2003/2004
53. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *Nech $P(x) = ax^2+bx+c$ je kvadratický trojčlen s nezápornými reálnymi koeficientmi. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné číslo x platí*

$$P(x)\cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) \geqq \big(P(1)\big)^2.$$

(*E. Kováč*)

Riešenie. Pretože $P(x)$ je kvadratický trojčlen s nezápornými koeficientmi, je nutne $a > 0$.

Nech x je ľubovoľné kladné reálne číslo a n je číslo prirodzené. Pretože

$$0 \leqq \left(\sqrt{x^n} - \frac{1}{\sqrt{x^n}}\right)^2 = x^n + \frac{1}{x^n} - 2,$$

platí

$$x^n + \frac{1}{x^n} \geqq 2. \tag{1}$$

Pritom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $\sqrt{x^n} = 1/\sqrt{x^n}$, t. j. keď $x = 1$.

Pretože čísla ab, bc a ca sú podľa predpokladov úlohy nezáporné, použitím nerovnosti (1) ďalej dostaneme

$$\begin{aligned}P(x)\cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) &= (ax^2+bx+c)\Big(a\frac{1}{x^2}+b\frac{1}{x}+c\Big) =\\ &= a^2+b^2+c^2+ab\Big(x+\frac{1}{x}\Big)+bc\Big(x+\frac{1}{x}\Big)+ca\Big(x^2+\frac{1}{x^2}\Big) \geqq\\ &\geqq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = (a+b+c)^2 = \big(P(1)\big)^2.\end{aligned}$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = 1$, alebo $ab = bc = ca = 0$, čo vzhľadom na podmienku $a > 0$ dáva $b = c = 0$.

Pre ľubovoľné kladné reálne číslo x teda platí

$$P(x)\cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) \geqq \big(P(1)\big)^2,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = 1$ alebo $b = c = 0$.

Poznámka. Úlohu možno vyriešiť aj použitím Cauchyho nerovnosti:

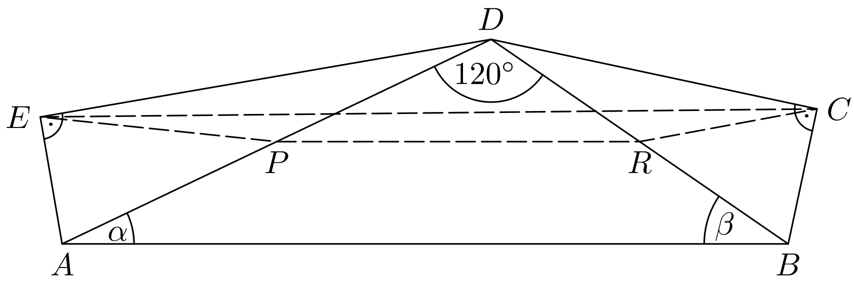
$$\begin{aligned}P(x)\cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) &= (ax^2+bx+c)\Big(a\frac{1}{x^2}+b\frac{1}{x}+c\Big) =\\ &= \Big(\big(\sqrt{a}x\big)^2+\big(\sqrt{bx}\big)^2+\big(\sqrt{c}\big)^2\Big)\left(\left(\frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right)^2+\big(\sqrt{c}\big)^2\right) \geqq\\ &\geqq \left(\sqrt{a}x\cdot\frac{\sqrt{a}}{x}+\sqrt{bx}\cdot\sqrt{\frac{b}{x}}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}\right)^2 = (a+b+c)^2 = \big(P(1)\big)^2.\end{aligned}$$

2. *Určte, akú najväčšiu dĺžku môže mať uhlopriečka CE konvexného päťuholníka $ABCDE$, ktorého strana AB má dĺžku* 6 cm, *vnútorné uhly pri vrcholoch C a E sú pravé a uhol ADB má veľkosť* $120°$. (*P. Černek*)

Riešenie. Nech $ABCDE$ je ľubovoľný konvexný päťuholník s uvažovanými vlastnosťami. Označme P, R postupne stredy strán AD, BD trojuholníka ABD (obr. 1). Potom platí

$$|PR| = \frac{1}{2}|AB|, \qquad |CR| = \frac{1}{2}|BD|, \qquad |PE| = \frac{1}{2}|AD|, \tag{1}$$

pretože PR je stredná priečka trojuholníka ABD a v pravouhlom trojuholníku je stred prepony zároveň stredom jeho opísanej kružnice (Tálesova veta).



Obr. 1

Z trojuholníkovej nerovnosti je zrejmé, že pre dĺžku uhlopriečky CE platí

$$|CE| \leqq |CR| + |RP| + |PE| = s,$$

pričom dĺžka s lomenej čiary $CRPE$ je podľa (1) zároveň rovná polovici obvodu trojuholníka ABD.

Ďalej skúmajme, kedy bude mať trojuholník ABD daných vlastností ($|AB| = 6\,\text{cm}$, $|\measuredangle ADB| = 120°$) najväčší obvod. Ak označíme α a β (obr. 1) veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A a B trojuholníka ABD ($\alpha + \beta = 60°$), dostaneme zo sínusovej vety v trojuholníku ABD

$$|BD| = |AB|\frac{\sin\alpha}{\sin 120°}, \quad |AD| = |AB|\frac{\sin\beta}{\sin 120°}.$$

Sčítaním oboch predchádzajúcich rovností vyjde

$$|AD| + |BD| = |AB|\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin 120°} = \\ = 2|AB|\frac{\sin 30°}{\sin 120°}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqq 2|AB|\frac{\sqrt{3}}{3},$$

pričom rovnosť v ostatnej nerovnosti nastáva práve vtedy, keď $\cos(\alpha/2 - \beta/2) = 1$, t. j. pre $\alpha = \beta = 30°$. Trojuholník ABD má teda najväčší obvod práve vtedy, keď je rovnoramenný a jeho uhly pri základni AB majú veľkosť $30°$. Vzhľadom na to, že $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, platí pre ľubovoľný päťuholník $ABCDE$ požadovaných vlastností

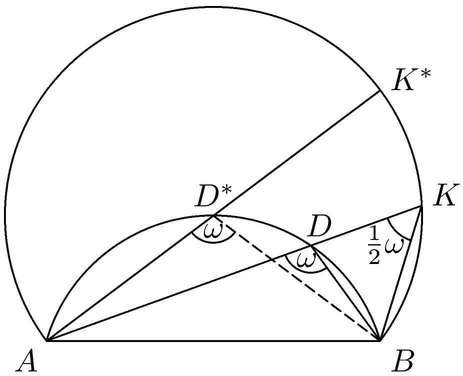
$$|CE| \leqq s = \frac{1}{2}(|AB| + |AD| + |BD|) \leqq \frac{1}{2}|AB|\left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \\ = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\,\mathrm{cm}.$$

Pritom pre uvažovaný päťuholník $ABCDE$ v situácii, keď trojuholník ABD je rovnoramenný a vrcholy C, E ležia na priamke RP, platí $|CE| = (3 + 2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$.

Najväčšia dĺžka uhlopriečky CE päťuholníka $ABCDE$ vyhovujúceho podmienkam úlohy je teda $(3 + 2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$.

Poznámka. V druhej časti riešenia sme (pre konkrétnu hodnotu $\omega = 120°$) ukázali, že trojuholník ABD s danou stranou AB a daným uhlom ω pri vrchole D má najväčší obvod práve vtedy, keď je rovnoramenný so základňou AB. To vyplýva aj z nasledujúcej úvahy.

Bod D prebieha oblúk, z ktorého je úsečku AB vidno pod uhlom ω. Na polpriamke opačnej k DA (obr. 2) zostrojme bod K tak, aby $|DB| = |DK|$. Z rovnoramenného trojuholníka BDK vyplýva, že $|\measuredangle AKB| = \omega/2$. Bod K preto leží na oblúku, z ktorého je úsečku AB vidno pod uhlom $\omega/2$. Dĺžka $|AK| = |AD| + |BD|$ bude teda najväčšia práve vtedy, keď bude úsečka AK priemerom AK^* spomenutého oblúka. Vtedy je bod D stredom D^* príslušnej kružnice, takže platí $|AD^*| = |BD^*| = |D^*K^*|$.



Obr. 2

---

3. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz &= 6(y + z - 2),\\ y^2 + 2zx &= 6(z + x - 2),\\ z^2 + 2xy &= 6(x + y - 2). \end{aligned}$$

(*J. Šimša*)

Riešenie. Odčítaním prvej rovnice danej sústavy od druhej dostaneme rovnicu

$$y^2 - x^2 + 2zx - 2yz = 6(z + x - 2) - 6(y + z - 2),$$

ktorú upravíme na tvar

$$(x - y)(x + y - 2z + 6) = 0.$$

Podobne odčítaním prvej rovnice sústavy od tretej dostaneme

$$(x - z)(x + z - 2y + 6) = 0.$$

Daná sústava je preto ekvivalentná so sústavou rovníc

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz - 6(y + z - 2) &= 0,\\ (x - y)(x + y - 2z + 6) &= 0,\\ (x - z)(x + z - 2y + 6) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Vzhľadom na druhú a tretiu rovnicu tejto sústavy stačí rozobrať štyri prípady.

Nech $x - y = 0$ a súčasne $x - z = 0$. Potom $x = y = z$ a dosadením za y a z do prvej rovnice sústavy (2) dostaneme rovnicu

$$3x^2 - 12x + 12 = 0,$$

ktorá má dvojnásobný reálny koreň $x = 2$. Preto trojica $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ je v tomto prípade jediným riešením danej sústavy.

Nech $x - y = 0$ a súčasne $x + z - 2y + 6 = 0$. Potom $y = x$ a $z = x - 6$. Dosadením do prvej rovnice sústavy (2) dostaneme po úprave rovnicu

$$3x^2 - 24x + 48 = 0,$$

ktorá má dvojnásobný reálny koreň $x = 4$. Preto trojica $(x, y, z) = (4, 4, -2)$ je v tomto prípade jediným riešením danej sústavy.

Nech $x + y - 2z + 6 = 0$ a súčasne $x - z = 0$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade dostaneme jediné riešenie $(x, y, z) = (4, -2, 4)$.

Nech $x + y - 2z + 6 = 0$ a súčasne $x + z - 2y + 6 = 0$. Odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme, že $3y - 3z = 0$, teda $y = z$. Z prvého predpokladu tak máme $y = x + 6$. Dosadením do prvej rovnice sústavy (2) dostaneme po úprave rovnicu

$$3x^2 + 12x + 12 = 0,$$

ktorá má dvojnásobný reálny koreň $x = -2$. Preto trojica $(x, y, z) = (-2, 4, 4)$ je v tomto prípade jediným riešením danej sústavy.

Daná sústava má v obore reálnych čísel štyri riešenia (x, y, z). Sú nimi trojice $(2, 2, 2)$, $(4, 4, -2)$, $(4, -2, 4)$ a $(-2, 4, 4)$.

Poznámka. Keď si všimneme, že sčítaním všetkých troch rovníc danej sústavy dostaneme po úprave

$$(x + y + z - 6)^2 = 0,$$

tak napríklad z podmienky $z + x - 2y + 6 = 0$ priamo vyplýva $y = 4$, čo predchádzajúce úvahy zjednoduší.