq \frac{1}{2}n(n+p_1). \tag{1}$$

Dôkaz urobíme matematickou indukciou.

1° Pre $n = 1$ je nerovnosť (1) splnená vďaka spôsobu, akým sme číslo p_1 určili.

2° Predpokladajme, že nerovnosť (1) platí pre určité prirodzené číslo n a ukážeme, že platí aj pre prirodzené číslo $n + 1$. Nech teda

$$\begin{aligned} F(n) = \sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \leqq \\ \leqq \frac{1}{2}n(n+p_1). \end{aligned} \tag{2}$$

Pretože
$$F(n+1)=F(n)+\sqrt{(n+1)^2+1},$$
podľa indukčného predpokladu (2) a definície čísla p_1 platí
$$F(n+1)\leqq \frac{1}{2}n\bigl(n+2\sqrt{2}-1\bigr)+\sqrt{(n+1)^2+1}. \tag{3}$$
Teraz dokážeme nerovnosť
$$\frac{1}{2}n\bigl(n+2\sqrt{2}-1\bigr)+\sqrt{(n+1)^2+1}\leqq \frac{1}{2}(n+1)\bigl(n+1+2\sqrt{2}-1\bigr). \tag{4}$$
Jej úpravou dostaneme s ňou ekvivalentnú nerovnosť
$$\sqrt{(n+1)^2+1}\leqq n+\sqrt{2},$$
o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme po umocnení oboch strán na druhú:
$$\bigl(n+\sqrt{2}\bigr)^2=n^2+2\sqrt{2}n+2>n^2+2n+2=(n+1)^2+1.$$
Podľa (3) a (4) platí
$$F(n+1)\leqq \frac{1}{2}(n+1)\bigl(n+1+2\sqrt{2}-1\bigr)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1+p_1),$$
čo je nerovnosť (1) pre hodnotu $n+1$.

Záver. Hľadaným reálnym číslom je číslo $p=2\sqrt{2}-1$.

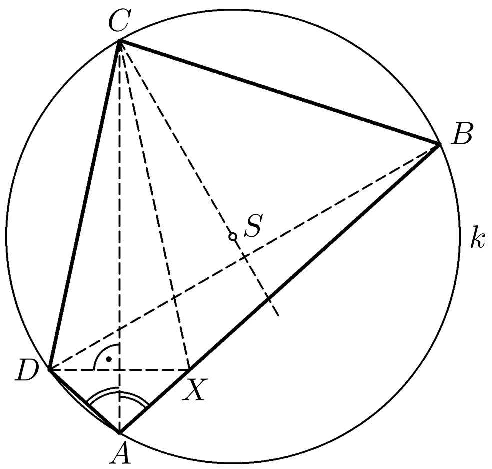
---

5. *Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, ktorého vnútorný uhol pri vrchole B má veľkosť 60°.*

a) Ak $|BC|=|CD|$, potom platí $|CD|+|DA|=|AB|$; dokážte.

b) Rozhodnite, či platí opačná implikácia. (E. Kováč)

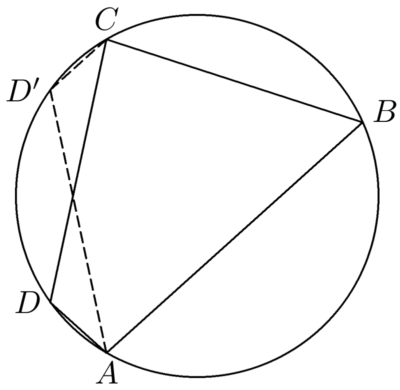
Riešenie. Najskôr sa zamyslime, ako môže taký tetivový štvoruholník $ABCD$ s šesťdesiatstupňovým uhlom pri vrchole B a so zhodnými stranami BC a CD vyzerať. Označme k kružnicu, ktorá je štvoruholníku $ABCD$ opísaná. Pretože $|\angle ABC|=60^\circ$, je už určená veľkosť uhlopriečky AC, ktorá je tetivou prislúchajúcou obvodovému uhlu 60°. Vrchol D potom musí byť vnútorným bodom kratšieho oblúka AC kružnice k (v polrovine opačnej k ACB) a vrchol B je obrazom bodu D v súmernosti podľa priamky SC (obr. 5), kde S je stred kružnice k.



Obr. 5

Pretože podľa predpokladu platí $|BC| = |CD|$, sú obvodové uhly BAC a CAD prislúchajúce zhodným tetivám zhodné. Vidíme teda, že polpriamky AD a AB sú súmerne združené podľa osi AC. Označme X obraz bodu D v tejto súmernosti (obr. 5). Bod X zrejme leží vnútri strany AB (obraz kratšieho oblúka AC leží celý vo vnútornej oblasti kružnice k), a pretože $|CX| = |CD| = |BC|$, je trojuholník XBC rovnoramenný. Trojuholník XBC je dokonca rovnostranný, pretože veľkosť jeho uhla pri vrchole B je $60°$. Preto $|BX| = |BC| = |CD|$. Zo súmernosti naviac vyplýva $|DA| = |XA|$, takže $|CD| + |DA| = |BX| + |XA| = |AB|$, čo je požadovaná rovnosť v časti a).

Ľahko nahliadneme, že opačná implikácia neplatí. Stačí zobrať taký štvoruholník $ABCD$, ktorý spĺňa predpoklady úlohy, a zároveň v ňom platí $|CD| \neq |DA|$ (taký určite existuje, ako sme naznačili hneď v úvode riešenia). Keď vymeníme strany CD a DA, t. j. nahradíme vrchol D vrcholom D' súmerne združeným s vrcholom D podľa osi uhlopriečky AC (obr. 6), dostaneme tetivový štvoruholník $ABCD'$ s šesťdesiatstupňovým uhlom pri vrchole B, ktorý bude aj naďalej spĺňať rovnosť $|CD'| + |D'A| = |DA| + |CD| = |AB|$, ale bude v ňom platiť $|BC| = |CD| = |D'A| \neq |D'C|$.



Obr. 6

Iné riešenie. Pripomenieme si sínusovú vetu v nasledujúcom tvare, ktorý vyplýva z vety o obvodových uhloch: Ak R je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC, tak $\sin\alpha = a/(2R)$, kde $a = |BC|$. (Keď doplníme cyklicky ďalšie dve rovnosti, dostaneme odtiaľ jednoducho bežné znenie sínusovej vety.)

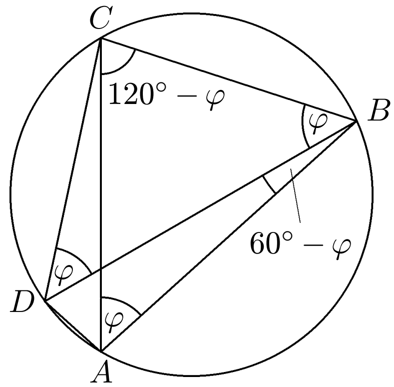
Ak teraz označíme φ obvodový uhol prislúchajúci zhodným tetivám BC a CD ($0° < \varphi < 60°$), zistíme, že tetive DA prislúcha obvodový uhol $60° - \varphi$ a tetive AB obvodový uhol $120° - \varphi$ (obr. 7). Dokazovaná rovnosť je potom podľa sínusovej vety ekvivalentná s rovnosťou

$$\sin\varphi + \sin(60° - \varphi) = \sin(120° - \varphi).$$

Pretože $\sin(120° - \varphi) = \sin(60° + \varphi)$, je uvedená rovnosť (po jednoduchej úprave) ekvivalentná s rovnosťou

$$\sin\varphi = 2\cos 60° \sin\varphi,$$

ktorá triviálne platí.



Obr. 7

Rovnako ako v predchádzajúcom riešení si uvedomíme, že rovnosť $|CD| + |DA| = |AB|$ ostane zachovaná, ak v danom štvoruholníku vymeníme strany CD a DA. Nový štvoruholník ostane tetivový, veľkosť jeho vnútorného uhla pri vrchole B sa nezmení, ale namiesto rovnosti $|BC| = |CD|$ bude splnená rovnosť $|BC| = |DA|$.

Iné riešenie. Označme dĺžky strán štvoruholníka $ABCD$, ktorý spĺňa podmienky úlohy, zvyčajným spôsobom a, b, c, d. Pretože vnútorné uhly pri vrcholoch B a D majú veľkosť 60°, resp. 120°, z kosínusovej vety pre trojuholníky ABC a CDA vyplýva (po porovnaní dvoch vyjadrení hodnoty $|AC|^2$) rovnosť

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 + cd. \tag{6}$$

a) Ak $b = c$, možno z rovnosti (6) postupne odvodiť

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - ac &= c^2 + d^2 + cd, \\ a^2 - d^2 &= ac + cd, \\ (a - d)(a + d) &= c(a + d), \\ a - d &= c. \end{aligned}$$

Rovnosť $a = c + d$, ktorú sme mali dokázať, teda platí.

b) Ak platí $a = c + d$, po dosadení za a do rovnosti (6) dostaneme

$$(c + d)^2 + b^2 - (c + d)b = c^2 + d^2 + cd.$$

Odtiaľ po úprave máme vzťah $(b - c)(b - d) = 0$, z ktorého vyplýva, že platí $b = c$ alebo $b = d$. Opačná implikácia teda všeobecne neplatí.

---

6. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*

$$x^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad y^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}, \quad z^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

(*J. Šimša*)

Riešenie. Ak sú čísla x, y, z riešením danej sústavy, zrejme platí $xyz \neq 0$. Vynásobme preto jednotlivé rovnice postupne činiteľmi yz, zx, xy a v obore nenulových reálnych čísel riešme ekvivalentnú sústavu rovníc

$$x^2yz = y + z, \quad xy^2z = x + z, \quad xyz^2 = x + y. \tag{1}$$

Súčtom ľavých a pravých strán tejto sústavy rovníc získame po úprave rovnicu

$$(xyz - 2)(x + y + z) = 0.$$

Odtiaľ vidíme, že platí $xyz = 2$ alebo $x + y + z = 0$. Rozoberme tieto dva prípady osobitne.

Nech $xyz = 2$. Po dosadení za súčin xyz v sústave (1) dostaneme

$$2x = y + z, \quad 2y = x + z, \quad 2z = x + y,$$

čo je ekvivalentné so sústavou

$$3x = x + y + z, \quad 3y = x + y + z, \quad 3z = x + y + z.$$

Odtiaľ vyplýva $x = y = z$. Vzhľadom na podmienku $xyz = 2$ dostaneme $x = y = z = \sqrt[3]{2}$. Skúškou overíme, že trojica $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ je skutočne riešením sústavy (1), a teda aj pôvodnej sústavy rovníc.

Nech $x+y+z = 0$. Z prvej rovnice sústavy (1) vyplýva $x^2yz = -x$, odkiaľ vzhľadom na podmienku $x \neq 0$ dostaneme $xyz = -1$. Overme, že každá trojica nenulových reálnych čísel (x, y, z) spĺňajúca sústavu dvoch rovníc

$$x + y + z = 0, \quad xyz = -1 \tag{2}$$

je riešením pôvodnej sústavy. Z rovností (2) totiž vyplýva

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{y + z}{yz} = \frac{-x}{-1/x} = x^2$$

(vzhľadom na symetriu zadanej sústavy stačilo overiť jednu rovnicu).

Sústava rovníc (2) má v obore nenulových reálnych čísel nekonečne veľa riešení, ktoré získame napríklad tak, že jednu premennú (napr. z) zvolíme ako parameter. Tým dostaneme sústavu

$$x + y = -z, \quad xy = -\frac{1}{z}.$$

Po dosadení za x z prvej rovnice do druhej dostaneme

$$(y + z)y = \frac{1}{z},$$

teda

$$y^2 + yz - \frac{1}{z} = 0. \tag{3}$$

Jedná sa o kvadratickú rovnicu s neznámou y a parametrom z. Jej diskriminant je rovný $D = z^2 + 4/z$. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby táto rovnica mala reálne korene, je nerovnosť $D \geqq 0$. Vyriešením nerovnice $(z^3 + 4)/z \geqq 0$ dostaneme pre parameter z podmienku

$$z \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{4}\right\rangle \cup (0, \infty). \tag{4}$$

Za podmienky (4) má kvadratická rovnica (3) korene

$$y_1 = \frac{-z + \sqrt{z^2 + 4/z}}{2} \quad \text{a} \quad y_2 = \frac{-z - \sqrt{z^2 + 4/z}}{2},$$

ktorým podľa vzťahu $x = -y - z$ zodpovedajú hodnoty

$$x_1 = \frac{-z - \sqrt{z^2 + 4/z}}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-z + \sqrt{z^2 + 4/z}}{2}.$$

Pritom $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ platí iba v prípade $z = -\sqrt[3]{4}$.

Záver. Daná sústava má riešenie $x = y = z = \sqrt[3]{2}$. Všetky ostatné riešenia sú trojice (x, y, z) tvaru

$$(x, y, z) = \left(\frac{-z \pm \sqrt{z^2 + 4/z}}{2}, \frac{-z \mp \sqrt{z^2 + 4/z}}{2}, z \right),$$

kde z je ľubovoľné číslo spĺňajúce podmienku (4).