2016/2017
66. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 21. – 27. 8. 2017.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňajúce

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$

pre všetky reálne čísla x a y. (*Slovensko, Patrik Bak*)

I-2. Nech $n \geqq 3$ je celé číslo. Označenie n vrcholov, n strán a vnútra pravidelného n-uholníka $2n+1$ rôznymi celými číslami nazývame *priemerné*, ak sú splnené nasledovné podmienky:

- Každá strana je označená aritmetickým priemerom čísel na jej koncových vrcholoch.
- Vnútro n-uholníka je označené aritmetickým priemerom všetkých čísel na jeho vrcholoch.

Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$ také, že existuje priemerné označenie pravidelného n-uholníka pozostávajúce z $2n+1$ po sebe idúcich celých čísel. (*Česká rep.*)

I-3. Je daný konvexný päťuholník $ABCDE$. Označme P priesečník priamok CE a BD. Dokážte, že ak platí $|\measuredangle PAD| = |\measuredangle ACB|$ a $|\measuredangle CAP| = |\measuredangle EDA|$, tak bod P leží na priamke určenej stredmi kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE.
(*Slovensko, Patrik Bak*)

I-4. Nájdite najmenšiu hodnotu výrazu

$$|2^m - 181^n|,$$

pričom m a n sú kladné celé čísla. (*Nemecko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Nájdite všetky dvojice polynómov (P, Q) s reálnymi koeficientmi spĺňajúce

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

pre všetky reálne čísla x a y. (*Poľsko*)

T-2. Nájdite najmenšiu možnú reálnu konštantu C takú, že nerovnosť

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqq C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

platí pre všetky reálne čísla x, y, z spĺňajúce $x + y + z = -1$. (*Rakúsko*)

T-3. Na každom políčku tabuľky 2017×2017 je lampa. Každá lampa je buď zapnutá, alebo vypnutá. Lampu nazývame *tônistá*, ak má párny počet zapnutých susedných lámp. Aký je najmenší možný počet tônistých lámp? (Dve lampy sú susedné, ak sa nachádzajú vedľa seba v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci danej tabuľky.)

(*Rakúsko*)

T-4. Nech $n \geqq 3$ je celé číslo. Postupnosť $P_1, P_2, \dots, P_n$ rôznych bodov v rovine nazývame *prešibaná*, ak žiadne tri body postupnosti neležia na jednej priamke, lomená čiara $P_1P_2 \dots P_n$ nepretína samu seba a pre každé $i = 1, 2, \dots, n-2$ je trojuholník $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ orientovaný proti smeru hodinových ručičiek. Pre každé celé číslo $n \geqq 3$ nájdite najväčšie celé číslo k s nasledovnou vlastnosťou: existuje n rôznych bodov $A_1, A_2, \dots, A_n$ ležiacich v jednej rovine takých, že existuje k rôznych permutácií $\sigma\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$, pre ktoré postupnosť $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)}$ je prešibaná. (Lomená čiara $P_1P_2 \dots P_n$ pozostáva z úsečiek P_1P_2, P_2P_3, $\dots$, $P_{n-1}P_n$.) (*Poľsko*)

T-5. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník taký, že $|AB| > |AC|$ a Γ je kružnica jemu opísaná. Stred kratšieho oblúka BC kružnice Γ označme M a priesečník polpriamok AC a BM označme D. Nech $E \neq C$ je priesečník vnútornej osi uhla ACB a kružnice opísanej trojuholníku BDC. Predpokladajme, že bod E leží vo vnútri trojuholníka ABC a existuje priesečník N priamky DE s kružnicou Γ taký, že E je stred úsečky DN. Dokážte, že N je stred úsečky I_BI_C, kde I_B, I_C sú postupne stredy kružníc pripísaných ABC oproti vrcholom B a C. (*Chorvátsko*)

T-6. Nech Γ je kružnica so stredom v bode O opísaná ostrouhlému trojuholníku ABC, pre ktorý platí, že $|AB| \neq |AC|$. Dotyčnice ku kružnici Γ v bodoch B a C sa pretínajú v bode D. Nech priamka AO pretína BC v bode E. Označme M stred úsečky BC a $N \neq A$ priesečník priamky AM a kružnice Γ. Nech $F \neq A$ je bod ležiaci na Γ taký, že A, M, E, F ležia na jednej kružnici. Dokážte, že priamka FN rozpoľuje úsečku MD.

(*Slovensko, Patrik Bak*)

T-7. Nájdite všetky kladné celé čísla $n \geqq 2$ také, že existuje usporiadanie x_0, x_1, $\dots$, x_{n-1} čísel 0, 1, $\dots$, $n-1$ také, že súčty

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \dots, \quad x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}$$

dávajú navzájom rôzne zvyšky po delení n. (*Poľsko*)

T-8. Pre celé číslo $n \geqq 3$ definujeme postupnosť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ako postupnosť exponentov v prvočíselnom rozklade $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sú prvočísla. Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$, pre ktoré je $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ geometrická postupnosť.

(*Rakúsko*)